Sommersemester 2023 Jonas Cleve

Brückenkurs Mathematik für Studienanfänger:innen der Informatik und Mathematik

Lösungsvorschlag

1. Tutorium 05. April 2023

Aufgabe 1 Logik im Alltag

(a) Restaurant A wirbt mit dem Slogan „Gutes Essen ist nicht billig!“. Das daneben liegende Restaurant B sagt „Billiges Essen ist nicht gut!“

Meinen sie nun dasselbe oder nicht? Begründen Sie ihre Antwort.

Hinweis: Stellen Sie die Aussagen mittels Implikationen dar.

> Wir führen zwei Variablen b und g mit folgender Bedeutung ein:
>
> - b: Essen ist billig. / $\neg b$: Essen ist nicht billig.
> - g: Essen ist gut. / $\neg g$: Essen ist nicht gut.
>
> Der Slogan von Restaurant A lässt sich dann als $g \to \neg b$ darstellen während sich der Slogan von Restaurant B als $b \to \neg g$ darstellen lässt. Wir wissen, dass die Aussagen $a \to b$ und $\neg b \to \neg a$ äquivalent sind (Kontraposition, Vorlesung zu Beweisen). Wir wissen also $g \to \neg b \equiv \neg(\neg b) \to \neg g \equiv b \to \neg g$. Somit sind die Aussagen der beiden Restaurants logisch äquivalent, sie meinen also dasselbe.

(b) Ein 100-jähriger wird nach seinem Rezept für's Altwerden gefragt. Seine Antwort: „Hier sind meine Diätregeln. Wenn man kein Bier zu einer Mahlzeit trinkt, dann esse man Fisch. Wenn man Bier und Fisch zu einer Mahlzeit hat, dann verzichte man auf Eiscreme. Wenn man Eiscreme hat oder Bier meidet, dann esse man keinen Fisch.“

Das kann man auch kürzer sagen. Wie und warum?

Hinweis: Stellen Sie die Aussagen zunächst mittels Implikationen dar. Vereinfachen Sie dann. Sie benötigen nur drei Variablen.

> Wir führen die drei Variablen b, e und f ein. Eine Belegung einer der Variablen mit 1 bedeutet, dass Bier / Eiscreme / Fisch konsumiert wird. Eine Belegung einer der Variablen mit 0 bedeutet entsprechend, dass Bier / Eiscreme / Fisch *nicht* konsumiert wird.
> Die Regeln können wir dann wie folgt als Implikationen formulieren: $\neg b \to f$, $b \wedge f \to \neg e$ und $e \vee \neg b \to \neg f$. Jetzt müssen wir die Regeln noch *verunden* und abschließend

so weit wie möglich vereinfachen.

$$\begin{aligned}
&(\neg b \to f) \land (b \land f \to \neg e) \land (e \lor \neg b \to \neg f) && \mid a \to b \equiv \neg a \lor b \\
\equiv\ &(\neg(\neg b) \lor f) \land (\neg(b \land f) \lor \neg e) \land (\neg(e \lor \neg b) \lor \neg f) && \mid \text{doppelte Negation} \\
\equiv\ &(b \lor f) \land (\neg(b \land f) \lor \neg e) \land (\neg(e \lor \neg b) \lor \neg f) && \mid \text{de-Morgan} \\
\equiv\ &(b \lor f) \land ((\neg b \lor \neg f) \lor \neg e) \land ((\neg e \land \neg(\neg b)) \lor \neg f) && \mid \text{doppelte Negation} \\
\equiv\ &(b \lor f) \land ((\neg b \lor \neg f) \lor \neg e) \land ((\neg e \land b) \lor \neg f) && \mid \text{Assoziativität} \\
\equiv\ &(b \lor f) \land (\neg b \lor \neg f \lor \neg e) \land ((\neg e \land b) \lor \neg f) && \mid \text{Distributivität} \\
\equiv\ &(b \lor f) \land (\neg b \lor \neg f \lor \neg e) \land ((\neg e \lor \neg f) \land (b \lor \neg f)) && \mid \text{Assoziativität} \\
\equiv\ &(b \lor f) \land (\neg b \lor \neg f \lor \neg e) \land (\neg e \lor \neg f) \land (b \lor \neg f) && \mid \text{Assoziativ., Kommutativ.} \\
\equiv\ &(b \lor f) \land (\neg b \lor (\neg e \lor \neg f)) \land (\neg e \lor \neg f) \land (b \lor \neg f) && \mid \text{Absorption, } (\neg b \lor a) \land a \equiv a \\
\equiv\ &(b \lor f) \land (\neg e \lor \neg f) \land (b \lor \neg f) && \mid \text{Kommutativ., Assoziativ.} \\
\equiv\ &((b \lor f) \land (b \lor \neg f)) \land (\neg e \lor \neg f) && \mid \text{Distributivität} \\
\equiv\ &(b \lor (f \land \neg f)) \land (\neg e \lor \neg f) && \mid \text{Komplementierung} \\
\equiv\ &(b \lor 0) \land (\neg e \lor \neg f) && \mid \text{Neutralität} \\
\equiv\ &b \land (\neg e \lor \neg f)
\end{aligned}$$

