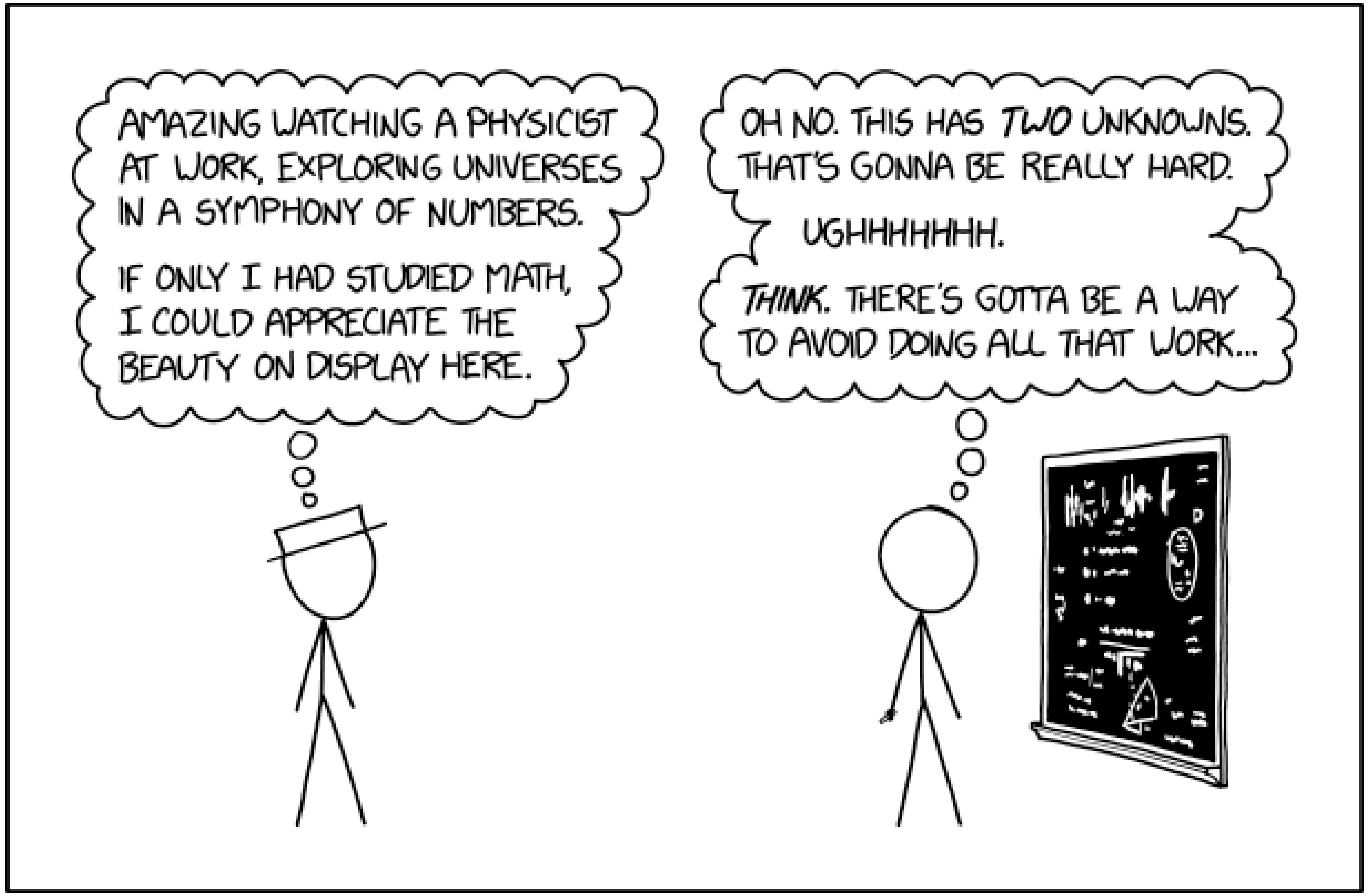
Brückenkurs Mathematik für Studienanfänger:innen der Informatik und Mathematik

Relationen



Jonas Cleve, Freie Universität Berlin

03. – 14. April 2023

Relationen – Kartesisches Produkt

Definition:

Eine *geordnetes Paar* (a, b) (auch *2-Tupel* genannt) ist ein Konstrukt, sodass $(a, b) = (c, d)$ genau dann, wenn $a = c$ und $b = d$.

