Sommersemester 2023 Jonas Cleve

Brückenkurs Mathematik für Studienanfänger:innen der Informatik und Mathematik

1. Tutorium — 05. April 2023

Auf der Webseite (oder direkt unter dem QR-Code) finden Sie eine Übersicht über die Äquivalenz-Regeln (mit und ohne Quantoren).

Allgemeiner Hinweis: Es ist nicht gedacht, dass Sie innerhalb des Tutoriums alle Aufgaben schaffen.

Aufgabe 1 Logik im Alltag

(a) Restaurant A wirbt mit dem Slogan „Gutes Essen ist nicht billig!“. Das daneben liegende Restaurant B sagt „Billiges Essen ist nicht gut!“

Meinen sie nun dasselbe oder nicht? Begründen Sie ihre Antwort.

Hinweis: Stellen Sie die Aussagen mittels Implikationen dar.

(b) Ein 100-jähriger wird nach seinem Rezept für's Altwerden gefragt. Seine Antwort: „Hier sind meine Diätregeln. Wenn man kein Bier zu einer Mahlzeit trinkt, dann esse man Fisch. Wenn man Bier und Fisch zu einer Mahlzeit hat, dann verzichte man auf Eiscreme. Wenn man Eiscreme hat oder Bier meidet, dann esse man keinen Fisch.“

Das kann man auch kürzer sagen. Wie und warum?

Hinweis: Stellen Sie die Aussagen zunächst mittels Implikationen dar. Vereinfachen Sie dann. Sie benötigen nur drei Variablen.

Aufgabe 2 Terme vereinfachen

Vereinfachen Sie die folgenden Terme. Benennen Sie die verwendeten Gesetze.

$t_1 = \neg(\neg x \vee y) \vee (x \wedge y) \wedge (x \wedge y \vee \neg z)$

$t_2 = (y \vee \neg z) \wedge \neg(\neg y \wedge z \wedge (x \vee y))$

$t_3 = \neg x \wedge (\neg x \vee y) \wedge \neg y \wedge (z \vee \neg y) \wedge (\neg z \vee x) \wedge \neg z$

Aufgabe 3 Quantoren und Prädikate

Gehen Sie für jede Aussage wie folgt vor: (1) Negieren Sie die Aussage. (2) Bestimmen Sie den Wahrheitswert der negierten Aussage. (3) Geben Sie (allgemeine) Werte für x, y und z an, die zeigen, dass der davor bestimmte Wahrheitswert korrekt ist. (4) Welchen Wahrheitswert hat die nicht negierte Aussage?

(a) $\forall z \in \mathbb{N} : \exists x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} : x \cdot y = z$

(b) $\forall z \in \mathbb{Z} : \exists x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : x \cdot y = z$

(c) $\exists x \in \mathbb{N} : \forall y \in \mathbb{N} : \exists z \in \mathbb{N} : x + z \neq y$

Aufgabe 4 Direkte Beweise

Seien k, m und n beliebige natürliche Zahlen und $k > 0$. *Beweisen* Sie folgende Aussagen *direkt*.

(a) Wenn k sowohl Teiler von m als auch von n ist, dann ist k ein Teiler von $m+n$.

(b) Wenn m ungerade und n gerade ist, dann ist $m + n$ ungerade.

Hinweis: Für alle $a \in \mathbb{N}$ gilt: a ist *ungerade* genau dann, wenn $\exists k \in \mathbb{N} : a = 2k + 1$.

Aufgabe 5 Beweistechniken

(a) *Zeigen* Sie mit einem indirekten Beweis, dass wenn k Teiler von m aber kein Teiler von n ist, auch m kein Teiler von n sein kann.

(b) *Beweisen* Sie mit Fallunterscheidung, dass $n^3 - n$ für beliebige $n \in \mathbb{N}_0$ durch 6 teilbar ist.

(c) *Beweisen* Sie den folgenden Satz (i) mit Fallunterscheidung bezüglich der Reste beim Teilen durch 3 und (ii) durch Kontraposition.

Satz: Seien a und b zwei natürliche Zahlen, sodass weder a noch b durch 3 teilbar sind, dann ist die Zahl $s = a + b$ oder die Zahl $t = a + 2b$ NICHT durch 3 teilbar.

Aufgabe 6 Domino-Schach

Stellen wir uns ein 8x8-Schachbrett vor. Dieses Schachbrett wollen Sie nun mit Dominosteinen abdecken, dabei deckt ein Dominostein jeweils genau zwei waagerecht oder senkrecht benachbarte Felder ab. *Skizzieren* Sie eine Möglichkeit, das Schachbrett vollständig mit Dominosteinen abzudecken. und begründen Sie anschließend folgende Aussage: Wenn man zwei diagonal gegenüberliegende Eckfelder in einem Schachbrett ausschneidet, kann man das (restliche) Brett nicht mehr vollständig mit den Dominosteinen abdecken.