Die Diätregeln können also kurz gefasst formuliert werden als: „Bier trinken und mindestens eines von Eiscreme oder Fisch vermeiden.“

Aufgabe 2 Terme vereinfachen

Vereinfachen Sie die folgenden Terme. Benennen Sie die verwendeten Gesetze.

$t_1 = \neg(\neg x \lor y) \lor (x \land y) \land (x \land y \lor \neg z)$

$t_2 = (y \lor \neg z) \land \neg(\neg y \land z \land (x \lor y))$

$t_3 = \neg x \land (\neg x \lor y) \land \neg y \land (z \lor \neg y) \land (\neg z \lor x) \land \neg z$

$$\begin{aligned}
t_1 &= \neg(\neg x \lor y) \lor (x \land y) \land (x \land y \lor \neg z) && \mid \text{Vollständig Klammern} \\
&\equiv \neg((\neg x) \lor y) \lor ((x \land y) \land ((x \land y) \lor \neg z)) && \mid \text{Absorption, } a \land (a \lor \neg z) \equiv a \\
&\equiv \neg((\neg x) \lor y) \lor (x \land y) && \mid \text{de-Morgan} \\
&\equiv (\neg(\neg x) \land \neg y) \lor (x \land y) && \mid \text{doppelte Negation} \\
&\equiv (x \land \neg y) \lor (x \land y) && \mid \text{Distributivität} \\
&\equiv x \land (\neg y \lor y) && \mid \text{Komplementierung} \\
&\equiv x \land 1 && \mid \text{Neutralität} \\
&\equiv x
\end{aligned}$$

Wir verwenden im Folgenden den Fakt, dass die de-morganschen Gesetze nicht nur für zwei Terme innerhalb der Klammer gelten, sondern für beliebig viele. Spezifisch nutzen wir, dass gilt $\neg(a \lor b \lor c) \equiv \neg(a \lor (b \lor c)) \equiv \neg a \land \neg(b \lor c) \equiv \neg a \land (\neg b \land \neg c) \equiv \neg a \land \neg b \land \neg c$ und genauso für $\neg(a \land b \land c)$.

$$\begin{aligned}
t_2 &= (y \lor \neg z) \land \neg(\neg y \land z \land (x \lor y)) && \mid \text{de-Morgan} \\
&\equiv (y \lor \neg z) \land (\neg(\neg y) \lor \neg z \lor \neg(x \lor y)) && \mid \text{doppelte Negation} \\
&\equiv (y \lor \neg z) \land (y \lor \neg z \lor \neg(x \lor y)) && \mid \text{Assoziativität} \\
&\equiv (y \lor \neg z) \land ((y \lor \neg z) \lor \neg(x \lor y)) && \mid \text{Absorption} \\
&\equiv (y \lor \neg z)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
t_3 &= \neg x \wedge (\neg x \vee y) \wedge \neg y \wedge (z \vee \neg y) \wedge (\neg z \vee x) \wedge \neg z && \mid \text{Kommutativität} \\
&\equiv \neg x \wedge (\neg x \vee y) \wedge \neg y \wedge (\neg y \vee z) \wedge \neg z \wedge (\neg z \vee x) && \mid \text{3 mal Absorption} \\
&\equiv \neg x \wedge \neg y \wedge \neg z && \mid \text{de-Morgan (falls gewünscht)} \\
&\equiv \neg(x \vee y \vee z)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3 Quantoren und Prädikate