Beispiele: $(3, 2) = (3, 2)$ $\quad (3, 2) \neq (2, 3)$ $\quad (3, 2) \neq (3, 3)$

Definition:

Das *kartesische Produkt* $A \times B$ von zwei Menge A und B ist die Menge aller geordneten Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$: $\quad A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$

Beispiele: $\{a, b, c\} \times \{1, 2\} = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$

$\{1, 2\} \times \{1, 2\} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$

Fakt: $A \times B$ hat $|A| \cdot |B|$ Elemente, wenn sowohl A als auch B endlich sind.

Relationen – Definition

Definition:

Eine Teilmenge R von $A \times B$ (also $R \subseteq A \times B$) wird *(binäre) Relation zwischen* A und B genannt.

Ist $(a, b) \in R$, sagen wir *a steht in Relation zu b*, kurz aRb.

Eine Teilmenge $R \subseteq A \times A$ wird *(binäre) Relation auf* A genannt.

Beispiele:

A: Studierende an der FU; B: Module; $R = \{(s, m) \mid \text{Studi } s \text{ hat Modul } m \text{ bestanden}\} \subseteq A \times B$

$| = \{(a, b) \in \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N} \mid \exists c \in \mathbb{N} : b = a \cdot c\}$ Teilbarkeit: $a|b$ (oder $(a, b) \in |$) wenn a ein Teiler von b ist.

$G = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a > b\} = \{(1, 0), (2, 0), \ldots, (2, 1), (3, 1), \ldots\}$

$K = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a < b\} = \{(0, 1), (0, 2), \ldots, (1, 2), (1, 3), \ldots\}$

$I = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a = b\} = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), \ldots\}$

Für alle $x, y \in \mathbb{N}$ ist damit $x > y$ das gleiche wie $(x, y) \in G$ oder auch xGy.

$$x > y \equiv (x, y) \in G \equiv xGy$$

$I = Id_{\mathbb{N}}$, die identische Relation auf $\mathbb{N}$

Besondere Relationen:

$\emptyset \subseteq A \times B$	leere Relation
$A \times B$	Allrelation
$\{(a, a) \mid a \in A\}$	Identische Relation auf A (auch Id_A genannt)

Relationen – Operationen I

Da Relationen Mengen sind, können wir die bekannten Mengenoperationen anwenden.
Seien dafür die Relationen $R, S \subseteq A \times B$ gegeben.

- Die Mengenoperationen $R \cap S$, $R \cup S$, $\overline{R}$, $R \setminus S$ und $R \oplus S$ führen zu neuen Relation zwischen A und B
  (Das Komplement $\overline{R} = (A \times B) \setminus R$ bezieht sich entsprechend auf das Universum $A \times B$)

Beispiele: Betrachte Vergleichsoperationen $<, \leq, >, \geq, =$ als Relationen $R_<$, $R_\leq$, $R_>$, $R_\geq$, $R_=$

$R_\leq = R_< \cup R_=$	$a \leq b \equiv a < b \vee a = b$
$R_= = R_\leq \cap R_\geq$	$a = b \equiv a \leq b \wedge a \geq b$
$R_> = \overline{R_\leq}$	$a > b \equiv \neg(a \leq b)$

- Die *inverse Relation* $R^{-1} \subseteq B \times A$ zu $R \subseteq A \times B$ ist definiert als
  $$R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in R\}$$

Beispiele:

$R_< = R_>^{-1}$	$a < b \equiv b > a$
$R_= = R_=^{-1}$	$a = b \equiv b = a$

Relationen – Operationen II

Seien die Relationen $R \subseteq A \times B$ und $T \subseteq B \times C$ gegeben.

– Die *Verkettung* oder *Komposition* $R \circ T \subseteq A \times C$ ist definiert als

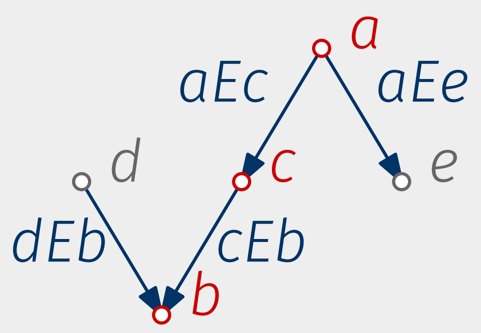
$$R \circ T = \{(a,c) \in A \times C \mid \exists b \in B : (a,b) \in R \wedge (b,c) \in T\}$$

Beispiele: Sei M die Menge aller Menschen.

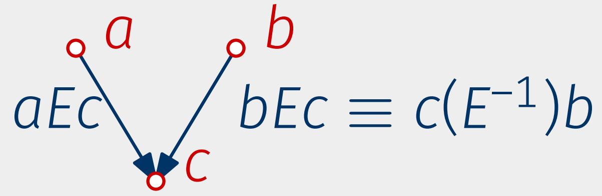
Sei $E \subseteq M \times M$ die Elternrelation: aEb (oder $(a,b) \in E$) wenn a Elternteil von b ist.

