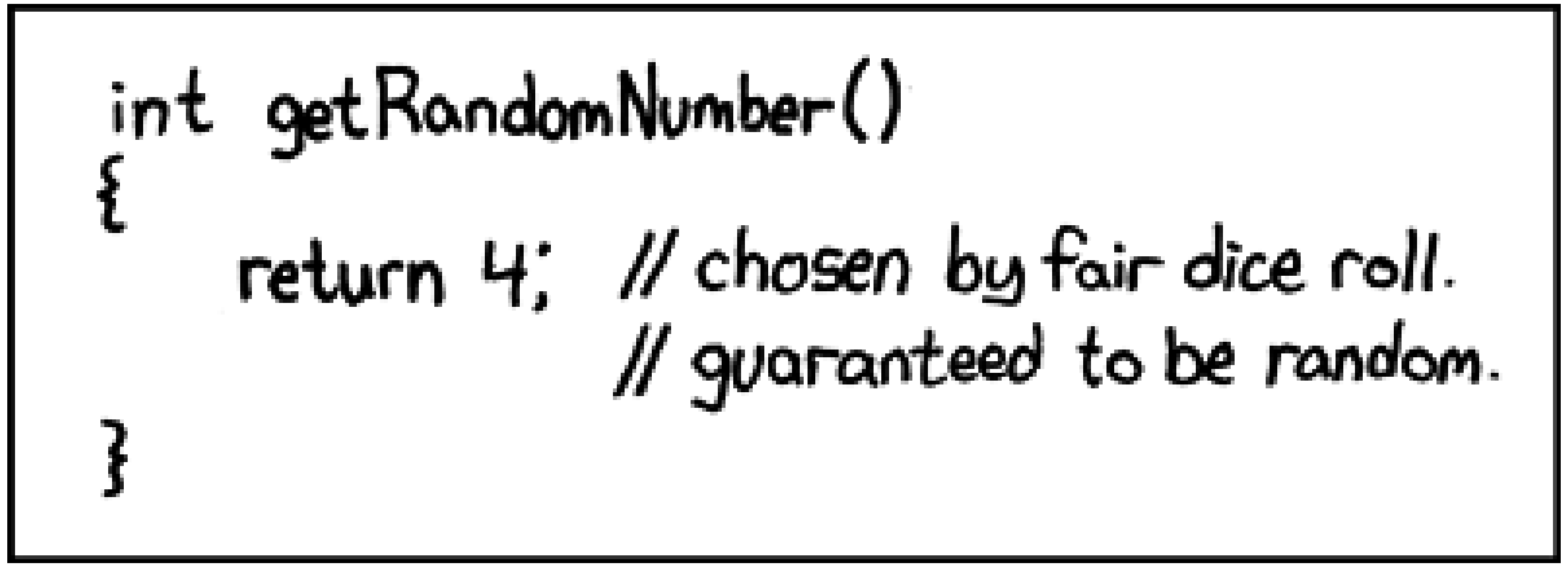
Freie Universität Berlin

Brückenkurs Mathematik für Studienanfänger:innen der Informatik und Mathematik

Funktionen



Jonas Cleve, Freie Universität Berlin

03. – 14. April 2023

Funktionen – Definition

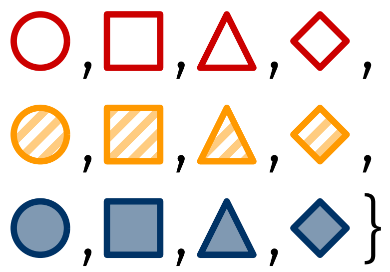
Freie Universität Berlin

Definition:

Eine *Funktion* (oder *Abbildung*) f von einer Menge A in eine Menge B ordnet jedem Element aus $a \in A$ *ein eindeutiges* Element $b \in B$ zu.

Können eine Funktion als eine Relation $f \subseteq A \times B$ sehen,
bei der es für jedes $a \in A$ *genau ein* $b \in B$ mit aRb gibt.

Wir schreiben $f : A \to B$ um zu sagen, dass f eine Funktion von A nach B ist.
Wir schreiben $f(a) = b$ um zu sagen, dass a der Wert b zugeordnet wird.
A ist der *Definitionsbereich* und B ist der *Wertebereich*.

Beispiel: $A = \{$  $\}$ $B = \{$  $\}$

$f : A \to B$ ist eine Funktion, die jedem Objekt seine Farbe zuweist.

zum Beispiel 

Funktionen – Definition

Definition:

Seien $f : A \to B$ und $M \subseteq A$ sowie $N \subseteq B$ gegeben.

Das *Bild* von M unter f ist die Menge $f(M) = \{y \in B \mid \exists x \in M : f(x) = y\} = \bigcup_{x \in M} \{f(x)\}$.

