Sommersemester 2023 Jonas Cleve

Brückenkurs Mathematik für Studienanfänger:innen der Informatik und Mathematik

2. Tutorium 13. April 2023

Auf der Webseite zum Kurs (oder direkt unter dem QR-Code) finden Sie eine Übersicht über die Eigenschaften von Relationen.

Hinweis: Es sind mehr Aufgaben, als Sie innerhalb des Tutoriums schaffen werden.
Vorschlag: Bearbeiten Sie bei allen Aufgaben außer der 2 zunächst nur eine Teilaufgabe. Bearbeiten Sie dann erst die anderen Aufgaben. So haben Sie im Tutorium jede Aufgabe zumindest angesehen.

Aufgabe 1 Vollständige Induktion

Beweisen Sie folgenden Aussagen durch vollständige Induktion.

(a) Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt: $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots (2n - 1) = n^2$.

Durch Ausprobieren für kleine Zahlen ($n = 2, 3$) stellen wir fest, dass $1+3+5+\ldots+(2n-1)$ tatsächlich die ersten n ungeraden Zahlen aufaddiert.
Wir halten dies zunächst als zu beweisende Induktionsbehauptung fest.
Induktionsbehauptung: $\forall n \in \mathbb{N}^+ : \sum_{i=1}^{n} 2i - 1 = n^2$

Da hier die Aussage für alle natürlichen Zahlen *ab* der 1 (und nicht ab 0) gelten soll, ist der Induktionsanfang (manchmal auch Induktions*anker* genannt) auch bei $n = 1$.
Induktionsanfang: ($n = 1$)
Für $n = 1$ ist $\sum_{i=1}^{n} 2i - 1 = \sum_{i=1}^{1} 2i - 1 = 2 - 1 = 1$ und auch $n^2 = 1$. Die Induktionsbehauptung gilt also für $n = 1$.

Induktionsvoraussetzung: Wir nehmen an, dass die Induktionsbehauptung für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}^+$ gilt.

Induktionsschritt: ($n \to n + 1$)
Wir folgern jetzt aus der Induktionsvoraussetzung, dass die Induktionsbehauptung dann auch für $n + 1$ gilt, also $\sum_{i=1}^{n+1} 2i - 1 = (n + 1)^2$ ist.

$$\sum_{i=1}^{n+1} 2i - 1 = \left(\sum_{i=1}^{n} 2i - 1\right) + 2(n + 1) - 1 = \left(\sum_{i=1}^{n} 2i - 1\right) + 2n + 1 = (*)$$

Für den Teil in der Klammer können wir die Induktionsvoraussetzung anwenden:

$$(*) = \left(n^2\right) + 2n + 1 = (n + 1)^2$$

Damit ist die Gleichheit gezeigt und der Beweis abgeschlossen.

(b) Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt: $3^n - 3$ ist durch 6 teilbar.

Wir halten die zu beweisende Aussage zunächst als Induktionsbehauptung fest.
Induktionsbehauptung: $\forall n \in \mathbb{N}^+ : 6|(3^n - 3)$

Wie schon in der vorigen Teilaufgabe ist auch hier der Induktionsanfang bei $n = 1$.
Induktionsanfang: $(n = 1)$
Für $n = 1$ ist $3^n - 3 = 3^1 - 3 = 3 - 3 = 0$ und 0 ist durch jede Zahl und damit insbesondere durch 6 teilbar.

Induktionsvoraussetzung: Wir nehmen an, dass die Induktionsbehauptung für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}^+$ gilt, also $6|(3^n - 3)$ für dieses n gilt.