Gehen Sie für jede Aussage wie folgt vor: (1) Negieren Sie die Aussage. (2) Bestimmen Sie den Wahrheitswert der negierten Aussage. (3) Geben Sie (allgemeine) Werte für x, y und z an, die zeigen, dass der davor bestimmte Wahrheitswert korrekt ist. (4) Welchen Wahrheitswert hat die nicht negierte Aussage?

(a) $\forall z \in \mathbb{N} : \exists x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} : x \cdot y = z$

$$
\begin{aligned}
&\neg(\forall z \in \mathbb{N} : \exists x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} : x \cdot y = z) \\
\equiv\ &\exists z \in \mathbb{N} : \neg(\exists x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} : x \cdot y = z) \\
\equiv\ &\exists z \in \mathbb{N} : \forall x \in \mathbb{N} : \neg(\exists y \in \mathbb{N} : x \cdot y = z) \\
\equiv\ &\exists z \in \mathbb{N} : \forall x \in \mathbb{N} : \forall y \in \mathbb{N} : \neg(x \cdot y = z) \\
\equiv\ &\exists z \in \mathbb{N} : \forall x \in \mathbb{N} : \forall y \in \mathbb{N} : x \cdot y \neq z
\end{aligned}
$$

Die negierte Aussage ist falsch: Egal welches z wir wählen würden, (unter anderem) für die Werte $x = z$ und $y = 1$ ist dann $z = x \cdot y$, also die Behauptung $x \cdot y \neq z$ nicht wahr.
Damit ist die ursprüngliche Aussage wahr. Dies ergibt auch Sinn, da wir für beliebiges z immer $x = 1$ und $y = z$ wählen können, um

(b) $\forall z \in \mathbb{Z} : \exists x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : x \cdot y = z$

$$
\begin{aligned}
&\neg(\forall z \in \mathbb{Z} : \exists x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : x \cdot y = z) \\
\equiv\ &\exists z \in \mathbb{Z} : \neg(\exists x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : x \cdot y = z) \\
\equiv\ &\exists z \in \mathbb{Z} : \forall x \in \mathbb{Z} : \neg(\forall y \in \mathbb{Z} : x \cdot y = z) \\
\equiv\ &\exists z \in \mathbb{Z} : \forall x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z} : \neg(x \cdot y = z) \\
\equiv\ &\exists z \in \mathbb{Z} : \forall x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z} : x \cdot y \neq z
\end{aligned}
$$

Die negierte Aussage ist wahr: Wir können $z = 1$ wählen und, nachdem uns ein beliebiges x gegeben wurde, $y = 2$ wählen. Dann haben wir $x \cdot 2 \neq 1$, was immer wahr ist, da in den ganzen Zahlen die Zahl $\frac{1}{2}$ nicht existiert und die Ungleichung nur für $x = \frac{1}{2}$ falsch wäre.
Die ursprüngliche Aussage ist damit falsch.