Das *Urbild* von N unter f ist die Menge $f^{-1}(N) = \{x \in A \mid f(x) \in N\}$.

Schreibweise wie $\bigcup_{i=1}^{n}$, nur dass wir keinen Platzhalter i haben, der von 1 bis n zählt. Wir werten den Ausdruck stattdessen für jedes Element x aus M aus. Wenn $M = \{1, 2, 3\}$, dann ist $\bigcup_{x \in M} \{f(x)\} = \{f(1)\} \cup \{f(2)\} \cup \{f(3)\} = \{f(1), f(2), f(3)\}$.

Beispiel: $A = \{\textcolor{red}{\bigcirc}, \textcolor{red}{\square}, \textcolor{red}{\triangle}, \textcolor{red}{\Diamond}, \textcolor{orange}{\bigcirc}, \textcolor{orange}{\square}, \textcolor{orange}{\triangle}, \textcolor{orange}{\Diamond}, \textcolor{blue}{\bullet}, \textcolor{blue}{\blacksquare}, \textcolor{blue}{\blacktriangle}, \textcolor{blue}{\blacklozenge}\}$ $\quad B = \{\textcolor{red}{\clubsuit}, \textcolor{orange}{\clubsuit}, \textcolor{blue}{\clubsuit}, \textcolor{green}{\clubsuit}\}$

$f : A \to B$ ist eine Funktion, die jedem Objekt seine Farbe zuweist.

zum Beispiel $\quad f(\textcolor{red}{\bigcirc}) = \textcolor{red}{\clubsuit} \quad f(\textcolor{blue}{\blacklozenge}) = \textcolor{blue}{\clubsuit} \quad f(\textcolor{orange}{\triangle}) = \textcolor{orange}{\clubsuit} \quad f(\textcolor{red}{\square}) = \textcolor{red}{\clubsuit}$

$f(\{\textcolor{red}{\triangle}, \textcolor{orange}{\Diamond}, \textcolor{red}{\square}\}) = \{\textcolor{red}{\clubsuit}, \textcolor{orange}{\clubsuit}\}$

$f(\{\textcolor{red}{\triangle}, \textcolor{red}{\bigcirc}, \textcolor{red}{\Diamond}\}) = \{\textcolor{red}{\clubsuit}\}$

$f(\{\textcolor{blue}{\blacksquare}, \textcolor{orange}{\triangle}, \textcolor{orange}{\bigcirc}, \textcolor{red}{\bigcirc}\}) = \{\textcolor{red}{\clubsuit}, \textcolor{orange}{\clubsuit}, \textcolor{blue}{\clubsuit}\}$ $\qquad f(A) = \{\textcolor{red}{\clubsuit}, \textcolor{orange}{\clubsuit}, \textcolor{blue}{\clubsuit}\}$

$f^{-1}(\{\textcolor{blue}{\clubsuit}, \textcolor{red}{\clubsuit}\}) = \{\textcolor{red}{\bigcirc}, \textcolor{red}{\square}, \textcolor{red}{\triangle}, \textcolor{red}{\Diamond}, \textcolor{blue}{\bullet}, \textcolor{blue}{\blacksquare}, \textcolor{blue}{\blacktriangle}, \textcolor{blue}{\blacklozenge}\}$

$f^{-1}(\{\textcolor{green}{\clubsuit}\}) = \emptyset$

$f^{-1}(\{\textcolor{blue}{\clubsuit}, \textcolor{green}{\clubsuit}\}) = \{\textcolor{blue}{\bullet}, \textcolor{blue}{\blacksquare}, \textcolor{blue}{\blacktriangle}, \textcolor{blue}{\blacklozenge}\}$ $\qquad f(B) = A$

Funktionen – Eigenschaften

Definition:

Eine Funktion $f : A \to B$ heißt *surjektiv*, falls jedes Element von B im Bild von A auftritt, also $f(A) = B$.

Eine Funktion $f : A \to B$ heißt *injektiv*, falls je zwei Elemente von A verschiedene Bilder haben, also
$\forall a, a' \in A : a \neq a' \to f(a) \neq f(a')$ oder auch $\forall a, a' \in A : f(a) = f(a') \to a = a'$.

Eine Funktion $f : A \to B$ heißt *bijektiv*, falls sie injektiv und surjektiv ist.

Beispiel:

$A = \{$○,□,△,◇,○,□,△,◇,●,■,▲,◆$\}$

$B = \{$, , , $\}$

$f : A \to B$ weist dem Objekt seine Farbe zu.

f ist *nicht surjektiv*, $\notin f(A)$.