Induktionsschritt: $(n \to n + 1)$
Wir folgern jetzt aus der Induktionsvoraussetzung, dass die Induktionsbehauptung dann auch für $n + 1$ gilt, also $6|(3^{n+1} - 3)$ wahr ist.

$$3^{n+1} - 3 = 3^n \cdot 3 - 3 = (*)$$

Um die Induktionsvoraussetzung anzuwenden, müssen wir es schaffen, den Term $3^n - 3$ zu isolieren. Hier können wir den in der Vorlesung gezeigten Trick der „nahrhaften Null“ verwenden:

$$(*) = 3^n \cdot 3 - 3 - 6 + 6 = 3 \cdot 3^n - 9 + 6 = 3 \cdot 3^n - 3 \cdot 3 + 6 = 3(3^n - 3) + 6$$

Die Induktionsvoraussetzung sagt uns, dass $3^n - 3$ und damit auch $3(3^n - 3)$ durch 6 teilbar ist. Der zweite Summand 6 ist auch offensichtlich durch 6 teilbar. Da beide Summanden durch 6 teilbar sind, ist auch die Summe und damit $3^{n+1} - 3$ durch 6 teilbar.

(c) Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 5$ gilt: $2^n > n^2$.
Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 3$ gilt $n^2 > 2n + 1$. Wir können auch verwenden, dass wenn $a > b$ und $c > d$ dann auch $a + c > b + d$ gilt.

Wir halten die zu beweisende Aussage zunächst als Induktionsbehauptung fest.
Induktionsbehauptung: $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2, 3, 4\} : 2^n > n^2$

Wie schon in der vorigen Teilaufgaben ist auch hier der Induktionsanfang nicht bei $n = 0$. Die kleinste Zahle, für die die Aussage gelten soll ist 5, also wählen wir auch den $n = 5$ für den Induktionsanfang.
Induktionsanfang: $(n = 5)$
Für $n = 5$ ist $2^5 = 32$ und $n^2 = 25$ und damit $2^5 > 5^2$.

Induktionsvoraussetzung: Wir nehmen an, dass die Induktionsbehauptung für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}^+$ gilt, also $2^n > n^2$ für dieses n gilt.

Induktionsschritt: $(n \to n + 1)$
Wir folgern jetzt aus der Induktionsvoraussetzung, dass die Induktionsbehauptung dann auch für $n + 1$ gilt, also $2^{n+1} > (n + 1)^2$ wahr ist.
Um die Induktionsvoraussetzung anwenden zu können, müssen wir auf der linken Seite der Ungleichung ein 2^n und auf der rechten Seite ein n^2 isolieren.
Wir stellen zunächst fest, dass $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n = 2^n + 2^n$ ist. Außerdem ist $(n + 1)^2 =$

$n^2 + 2n + 1$. Es reicht also zu zeigen, dass

$$2^n + 2^n > n^2 + (2n + 1) \tag{1}$$

Aus der Induktionsvoraussetzung wissen wir, dass $2^n > n^2$ gilt. Also können wir mit dem zweiten Hinweis der Aufgabe folgern, dass

$$2^n + 2^n > n^2 + n^2 \tag{2}$$

Der erste Hinweis ist ja, dass $2^n > 2n + 1$ für alle $n \geq 3$ gilt. Da wir nur $n \geq 5$ betrachten, können wir das also verwenden.
Es ist also

$$n^2 + n^2 > n^2 + 2n + 1 \tag{3}$$

Aus den beiden Ungleichungen (2) und (3) folgt direkt, dass

$$2^n + 2^n > n^2 + 2n + 1$$

und das war das, was wir in (1) zeigen wollten.

Aufgabe 2 Falscher Beweis

Betrachten Sie den folgenden **falschen (!)** Beweis, dass $1 = 2$.

Seien a und b zwei gleiche natürliche Zahlen. Dann haben wir die folgende Kette von Umformungen:

$$\begin{aligned} a &= b \\ a^2 &= ab \\ a^2 - b^2 &= ab - b^2 \\ (a+b)(a-b) &= (a-b)b \\ a + b &= b \\ 2b &= b \\ 2 &= 1 \end{aligned}$$

(a) Was passiert in den einzelnen Umformungsschritten?

$a = b$	Multipliziere mit a
$a^2 = ab$	Subtrahiere b^2
$a^2 - b^2 = ab - b^2$	Links: binomische Formel, rechts: Distributivität
$(a+b)(a-b) = (a-b)b$	Durch $a - b$ teilen
$a + b = b$	$a = b$ einsetzen
$2b = b$	Durch b teilen
$2 = 1$	

(b) Wo ist der Fehler im Beweis?

