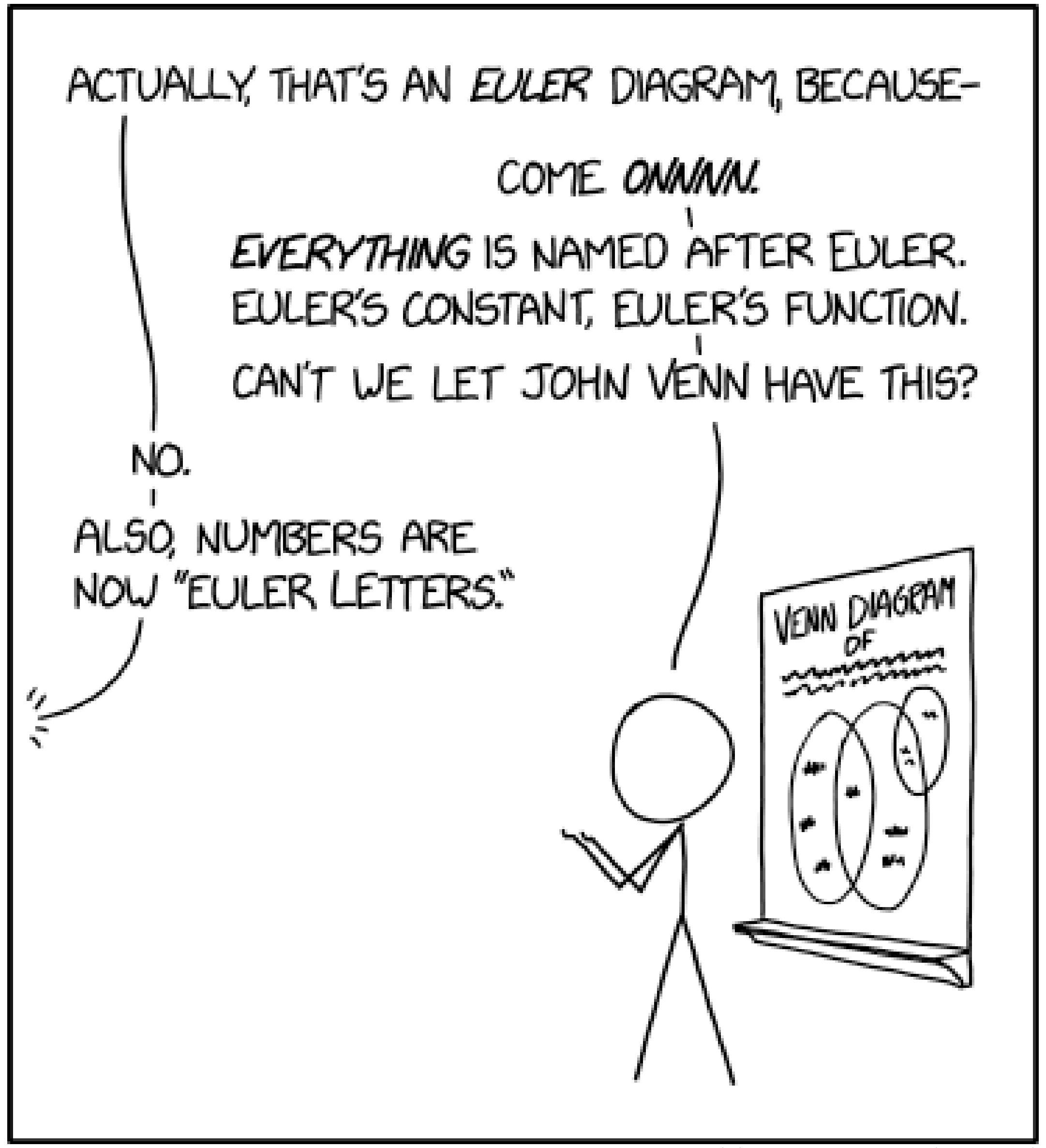
Brückenkurs Mathematik für Studienanfänger:innen der Informatik und Mathematik

