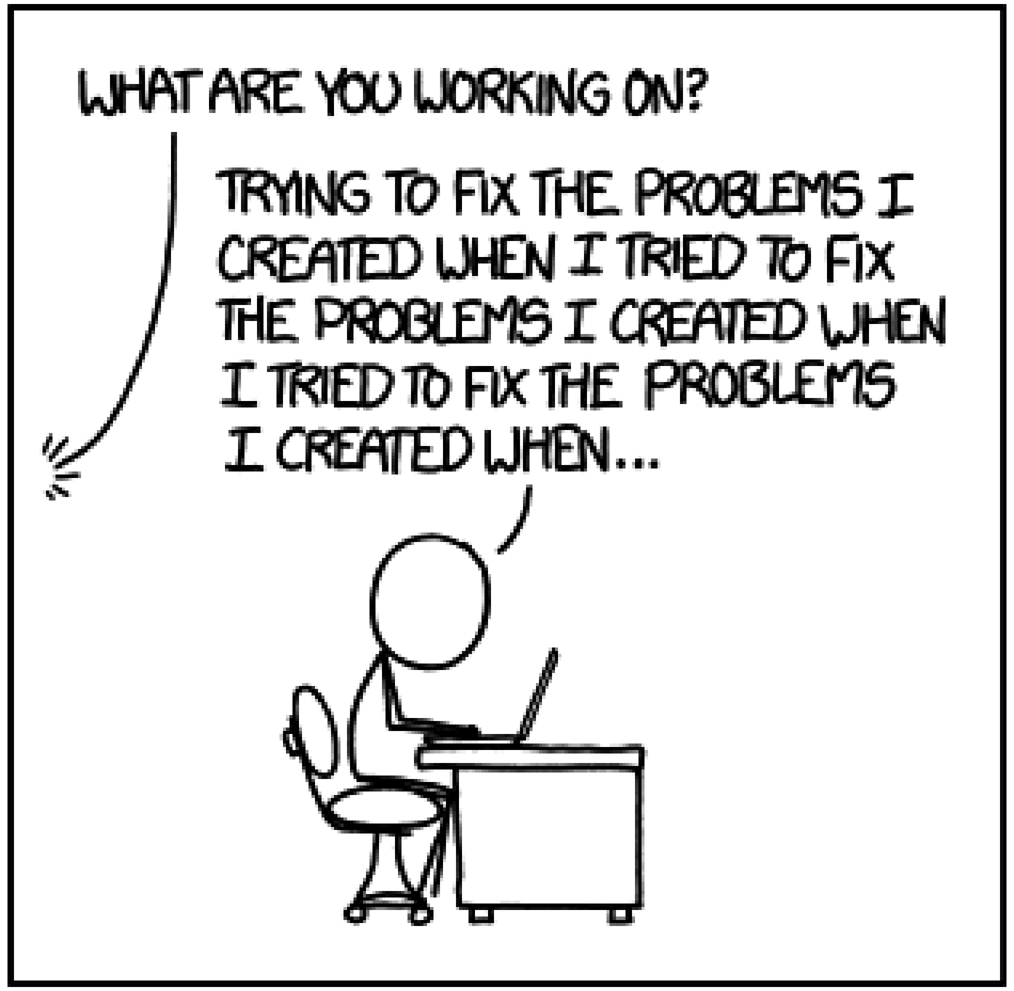
Freie Universität Berlin

Brückenkurs Mathematik für Studienanfänger:innen der Informatik und Mathematik

Rekursion



Jonas Cleve, Freie Universität Berlin

03. – 14. April 2023

Rekursion – Kuchen schneiden

Wir können einen Kuchen mit geraden Schnitten zerteilen.

Wir wollen viele Stücke mit wenigen Schnitten bekommen.

Sei $t(s)$ die Anzahl der Stücke, die wir mit s Schnitten bekommen können. Es ist $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Ohne einen Schnitt gibt es 1 Stück: $t(0) = 1$.