Der Fehler passiert im Schritt „durch $a - b$ teilen“. Wir wissen, dass $a = b$ ist, also ist $a - b = 0$. Wir teilen in diesem Schritt also durch 0, was nicht erlaubt ist.

Aufgabe 3 Eigenschaften von Mengen

Welche Schlussfolgerungen für die Mengen A und B können Sie aus den folgenden Voraussetzungen ziehen? Begründen Sie Ihre Antworten!

(a) $A \cup B = A \cap B$

(b) $A \setminus B = A$

(c) $A \setminus B = B$

(d) $A \setminus B = B \setminus A$

(a) Wenn $A \cup B = A \cap B$, dann muss $A = B$ gelten.

Beweis durch Kontraposition (also $A \neq B$ impliziert $A \cup B \neq A \cap B$). Wenn $A \neq B$ gibt es ein $a \in A$ mit $a \notin B$ oder ein $b \in B$ mit $b \notin A$.

Wenn es ein $a \in A$ mit $a \notin B$ gibt, dann ist $a \in A \cup B$ aber $a \notin A \cap B$. Dann ist aber $A \cup B \neq A \cap B$. Genauso ist der Fall, dass es ein $b \in B$ mit $b \notin A$ gibt. Dann ist $b \in A \cup B$ aber $b \notin A \cap B$ woraus ebenfalls folgt, dass $A \cup B \neq A \cap B$.

(b) Wenn $A \setminus B = A$, dann muss $A \cap B = \emptyset$ gelten, also A und B disjunkt sein.

Beweis durch Kontraposition (also $A \cap B \neq \emptyset$ impliziert $A \setminus B \neq A$). Sind A und B nicht disjunkt, so gibt es ein $a \in A \cap B$. Dann ist aber $a \in A$ und $a \notin A \setminus B$ und folglich $A \setminus B \neq A$.

(c) Wenn $A \setminus B = B$ dann muss $A = B = \emptyset$ gelten.

Beweis durch Kontraposition ($A \neq \emptyset$ oder $B \neq \emptyset$ impliziert $A \setminus B \neq B$).

Wenn $B \neq \emptyset$, dann gibt es ein $b \in B$. Dann wissen wir aber, dass $b \notin A \setminus B$. Also ist $A \setminus B \neq B$.

Wenn $A \neq \emptyset$, dann gibt es ein $a \in A$. Wenn außerdem $a \notin B$, dann ist $a \in A \setminus B$ also $A \setminus B \neq B$. Wenn $a \in B$ dann haben wir jedoch davor schon gezeigt, dass dann $A \setminus B \neq B$.

(d) Wenn $A \setminus B = B \setminus A$ dann ist $A = B$.

Beweis durch Kontraposition ($A \neq B$ impliziert $A \setminus B \neq B \setminus A$).

Wenn $A \neq B$ gibt es ein $a \in A$ mit $a \notin B$ oder ein $b \in B$ mit $b \notin A$. Wenn $a \in A$ mit $a \notin B$, dann ist aber $a \in A \setminus B$ und $a \notin B \setminus A$ und damit $A \setminus B \neq B \setminus A$.

Analog gilt das für den Fall, dass $b \in B$ mit $b \notin A$. Dann ist $b \in B \setminus A$ und $b \notin A \setminus B$ also $A \setminus B \neq B \setminus A$.

Aufgabe 4 Eigenschaften von Relationen

Überprüfen Sie für die folgenden beiden Relationen, welche der Eigenschaften (reflexiv, symmetrisch, transitiv, antisymmetrisch, asymmetrisch) sie haben und welche nicht. Argumentieren Sie jeweils kurz, oder geben Sie ein Gegenbeispiel an, dass die Eigenschaft verletzt.

Sei W die Menge aller möglichen (mindestens einen Buchstaben langen) Kombinationen aus den Buchstaben a–z (nennen wir sie Wörter). Die beiden folgenden Relationen sind Teilmengen von $W \times W$.