Mengen



Jonas Cleve, Freie Universität Berlin

03. – 14. April 2023

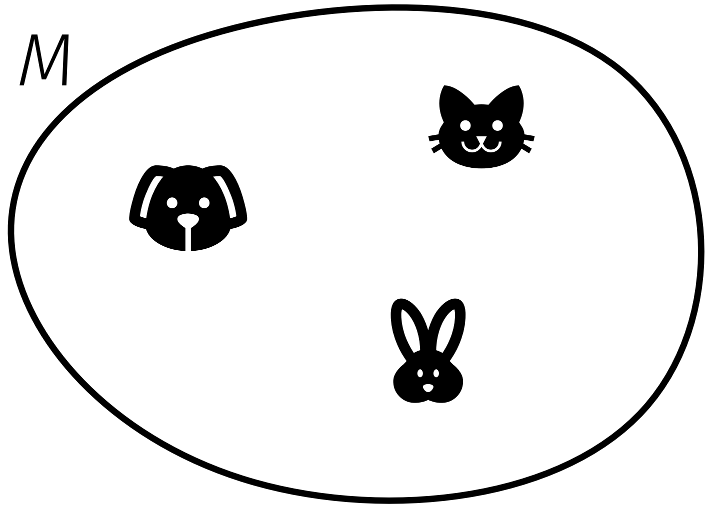
Mengen – Grundlagen I

Definition:

Eine *Menge* ist eine Sammlung von *unterscheidbaren* Objekten (*Elemente* genannt).

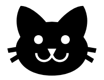
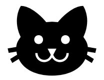
Beispiel:

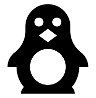
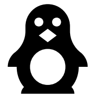
M



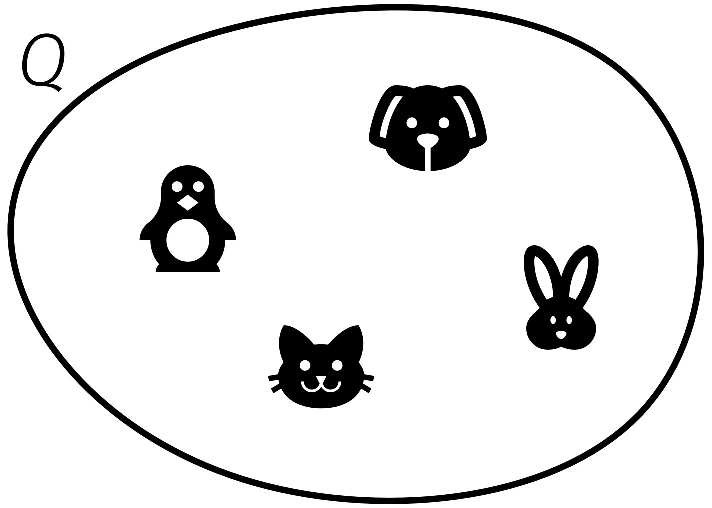
M ist eine Menge von Haustieren

Die Anzahl der Elemente ist $|M| = 3$

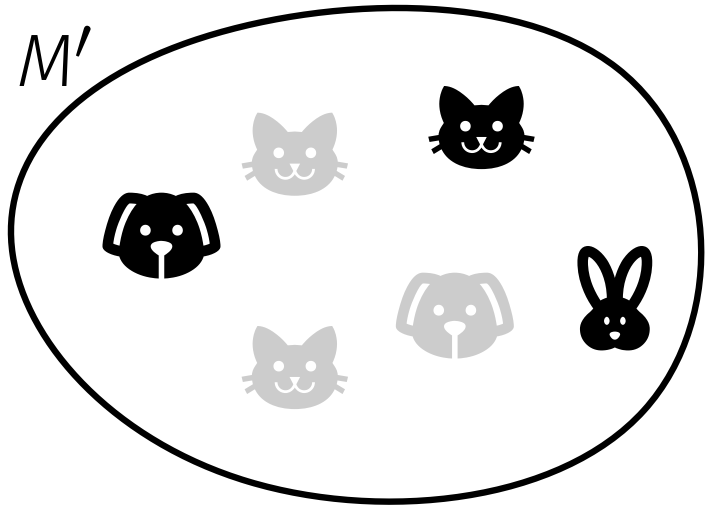
 $\in M$:  ist in der Menge M enthalten

 $\notin M$:  ist nicht in der Menge M enthalten

Q



M'