E^{-1} ist die Kindrelation; $a(E^{-1})b$ wenn a Kind von b ist.

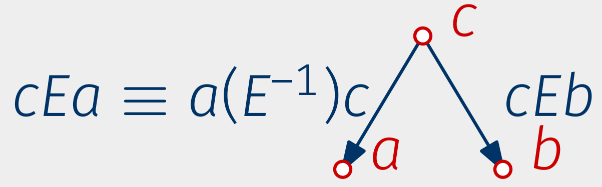
$E \circ E$ ist die Großelternrelation; $a(E \circ E)b$ wenn a Großelter von b ist, also wenn ein Mensch c existiert, sodass a Elternteil von c ist und c Elternteil von b ist.



$E \circ E^{-1}$ ist die Gemeinsames-Kind-Relation; $a(E \circ E^{-1})b$ wenn a und b ein gemeinsames Kind haben. Hat a ein Kind, so ist aber auch $a(E \circ E^{-1})a$.



$E^{-1} \circ E$ ist die (Halb-)Geschwister-Relation; $a(E^{-1} \circ E)b$ wenn a und b ein gemeinsames Elternteil haben. Wenn a ein Elternteil hat, ist auch $a(E^{-1} \circ E)a$.



Relationen – Operationen II

Seien die Relationen $R \subseteq A \times B$ und $T \subseteq B \times C$ gegeben.

– Die *Verkettung* oder *Komposition* $R \circ T \subseteq A \times C$ ist definiert als

$$R \circ T = \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B : (a, b) \in R \land (b, c) \in T\}$$

Beispiele: Betrachte Vergleichsoperationen <, ≤, >, ≥, = als Relationen $R_<$, $R_\leq$, $R_>$, $R_\geq$, $R_=$ auf $\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} R_< \circ R_< &= \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \exists c \in \mathbb{N} : a < c \land c < b\} \\ &= \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a + 1 < b\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_= \circ R_= &= \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \exists c \in \mathbb{N} : a = c \land c = b\} \\ &= \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a = b\} = R_= \end{aligned}$$

$$\rightarrow R_= \circ R_= \circ \ldots \circ R_= = R_=$$

$$\begin{aligned} R_< \circ R_> &= \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \exists c \in \mathbb{N} : a < c \land c > b\} \\ &= \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 1\} = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_> \circ R_< &= \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \exists c \in \mathbb{N} : a > c \land c < b\} \\ &= \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a > 0 \land b > 0\} = \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+ \end{aligned}$$

Relationen – Eigenschaften

Wir definieren verschiedene Eigenschaften für Relationen *auf* Mengen: Sei $R \subseteq A \times A$ eine Relation.

R ist	wenn $\forall a, b, c \in A$ gilt	oder gilt	Bsp. mit der Eigenschaft	Bsp. ohne die Eigenschaft
reflexiv	aRa	$Id_A \subseteq R$	$\leq$ $(x \leq x)$ ✓	$<$ $(5 < 5)$ ✗
symmetrisch	$aRb \to bRa$ $(aRb \leftrightarrow bRa)$	$R = R^{-1}$	$\neq$ $(x \neq y \to y \neq x)$ ✓	$<$ $(2 < 6 \to 6 < 2)$ ✗
transitiv	$aRb \wedge bRc \to aRc$	$R \circ R \subseteq R$	$<$ $(x < y \wedge y < z \to x < z)$ ✓	$\neq$ $(3 \neq 5 \wedge 5 \neq 3 \to 3 \neq 3)$ ✗
antisymmetrisch	$aRb \wedge bRa \to a = b$	$R \cap R^{-1} \subseteq Id_A$	$\leq$ $(x \leq y \wedge y \leq x \to x = y)$ ✓ $<$ $(x < y \wedge y < x \to x = y)$ ✓	$\neq$ $(3 \neq 5 \wedge 5 \neq 3 \to 3 = 5)$ ✗
asymmetrisch	$aRb \to \neg(bRa)$	$R \cap R^{-1} = \emptyset$	$<$ $(x < y \to \neg(y < x))$ ✓	$=$ $(x = y \to \neg(y = x))$ ✗

Die zuvor definierte Elternrelation ist:
nicht reflexiv (niemand ist sein eigenes Elternteil)
nicht symmetrisch (Person a ist nicht gleichzeitig Kind und Elternteil von Person b)
nicht transitiv (ein Großelternteil ist nicht ein Elternteil)
antisymmetrisch (Teil vor der Implikation ist immer 0)
asymmetrisch (das Kind eines Elternteils kann nicht Elternteil seines Elternteils sein)

Relationen – Äquivalenzrelationen

Freie Universität Berlin

Es gibt eine spezielle Art von Relation, die uns immer wieder begegnen wird.
Wir wollen oft Dinge, die „irgendwie gleich“ sind, zueinander in Relation setzen.