(a) $R_1 = \{(a,b)|a \text{ und } b \text{ haben } \textit{keinen} \text{ gemeinsamen Buchstaben}\} \subseteq W \times W$

> **nicht reflexiv** Jedes Wort hat mindestens einen Buchstaben und daher diesen Buchstaben mit sich selbst gemeinsam. Daher steht ein Wort nicht mit sich selbst in Relation.
>
> **symmetrisch** Die Reihenfolge bei „haben keinen gemeinsamen Buchstaben“ ist egal.
>
> **nicht transitiv** Gegenbeispiel: $\mathbf{ab}R_1\mathbf{cd}$ und $\mathbf{cd}R_1\mathbf{af}$ aber nicht $\mathbf{ab}R_1\mathbf{af}$, da sie einen gemeinsamen Buchstaben **a** haben.
>
> **nicht antisymmetrisch** Es gilt $\mathbf{a}R_1\mathbf{b}$ und (wegen der Symmetrie) auch $\mathbf{b}R_1\mathbf{a}$. Es ist aber $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$, daher ist die Relation nicht antisymmetrisch.
>
> **nicht asymmetrisch** Da die Relation symmetrisch ist, kann sie nicht gleichzeitig asymmetrisch sein.

(b) $R_2 = \{(a,b)|a \text{ ist echt kürzer als } b\ \} \subseteq W \times W$.
Dabei bedeutet „echt kürzer“, dass die Anzahl der Buchstaben von a echt kleiner der Anzahl der Buchstaben von b ist.

> **nicht reflexiv** Ein Wort hat nicht echt weniger Buchstaben als es selbst.
>
> **nicht symmetrisch** Wenn aR_2b, dann hat a weniger Buchstaben als b. Also kann nicht gleichzeitig bR_2a sein.
>
> **transitiv** Wenn für drei Wörter $a, b, c \in W$ gilt, dass aR_2b und bR_2c, dann hat a weniger Buchstaben als b und b weniger Buchstaben als c. Aus der Transitivität der $<$-Relation folgt, dass dann auch a weniger Buchstaben hat als c und somit aR_2c gilt.
>
> **antisymmetrisch** Hier gilt das gleiche wie beim $<$ in der Vorlesung. Die Aussage der Antisymmetrie ist, dass aus a kürzer als b und b kürzer als a folgt, dass $a = b$ sein muss. Da niemals a kürzer als b **und** gleichzeitig b kürzer als a sein kann, ist die Gesamtaussage der Implikation wahr: $(aR_2b \wedge bR_2a \rightarrow a = b) \equiv (0 \rightarrow a = b) \equiv 1$.
>
> **asymmetrisch** Wenn aR_2b, dann hat a weniger Buchstaben als b. Also kann nicht gleichzeitig bR_2a sein.

Aufgabe 5 Fast Äquivalenzrelationen

Wie Sie wissen sind Äquivalenzrelationen reflexiv, symmetrisch und transitiv. Gibt es Relationen, die jeweils eine der Eigenschaften nicht erfüllen? Finden Sie Beispiele oder begründen Sie, warum es eine solche Relation nicht geben kann.

Gehen Sie davon aus, dass die Grundmenge $A \neq \emptyset$ ist und wir Relationen $R \subseteq A \times A$ suchen.

Hinweis: Um eine Relation zu finden, betrachten sie Relation, die sie in der Vorlesung gesehen haben, oder versuchen sie ein möglichst kleines Beispiel zu konstruieren.

(a) Reflexiv und symmetrisch aber nicht transitiv.

Hier ist es relativ einfach ein sehr kleines (künstliches) Beispiel zu bauen. Wir nehmen die Menge $A = \{a, b, c\}$ und starten zunächst mit der kleinsten reflexiven Relation $R = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$. Bislang ist R eine Äquivalenzrelation (denn $R = Id_A$ und Id_A ist eine Äquivalenzrelation).
Der Gedanke ist jetzt, die Relation zu erweitern, dass aRb sowie bRc aber a und c nicht in Relation zueinander stehen. Dies würde genau die Transitivität verletzen.
Wir erweitern R also um $\{(a, b), (b, c)\}$ – um die Symmetrie nicht zu verletzen, müssen wir es aber auch um $\{(b, a), (c, b)\}$ erweitern.
Am Ende haben wir $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a), (b, c), (c, b)\}$, was reflexiv, symmetrisch aber nicht transitiv ist.