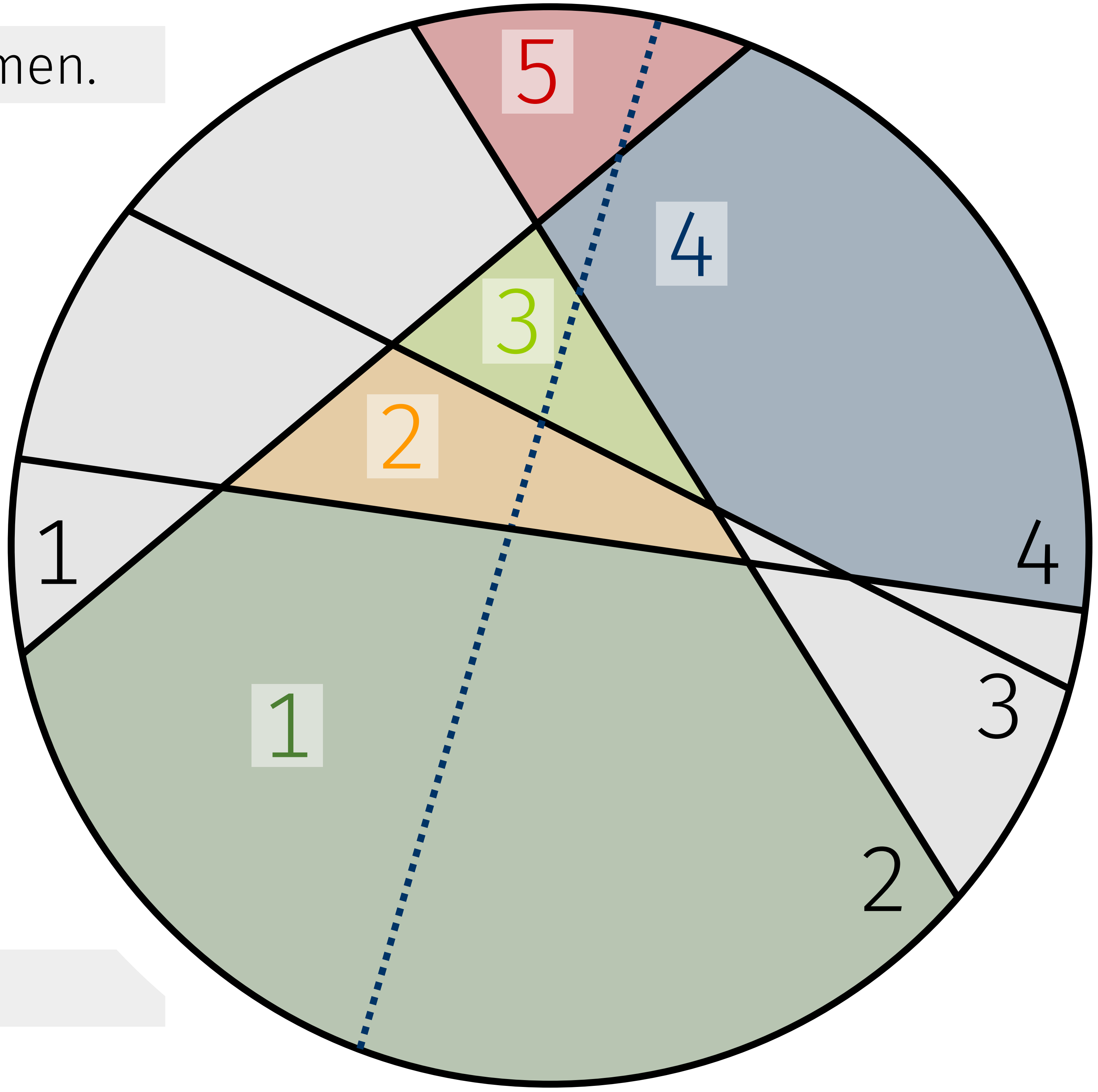
Mit einem Schnitt gibt es 2 Stücke: $t(1) = 2$.

Ein Schnitt erzeugt möglichst viele neue Stücke, wenn er durch alle bisherigen Schnitte geht.

Bei k existierenden Schnitten, zerteilt ein solcher Schnitt genau $k + 1$ Stücke.

Dadurch wächst die Anzahl der Stücke um genau $k + 1$.

Wenn nach $s - 1$ Schnitten a viele Stücke existieren, so existieren nach dem s-ten Schnitt genau $a + s$ Stücke.



Rekursion – Kuchen schneiden

Sei $t(s)$ die Anzahl der Stücke, die wir mit s Schnitten bekommen können. Es ist $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Ohne einen Schnitt gibt es 1 Stück: $t(0) = 1$.

Wenn nach $s - 1$ Schnitten a viele Stücke existieren, so existieren nach dem s-ten Schnitt genau $a + s$ Stücke.

Wir wissen aber, dass wir nach $s - 1$ Schnitten $t(s - 1)$ viele Stücke bekommen können.

Also sind es nach s Schnitten $t(s - 1) + s$.

Dies hatten wir ja als $t(s)$ bezeichnet.

Also ist $t(s) = t(s - 1) + s$.

Beim Lösen des Problems, beziehen wir uns wieder auf die Lösung, aber für eine kleinere Version des Problems.

Dieses Prinzip Probleme zu lösen heißt

Rekursion

Eine rekursive Problemlösung benötigt

- eine *Rekursionsgleichung*, die einen Bezug auf ein kleineres Problem hat
  Hier: $t(s) = t(s - 1) + s$
- einen *Rekursionsanfang*, der sagt wann wir aufhören können.
  Hier: $t(0) = 1$

Überprüfung für $s = 4$:

$$\begin{aligned} s(4) &= s(3) + 4 = s(2) + 3 + 4 \\ &= s(1) + 2 + 3 + 4 = s(0) + 1 + 2 + 3 + 4 \\ &= 1 + 1 + 2 + 3 + 4 = 11 \end{aligned}$$

Rekursion – Permutationen

Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es n verschiedene Personen hintereinander aufzustellen?

Eine Person hat nur eine Möglichkeit: ●

Zwei Personen haben zwei Möglichkeiten: ● ■   ■ ●

Drei Personen haben sechs Möglichkeiten: ● ■ ×   ● × ■   × ● ■   × ■ ●   ■ ● ×   ■ × ●

Wenn schon $n-1$ Personen stehen, wie viele verschiedene Plätze gibt es für die n-te Person?

		1		2		3		4				$n-2$		$n-1$	
Vor der 1. Person	●	×		×		×		×		…		×		×	
Hinter der 1. Person		×	●	×		×		×		…		×		×	
Hinter der 2. Person		×		×	●	×		×		…		×		×	
⋮						⋮							⋮		
Hinter der $(n-2)$-ten Person		×		×		×		×		…		×	●	×	
Hinter der $(n-1)$-ten Person		×		×		×		×		…		×		×	●

Es gibt also n verschiedene Positionen für die n-te Person, pro Möglichkeit die $n-1$ anderen Personen auzufstellen.

Sei $a(n)$ mit $a : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$ die Gesamtzahl der Möglichkeiten.

Dann ist $a(n) = a(n-1) \cdot n$
Und $a(1) = 1$.

Überprüfung für $n = 3$:
$a(3) = a(2) \cdot 3 = a(1) \cdot 2 \cdot 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

Diese spezielle Funktion heißt Fakultät.
Man schreibt $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$