Definition:

Eine Relation R auf A (also $R \subseteq A \times A$) wird *Äquivalenzrelation* genannt, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Beispiele:

– Die identische Relation Id_A ist eine Äquivalenzrelation. Sie ist aber auch wenig interessant.

– $M \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit aMb wenn a und b beim Teilen durch 5 den gleichen Rest haben (a mod 5 = b mod 5).

1) M ist reflexiv: aMa $a \bmod 5 = a \bmod 5$ ✓
2) M ist symmetrisch: $aMb \rightarrow bMa$ $a \bmod 5 = b \bmod 5 \rightarrow b \bmod 5 = a \bmod 5$ ✓
3) M ist transitiv: $aMb \wedge bMc \rightarrow aMc$ $a \bmod 5 = b \bmod 5 \wedge b \bmod 5 = c \bmod 5 \rightarrow a \bmod 5 = c \bmod 5$ ✓

– Relation T auf Personen, einer Teamsportart. aTb wenn a und b im selben Team sind. Niemand ist in 2 Teams.

1) T ist reflexiv: Eine Person ist im selben Team wie sie selbst.
2) T ist symmetrisch: Reihenfolge bei „sind im selben Team“ ist egal.
3) T ist transitiv: Sind a und b im selben Team sowie b und c im selben Team, dann sind auch a und c im selben Team.

Relationen – Äquivalenzklassen I

Definition:

Ist $R \subseteq A \times A$ eine *Äquivalenzrelation* und $a \in A$, dann bezeichnen wir mit $[a]_R$ alle Elemente aus A, mit denen a in Relation steht. Wir nennen dies die *Äquivalenzklasse* von a und definieren es als:

$[a]_R = \{x \in A \mid aRx\}$

Ein beliebiges Element einer Äquivalenzklasse wird *Repräsentant* der Äquivalenzklasse genannt.

Beispiele:

- $M \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit aMb wenn a und b beim Teilen durch 5 den gleichen Rest haben ($a \bmod 5 = b \bmod 5$).
  - $[3]_M = \{3, 8, 13, \ldots\} = [13]_M$ Alle Zahle, die beim Teilen durch 5 den gleichen Rest haben wie 13. Also alle $x \in \mathbb{N}$ mit $x \bmod 5 = 3$.
  - $[2]_M = \{2, 7, 12, \ldots\} = [97]_M$ Alle Zahle, die beim Teilen durch 5 den gleichen Rest haben wie 97. Also alle $x \in \mathbb{N}$ mit $x \bmod 5 = 2$.

$$\begin{array}{rccccc}
 & [0]_M & [1]_M & [2]_M & [3]_M & [4]_M \\
 & = & = & = & = & = \\
\mathbb{N} = \{ & \boxed{\begin{array}{r}0,\\5,\\10,\\15,\end{array}} & \boxed{\begin{array}{r}1,\\6,\\11,\\16,\end{array}} & \boxed{\begin{array}{r}2,\\7,\\12,\\17,\end{array}} & \boxed{\begin{array}{r}3,\\8,\\13,\\18,\end{array}} & \boxed{\begin{array}{r}4,\\9,\\14,\\19,\end{array}} \\
 & \ldots & & & &
\end{array}$$

- Relation T auf Personen einer Teamsportart mit aTb wenn a und b im selben Team sind.
  - Für s ist $[s]_T$ die Menge aller Personen im gleichen Team wie s.

Relationen – Äquivalenzklassen II

Lemma:

Sei $R \subseteq A \times A$ eine Äquivalenzrelation auf A. Zwei Äquivalenzklassen $[a]_R$ und $[b]_R$ sind entweder gleich oder disjunkt. Sie sind gleich genau dann, wenn aRb gilt.