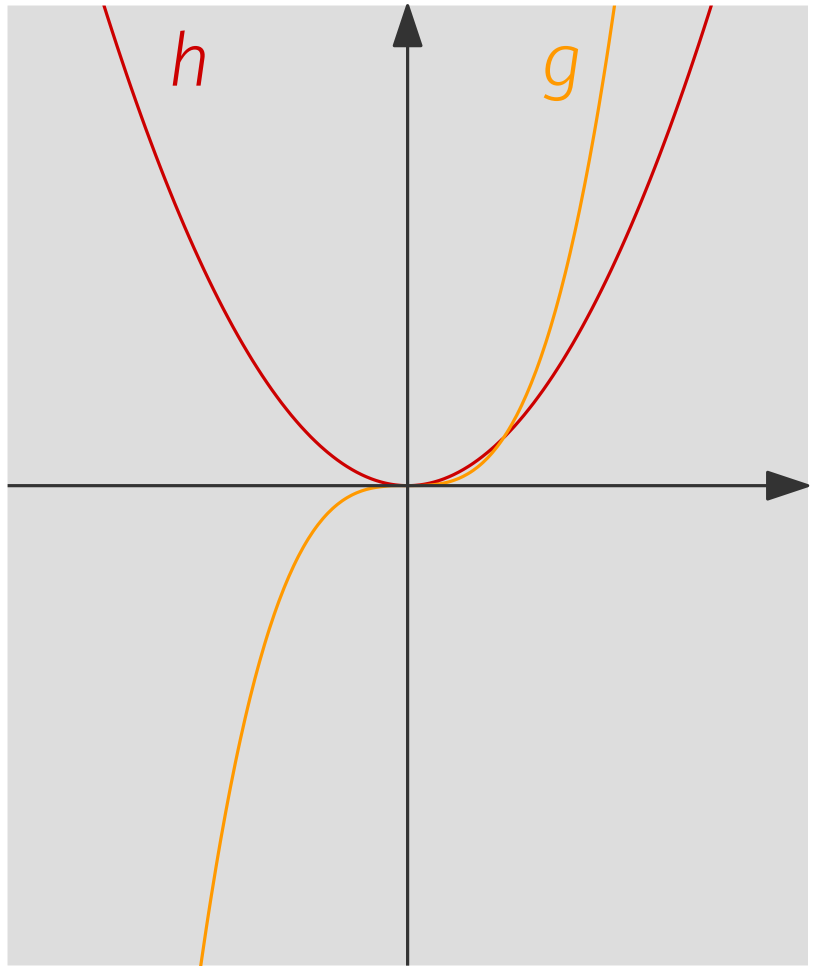
f ist *nicht injektiv*, $f($○$) = f($△$)$ aber ○ $\neq$ △.

f ist also auch *nicht bijektiv*.

$f : A \to B \setminus \{$ $\}$ ist surjektiv.

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = x^3$ ist *bijektiv* (sowohl surjektiv als auch injektiv).

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = x^2$ ist
– nicht surjektiv: $-1 \notin h(\mathbb{R})$
– nicht injektiv: $h(1) = h(-1)$



Funktionen – Eigenschaften

Definition:

Eine Funktion $f : A \to B$ heißt *surjektiv*, falls jedes Element von B im Bild von A auftritt, also $f(A) = B$.

Eine Funktion $f : A \to B$ heißt *injektiv*, falls je zwei Elemente von A verschiedene Bilder haben, also
$\forall a, a' \in A : a \neq a' \to f(a) \neq f(a')$ oder auch $\forall a, a' \in A : f(a) = f(a') \to a = a'$.

Eine Funktion $f : A \to B$ heißt *bijektiv*, falls sie injektiv und surjektiv ist.

Beispiel:

$A = \{\bigcirc, \square, \triangle, \diamond, \bigcirc, \square, \triangle, \diamond, \bigcirc, \square, \triangle, \diamond\}$

$B = \{\ ,\ ,\ ,\ \}$

$f : A \to B$ weist dem Objekt seine Farbe zu.

f ist *nicht surjektiv*, $\notin f(A)$.

f ist *nicht injektiv*, $f(\bigcirc) = f(\triangle)$ aber $\bigcirc \neq \triangle$.

f ist also auch *nicht bijektiv*.

$f : A \to B \setminus \{\ \}$ ist surjektiv.

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = x^3$ ist *bijektiv* (sowohl surjektiv als auch injektiv).

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = x^2$ ist
– nicht surjektiv: $-1 \notin h(\mathbb{R})$
– nicht injektiv: $h(1) = h(-1)$

$h' : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ mit $h'(x) = x^2$ ist *bijektiv* (sowohl surjektiv als auch injektiv).