Logik – Äquivalenzregeln

Satz:

Für beliebige Formeln r, s, t gelten die folgenden Äquivalenzen:

Assoziativität:

$$(r \land s) \land t \equiv r \land (s \land t)$$
$$(r \lor s) \lor t \equiv r \lor (s \lor t)$$

Kommutativität:

$$r \land s \equiv s \land r$$
$$r \lor s \equiv s \lor r$$

Distributivität:

$$r \land (s \lor t) \equiv (r \land s) \lor (r \land t)$$
$$r \lor (s \land t) \equiv (r \lor s) \land (r \lor t)$$

Idempotenz:

$$r \land r \equiv r$$
$$r \lor r \equiv r$$

Dominanz:

$$r \land 0 \equiv 0$$
$$r \lor 1 \equiv 1$$

Neutralität:

$$r \land 1 \equiv r$$
$$r \lor 0 \equiv r$$

Absorption:

$$r \land (r \lor s) \equiv r$$
$$r \lor (r \land s) \equiv r$$

de-morgansche Regeln:

$$\neg(r \land s) \equiv \neg r \lor \neg s$$
$$\neg(r \lor s) \equiv \neg r \land \neg s$$

Komplementierung:

$$r \land \neg r \equiv 0$$
$$r \lor \neg r \equiv 1$$

doppelte Negation:

$$\neg\neg r \equiv r$$

Weitere nützliche Äquivalenzen:

$$r \to s \equiv \neg r \lor s$$
$$r \to s \equiv \neg(r \land \neg s)$$

$$r \leftrightarrow s \equiv (r \land s) \lor (\neg r \land \neg s)$$

$$r \to (s \land t) \equiv (r \to s) \land (r \to t)$$
$$r \to (s \lor t) \equiv (r \to s) \lor (r \to t)$$

$$(r \land s) \to t \equiv (r \to t) \lor (s \to t)$$
$$(r \lor s) \to t \equiv (r \to t) \land (s \to t)$$

Logik – Äquivalenzen mit Quantoren

Wie können wir eine Aussage mit Quantoren negieren?

Satz:

Für beliebige Prädikate $P(x), Q(x), R(x,y)$ gelten die folgenden Äquivalenzen:

$$\neg(\forall x : P(x)) \equiv \exists x : \neg P(x)$$
$$\neg(\exists x : P(x)) \equiv \forall x : \neg P(x)$$

$$(\forall x : P(x)) \wedge (\forall x : Q(x)) \equiv \forall x : (P(x) \wedge Q(x))$$
$$(\exists x : P(x)) \vee (\exists x : Q(x)) \equiv \exists x : (P(x) \vee Q(x))$$

$$\forall x : (\forall y : R(x,y)) \equiv \forall y : (\forall x : R(x,y))$$
$$\exists x : (\exists y : R(x,y)) \equiv \exists y : (\exists x : R(x,y))$$

Bei $\forall x$ / $\exists x$ fehlt der Bereich, aus dem x kommt.
Für die Übersichtlichkeit so geschrieben.
Wir denken uns $\forall x \in M$ / $\exists x \in M$ an diesen Stellen.

Achtung:

Im Allgemeinen sind die folgenden Aussagen **nicht** äquivalent!

$$(\forall x : P(x)) \vee (\forall x : Q(x)) \not\equiv \forall x : (P(x) \vee Q(x))$$
$$(\exists x : P(x)) \wedge (\exists x : Q(x)) \not\equiv \exists x : (P(x) \wedge Q(x))$$

$$\forall x : \exists y : R(x,y) \not\equiv \exists y : \forall x : R(x,y)$$

Bei voneinander unabhängigen Aussagen können die Quantoren zusammen gezogen werden:

$$(\forall x : P(x)) \wedge (\forall y : Q(y)) \equiv \forall x : \forall y : (P(x) \wedge Q(y))$$
$$(\forall x : P(x)) \vee (\forall y : Q(y)) \equiv \forall x : \forall y : (P(x) \vee Q(y))$$

$$(\exists x : P(x)) \wedge (\exists y : Q(y)) \equiv \exists x : \exists y : (P(x) \wedge Q(y))$$
$$(\exists x : P(x)) \vee (\exists y : Q(y)) \equiv \exists x : \exists y : (P(x) \vee Q(y))$$