(c) $\exists x \in \mathbb{N} : \forall y \in \mathbb{N} : \exists z \in \mathbb{N} : x + z \neq y$

$$
\begin{aligned}
&\neg(\exists x \in \mathbb{N} : \forall y \in \mathbb{N} : \exists z \in \mathbb{N} : x + z \neq y) \\
\equiv\ &\forall x \in \mathbb{N} : \neg(\forall y \in \mathbb{N} : \exists z \in \mathbb{N} : x + z \neq y) \\
\equiv\ &\forall x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} : \neg(\exists z \in \mathbb{N} : x + z \neq y) \\
\equiv\ &\forall x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} : \forall z \in \mathbb{N} : \neg(x + z \neq y) \\
\equiv\ &\forall x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} : \forall z \in \mathbb{N} : x + z = y
\end{aligned}
$$

Die negierte Aussage ist falsch: Wir können nur y frei wählen und müssen uns festlegen, bevor wir wissen, was z ist. Somit ist die Gleichung mindestens für alle $z > y$ nicht erfüllt, egal welchen Wert x hat.
Damit ist die ursprüngliche Aussage wahr.

Aufgabe 4 Direkte Beweise

Seien k, m und n beliebige natürliche Zahlen und $k > 0$. *Beweisen* Sie folgende Aussagen *direkt*.

(a) Wenn k sowohl Teiler von m als auch von n ist, dann ist k ein Teiler von $m+n$.

Seien $k, m, n \in N$ gegeben mit $k > 0$.

$$
\begin{aligned}
&k|m \wedge k|n \\
\equiv\ &(\exists a \in \mathbb{N} : m = k \cdot a) \wedge (\exists b \in \mathbb{N} : n = k \cdot b) \\
\rightarrow\ &\exists a \in \mathbb{N} : \exists b \in \mathbb{N} : m = k \cdot a \wedge n = k \cdot b \\
\rightarrow\ &\exists a \in \mathbb{N} : \exists b \in \mathbb{N} : m + n = k \cdot a + k \cdot b \\
\equiv\ &\exists a \in \mathbb{N} : \exists b \in \mathbb{N} : m + n = k \cdot (a + b) \\
\rightarrow\ &\exists c \in \mathbb{N} : m + n = k \cdot c \\
\equiv\ &k|(m + n) \qquad \square
\end{aligned}
$$

(b) Wenn m ungerade und n gerade ist, dann ist $m + n$ ungerade.

Seien $m, n \in N$ gegeben.

$$
\begin{aligned}
&m \text{ ungerade} \wedge n \text{ gerade} \\
\equiv\ &(\exists a \in \mathbb{N} : m = 2 \cdot a + 1) \wedge (\exists b \in \mathbb{N} : n = 2 \cdot b) \\
\rightarrow\ &\exists a \in \mathbb{N} : \exists b \in \mathbb{N} : m = 2 \cdot a + 1 \wedge n = 2 \cdot b \\
\rightarrow\ &\exists a \in \mathbb{N} : \exists b \in \mathbb{N} : m + n = 2 \cdot a + 1 + 2 \cdot b \\
\equiv\ &\exists a \in \mathbb{N} : \exists b \in \mathbb{N} : m + n = 2 \cdot (a + b) + 1 \\
\rightarrow\ &\exists c \in \mathbb{N} : m + n = 2 \cdot c + 1 \\
\equiv\ &m + n \text{ ungerade} \qquad \square
\end{aligned}
$$

Hinweis: Für alle $a \in \mathbb{N}$ gilt: a ist *ungerade* genau dann, wenn $\exists k \in \mathbb{N} : a = 2k + 1$.

Aufgabe 5 Beweistechniken

(a) *Zeigen* Sie mit einem indirekten Beweis, dass wenn k Teiler von m aber kein Teiler von n ist, auch m kein Teiler von n sein kann.

Beweis durch Widerspruch. Statt $k|m \wedge \neg(k|n) \rightarrow \neg(m|n)$ zu zeigen, nehmen wir an, dass $k|m \wedge \neg(k|n) \wedge \neg(\neg(m|n)) \equiv k|m \wedge \neg(k|n) \wedge m|n$ gilt und leiten daraus einen Widerspruch (also eine falsche Aussage) ab.
Wenn $k|m \wedge \neg(k|n) \wedge m|n$ gilt, dann $\exists a \in \mathbb{N} : m = k \cdot a$ und $\forall b \in \mathbb{N} : n \neq k \cdot b$ und $\exists c \in \mathbb{N} : n = m \cdot c$. Wir können aber den ersten und dritten Teil zusammenfassen und folgern, dass wir dann n schreiben können als $n = k \cdot b \cdot c$ für zwei natürliche Zahlen b und c. Also ist demnach k ein Teiler von n. Wir haben aber angenommen, dass k **kein** Teiler von n ist. Dies ist ein Widerspruch und damit ist der Beweis der ursprünglichen Aussage erbracht. $\square$