Beweis:

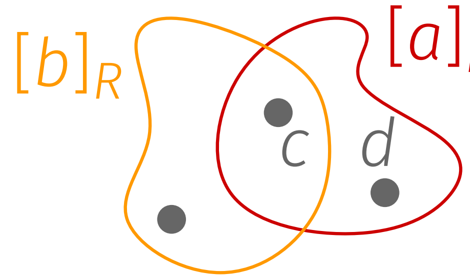
Zu beweisende Aussage (Teil 1): Für alle Mengen A und alle Relationen $R \subseteq A \times A$ gilt:

(„ÄR“ kurz für Äquivalenzrelation) R ist ÄR $\rightarrow \forall a, b \in A$ mit $a \neq b : [a]_R = [b]_R \vee [a]_R \cap [b]_R = \emptyset$

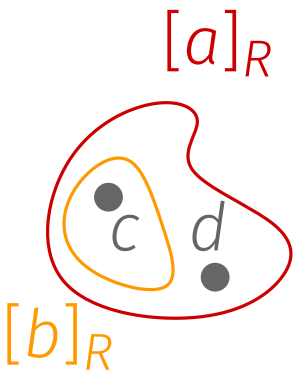
Beweis durch Widerspruch: $(R \text{ ist ÄR} \wedge \neg(\forall a \neq b \in A \text{ mit } a \neq b : [a]_R = [b]_R \vee [a]_R \cap [b]_R = \emptyset)) \rightarrow 0$

Angenommen R ist ÄR und es existieren $a, b \in A$ mit $a \neq b$ sodass $[a]_R \neq [b]_R$ und $[a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$.

Dann gibt es Elemente $c, d \in A$ mit $c \in [a]_R \cap [b]_R$ und $d \in [a]_R \setminus [b]_R$.



oder



Also:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} aRc \xrightarrow{\text{symmetrisch}} cRa \\ aRd \longrightarrow \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{transitiv}} cRd \\ bRc \longrightarrow \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{transitiv}} bRd \quad ↯$$

$\neg(bRd)$

bRd und $\neg(bRd)$ ist nicht möglich

Relationen – Äquivalenzklassen II

Lemma:

Sei $R \subseteq A \times A$ eine Äquivalenzrelation auf A. Zwei Äquivalenzklassen $[a]_R$ und $[b]_R$ sind entweder gleich oder disjunkt. Sie sind gleich genau dann, wenn aRb gilt.

Beweis:

Zu beweisende Aussage (Teil 2): $[a]_R = [b]_R \leftrightarrow aRb \quad \equiv ([a]_R = [b]_R \to aRb) \wedge (aRb \to [a]_R = [b]_R)$

Es reicht also einzeln $[a]_R = [b]_R \to aRb$ und $aRb \to [a]_R = [b]_R$ zu zeigen.

Zuerst zeigen wir $[a]_R = [b]_R \to aRb$.

R ist reflexiv, also ist $b \in [b]_R$. $\to$ Da $[a]_R = [b]_R$ ist, ist also auch $b \in [a]_R$.

$[a]_R$ ist definiert als $[a]_R = \{x \in A \mid aRx\}$. $\to$ Da $b \in [a]_R$ muss also auch aRb gelten.

Jetzt zeigen wir $aRb \to [a]_R = [b]_R$.

Aus aRb folgt, dass $b \in [a]_R$. $\to$ Da R reflexiv ist, gilt auch $b \in [b]_R$.

$\to$ Also ist $b \in [a]_R \cap [b]_R$. $\to$ Dann sind $[a]_R$ und $[b]_R$ nicht disjunkt.

$\to$ Wir haben schon bewiesen, dass dann $[a]_R = [b]_R$ gelten muss.

$\square$

Relationen – Äquivalenzklassen III

Satz:

Sei $R \subseteq A \times A$ eine Äquivalenzrelation auf A. Dann bildet die Menge aller Äquivalenzklassen eine Partition von A.

Beispiele:

- $M \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit aMb wenn a und b beim Teilen durch 5 den gleichen Rest haben ($a \bmod 5 = b \bmod 5$).
  - M hat genau 5 Äquivalenzklassen, die die natürlichen Zahlen in 5 Mengen partitionieren (Rest 0, 1, 2, 3 und 4)

$$\begin{array}{cccccc} & [0]_M & [1]_M & [2]_M & [3]_M & [4]_M \\ & = & = & = & = & = \\ \mathbb{N} = \{ & 0, & 1, & 2, & 3, & 4, \\ & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, \\ & 10, & 11, & 12, & 13, & 14, \\ & 15, & 16, & 17, & 18, & 19, \\ & \ldots & & & & \end{array}$$

- Relation T auf Personen einer Teamsportart mit aTb wenn a und b im selben Team sind. Jede Person ist in genau einem Team.
  - Eine Äquivalenzklasse entspricht genau einem Team.
  - Die Teams partitionieren die Menge aller Personen der Sportart.