Ein anderes Beispiel wäre die Relation R auf allen Wörtern der deutschen Sprache, wobei wir zwei Wörter in Relation setzen, wenn sie mindestens einen gemeinsamen Buchstaben haben. Dann steht offensichtlich jedes Wort zu sich selbst in Relation (also ist R reflexiv) und die Reihenfolge ist auch unwichtig (aRb ist das gleiche wie bRa, also ist R symmetrisch). Wenn wir jedoch die Wörter *hund*, *maus* und *katze* betrachten, sehen wir, dass *hundRmaus* (und umgekehrt) und auch *mausRkatze* aber nicht *hundRkatze*, was aber sein müsste, wenn R transitiv wäre.

(b) Reflexiv und transitiv aber nicht symmetrisch.

Die Vergleichsrelation $\leq$ auf den natürlichen Zahlen ist hier ein Beispiel.

(i) Reflexiv: $a \leq a$ für alle $a \in \mathbb{N}$.

(ii) Transitiv: Wenn für beliebige $a, b, c \in \mathbb{N}$ sowohl $a \leq b$ als auch $b \leq c$ gilt, dann gilt auch $a \leq c$.

(iii) Nicht symmetrisch: Jedes Zahlenpaar a, b mit $a < b$ ist ein Gegenbeispiel, denn $a \leq b$ aber nicht $b \leq a$.

(c) Symmetrisch und transitiv aber nicht reflexiv.

Eine Relation, die die gewünschten Eigenschaften erfüllt ist die leere Relation $R = \emptyset$. Für eine Menge $A \neq \emptyset$ ist R nicht reflexiv, da kein Element aus A zu sich selbst in Relation steht. Symmetrie sagt, dass *wenn* aRb dann auch bRa gelten muss. Da aber für kein $a, b \in A$ gilt, dass aRb, ist auch nicht bRa. Genauso sagt die Transitivität, dass *wenn* aRb und bRc dann auch aRc sein muss. Da aber die Voraussetzung der Implikation falsch ist (denn aRb oder bRc ist falsch für alle $a, b, c \in A$), kann auch aRc falsch sein (was es auch ist).
Eine andere mögliche Relation, beispielsweise für $A = \{1, 2, 3\}$ ist die Relation $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$. Hier fehlt $3R3$, um R reflexiv zu machen, die Symmetrie und Transitivität ist jedoch vorhanden.

In allen Beispielen, die man sich hier ausdenken kann, ist eine Sache wichtig: Es muss ein Element $x \in A$ geben, welches zu keinem anderen Element in Relation steht.
Dies können wir sogar beweisen. Wir beweisen dafür die folgende Aussage: Sei $R \subseteq A \times A$ eine symmetrische und transitive Relation, in der jedes Element $a \in A$ zu mindestens einem Element in Beziehung steht, dann ist R auch reflexiv.
Wir betrachten ein konkretes $a \in A$ und wissen, dass a zu einem Element $b \in A$ in Beziehung steht, also aRb gilt. Wir machen jetzt eine Fallunterscheidung:

1. Fall, $a \neq b$. Wenn aRb gilt, dann muss aufgrund der Symmetrie auch bRa gelten. Dann folgt aus der Transitivität, dass wenn aRb und bRa auch aRa gelten muss.

2. Fall, $a = b$. Wenn aRb und $b = a$, dann gilt direkt auch aRa.

In beiden Fällen konnten wir daraus, dass a zu einem Element in Relation steht, folgern, dass dann auch a zu sich selbst in Relation stehen muss. Wenn also jedes $a \in A$ zu einem Element in Relation steht, dann steht auch jedes Element zu sich selbst in Relation. Dies bedeutet aber genau, dass die Relation reflexiv ist.