(b) *Beweisen* Sie mit Fallunterscheidung, dass $n^3 - n$ für beliebige $n \in \mathbb{N}$ durch 6 teilbar ist.

Um zu zeigen, dass $6|(n^3 - n)$ für alle natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt, betrachten wird zunächst $n^3 - n$ und sehen, dass $n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n+1)(n-1)$. Da hier drei aufeinander folgende Zahlen multipliziert werden, ist klar, dass mindestens eine der drei Zahlen und damit auch $n^3 - n$ durch 2 teilbar ist.
Um durch 6 teilbar zu sein, müssen wir nur noch zeigen, dass $n^3 - n$ auch durch 3 teilbar ist. Hierfür betrachten wir, wie viel Rest übrig bleibt, wenn wir n durch 3 teilen. Dafür müssen wir entsprechend 3 Fälle betrachten:

(i) $n = 3k$ (für ein $k \in \mathbb{N}$; beim Teilen durch 3 bleibt also kein Rest). Dann gilt aber $3|n$ und damit auch $3|n(n+1)(n-1)$ also $3|(n^3 - n)$.

(ii) $n = 3k + 1$ (für ein $k \in \mathbb{N}$; beim Teilen durch 3 bleibt also ein Rest 1). Dann gilt aber $3|(n-1)$ und damit auch $3|n(n+1)(n-1)$ also $3|(n^3 - n)$.

(iii) $n = 3k + 2$ (für ein $k \in \mathbb{N}$; beim Teilen durch 3 bleibt also ein Rest 2). Dann gilt aber $3|(n+1)$ und damit auch $3|n(n+1)(n-1)$ also $3|(n^3 - n)$.

Damit sind alle Fälle betrachtet. $\square$

(c) *Beweisen* Sie den folgenden Satz (i) mit Fallunterscheidung bezüglich der Reste beim Teilen durch 3 und (ii) durch Kontraposition.

Satz: Seien a und b zwei natürliche Zahlen, sodass weder a noch b durch 3 teilbar sind, dann ist die Zahl $s = a + b$ oder die Zahl $t = a + 2b$ NICHT durch 3 teilbar.

Seien $a, b \in \mathbb{N}$ gegeben.

(i) Wir müssen alle Kombinationen von Fällen betrachten, welcher Rest beim Teilen durch 3 für a und b. Die Voraussetzung ist, dass weder a noch b durch 3 teilbar sein, also kann der Rest 0 nicht auftauchen. Beide Zahlen können Rest 1 oder 2 haben. Das sind also 4 Kombinationen.

i. a und b haben Rest 1 beim Teilen durch 3. Wir können also sagen, dass $k, k' \in \mathbb{N}$ existieren, sodass wir $a = 3k + 1$ und $b = 3k' + 1$ schreiben können. Betrachten wir $s = a + b = 3k + 1 + 3k' + 1 = 3(k + k') + 2$ dann ist klar, dass s ebenfalls nicht durch 3 teilbar ist.

ii. a hat Rest 1 und b hat Rest 2 beim Teilen durch 3. Wir können also sagen, dass $k, k' \in \mathbb{N}$ existieren, sodass wir $a = 3k + 1$ und $b = 3k' + 2$ schreiben können. Betrachten wir $t = a + 2b = 3k + 1 + 2(3k' + 2) = 3k + 6k' + 5 = 3(k + 2k' + 1) + 2$ dann ist klar, dass t ebenfalls nicht durch 3 teilbar ist.

