Sommersemester 2023 Jonas Cleve

Brückenkurs Mathematik für Studienanfänger:innen der Informatik und Mathematik

2. Tutorium 13. April 2023

Auf der Webseite zum Kurs (oder direkt unter dem QR-Code) finden Sie eine Übersicht über die Eigenschaften von Relationen.

Hinweis: Es sind mehr Aufgaben, als Sie innerhalb des Tutoriums schaffen werden.
Vorschlag: Bearbeiten Sie bei allen Aufgaben außer der 2 zunächst nur eine Teilaufgabe. Bearbeiten Sie dann erst die anderen Aufgaben. So haben Sie im Tutorium jede Aufgabe zumindest angesehen.

Aufgabe 1 Vollständige Induktion

Beweisen Sie folgenden Aussagen durch vollständige Induktion.

(a) Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt: $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots (2n - 1) = n^2$.

(b) Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt: $3^n - 3$ ist durch 6 teilbar.

(c) Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 5$ gilt: $2^n > n^2$.
Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 3$ gilt $n^2 > 2n + 1$. Wir können auch verwenden, dass wenn $a > b$ und $c > d$ dann auch $a + c > b + d$ gilt.

Aufgabe 2 Falscher Beweis

Betrachten Sie den folgenden **falschen (!)** Beweis, dass $1 = 2$.

Seien a und b zwei gleiche natürliche Zahlen. Dann haben wir die folgende Kette von Umformungen:

$$\begin{aligned}
a &= b \\
a^2 &= ab \\
a^2 - b^2 &= ab - b^2 \\
(a + b)(a - b) &= (a - b)b \\
a + b &= b \\
2b &= b \\
2 &= 1
\end{aligned}$$

(a) Was passiert in den einzelnen Umformungsschritten?

(b) Wo ist der Fehler im Beweis?

Aufgabe 3 Eigenschaften von Mengen

Welche Schlussfolgerungen für die Mengen A und B können Sie aus den folgenden Voraussetzungen ziehen? Begründen Sie Ihre Antworten!

(a) $A \cup B = A \cap B$

(b) $A \setminus B = A$

(c) $A \setminus B = B$

(d) $A \setminus B = B \setminus A$

Aufgabe 4 Eigenschaften von Relationen

Überprüfen Sie für die folgenden beiden Relationen, welche der Eigenschaften (reflexiv, symmetrisch, transitiv, antisymmetrisch, asymmetrisch) sie haben und welche nicht. Argumentieren Sie jeweils kurz, oder geben Sie ein Gegenbeispiel an, dass die Eigenschaft verletzt.

Sei W die Menge aller möglichen (mindestens einen Buchstaben langen) Kombinationen aus den Buchstaben a–z (nennen wir sie Wörter). Die beiden folgenden Relationen sind Teilmengen von $W \times W$.

(a) $R_1 = \{(a, b) | a$ und b haben *keinen* gemeinsamen Buchstaben$\} \subseteq W \times W$

(b) $R_2 = \{(a, b) | a$ ist echt kürzer als b $\} \subseteq W \times W$.
Dabei bedeutet „echt kürzer“, dass die Anzahl der Buchstaben von a echt kleiner der Anzahl der Buchstaben von b ist.

Aufgabe 5 Fast Äquivalenzrelationen

Wie Sie wissen sind Äquivalenzrelationen reflexiv, symmetrisch und transitiv. Gibt es Relationen, die jeweils eine der Eigenschaften nicht erfüllen? Finden Sie Beispiele oder begründen Sie, warum es eine solche Relation nicht geben kann.

Gehen Sie davon aus, dass die Grundmenge $A \neq \emptyset$ ist und wir Relationen $R \subseteq A \times A$ suchen.

Hinweis: Um eine Relation zu finden, betrachten sie Relation, die sie in der Vorlesung gesehen haben, oder versuchen sie ein möglichst kleines Beispiel zu konstruieren.

(a) Reflexiv und symmetrisch aber nicht transitiv.

(b) Reflexiv und transitiv aber nicht symmetrisch.

(c) Symmetrisch und transitiv aber nicht reflexiv.