iii. a hat Rest 2 und b hat Rest 1 beim Teilen durch 3. Wir können also sagen, dass $k, k' \in \mathbb{N}$ existieren, sodass wir $a = 3k + 2$ und $b = 3k' + 1$ schreiben können. Betrachten wir $t = a + 2b = 3k + 2 + 2(3k' + 1) = 3k + 6k' + 4 = 3(k + 2k' + 1) + 1$ dann ist klar, dass t ebenfalls nicht durch 3 teilbar ist.

iv. a und b haben Rest 2 beim Teilen durch 3. Wir können also sagen, dass $k, k' \in \mathbb{N}$ existieren, sodass wir $a = 3k + 2$ und $b = 3k' + 2$ schreiben können. Betrachten wir $s = a + b = 3k + 2 + 3k' + 2 = 3(k + k' + 1) + 1$ dann ist klar, dass s ebenfalls nicht durch 3 teilbar ist.

□

(ii) Die eigentliche Aussage ist formal geschrieben $\neg(3|a) \wedge \neg(3|b) \rightarrow \neg(3|(a+b)) \vee \neg(3|(a+2b))$. Die Kontraposition ist entsprechend $\neg(\neg(3|(a+b)) \vee \neg(3|(a+2b))) \rightarrow \neg(\neg(3|a) \wedge \neg(3|b))$ was durch Anwenden der de-morganschen Regeln zu $3|(a+b) \wedge 3|(a+2b) \rightarrow 3|a \vee 3|b$ vereinfacht. Wenn also sowohl $a + b$ als auch $a + 2b$ durch 3 teilbar sind, können wir sagen, dass $k, k' \in \mathbb{N}$ existieren, sodass $a + b = 3k$ und $a + 2b = 3k'$ gilt.

Wir können b darstellen als $b = (a+2b)-(a+b) = 3k'-3k = 3(k'-k)$ woraus wir direkt sehen können, dass b durch 3 teilbar ist. Hier sind wir schon fertig, da wir nur für einen aus a oder b zeigen müssen, dass sie durch 3 teilbar sind.

Der Vollständig halber betrachten wir aber noch a und sehen, dass wir das beispielsweise als $a = 2(a + b) - (a + 2b) = 2 \cdot 3k - 3k' = 3(2k - k')$ schreiben können. Dies ist ebenfalls durch 3 teilbar. □

Aufgabe 6 Domino-Schach

Stellen wir uns ein 8x8-Schachbrett vor. Dieses Schachbrett wollen Sie nun mit Dominosteinen abdecken, dabei deckt ein Dominostein jeweils genau zwei waagerecht oder senkrecht benachbarte Felder ab. *Skizzieren* Sie eine Möglichkeit, das Schachbrett vollständig mit Dominosteinen abzudecken. und begründen Sie anschließend folgende Aussage: Wenn man zwei diagonal gegenüberliegende Eckfelder in einem Schachbrett ausschneidet, kann man das (restliche) Brett nicht mehr vollständig mit den Dominosteinen abdecken.

Da das Schachbrett 8 Felder breit ist, können wir eine Zeile dadurch abdecken, dass wir 4 Dominosteine horizontal nebeneinander legen. Dies machen wir für alle 8 Zeilen und sind fertig.
Wir können beobachten, dass ein Dominostein, egal wie er liegt, immer genau ein schwarzes und ein weißes Feld abdeckt. Dies liegt daran, dass für jedes Feld die horizontalen und vertikalen Nachbarn alle die andere Farbe haben. Dies bedeutet aber auch, dass wenn k Dominosteine auf dem Feld liegen, genau k weiße und k schwarze Felder abgedeckt sind. Wenn wir jetzt zwei gegenüber liegende Felder ausschneiden, dann entfernen wir zwei Felder der gleichen Farbe (entweder zwei weiße oder zwei schwarze Felder). Anschließend sind also nicht mehr gleich viele schwarze wie weiße Felder auf dem Schachbrett vorhanden. Wir können dann aber nicht mehr alle Felder abdecken.