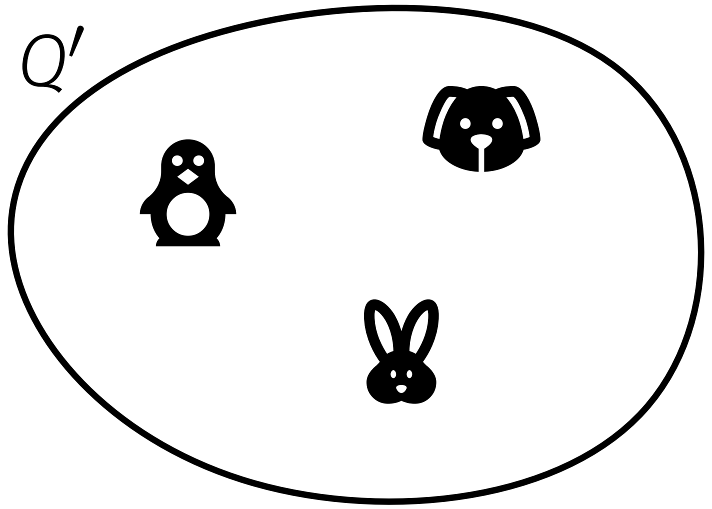
M' enthält nur 3 *verschiedene* Objekte

Wie oft ein Element vorkommt ist Mengen egal!

$M' = M$ also auch $|M'| = 3$

Aber $M \neq Q$, $M \neq Q'$ und $Q \neq Q'$

Q'



Mengen – Grundlagen II

Darstellung von Mengen erfolgt in der Regel

– als Auflistung der Elemente:

$Q = \{1, 2, 7, 9\} = \{7, 9, 1, 2\} = \{7, 7, 9, 2, 1\}$

Reihenfolge und Anzahl ist egal

$Z = \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$

Auslassung okay, wenn klar ist, was fehlt

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$

Natürliche Zahlen

$G = \{0, 2, 4, \ldots\}$

Gerade natürliche Zahlen

unendlich groß

– mittels Prädikaten: (Zermelo-Fraenkel-Notation)

$G = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist gerade}\}$

„alle natürlichen Zahlen, die gerade sind“

$M = \{x \in \mathcal{U} \mid P(x)\}$

„alle Elemente aus $\mathcal{U}$ für die das Prädikat P `wahr` ist“

$\mathcal{U}$ ist hier die *Grundmenge* / das *Universum*

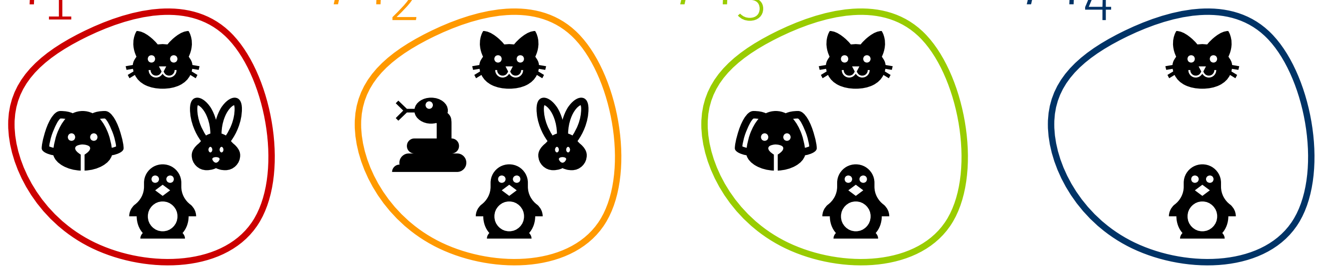
Zwei Mengen A und B sind gleich ($A = B$), wenn sie genau die gleichen Elemente beinhalten.

Formaler, wenn gilt: $x \in A \leftrightarrow x \in B$

Eine Menge A ist *Teilmenge* einer Menge B (geschrieben $A \subseteq B$), wenn jedes Element in A auch in B vorkommt.
(B kann aber zusätzliche Elemente beinhalten.)

Formaler, wenn gilt: $x \in A \rightarrow x \in B$

Beispiel: M_1 M_2 M_3 M_4



$M_4 \subseteq M_3$ $M_4 \subseteq M_2$ $M_4 \subseteq M_1$ $M_3 \subseteq M_1$ $M_3 \nsubseteq M_2$

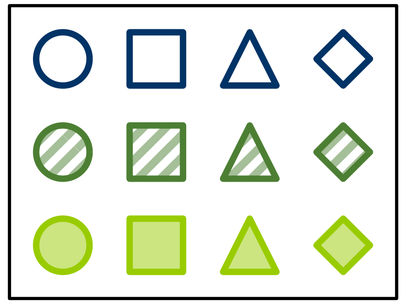
$M_2 \nsubseteq M_1$ $M_1 \nsubseteq M_2$ $M_1 \neq M_2$

Mengen – Definitionen & Operationen

Gegeben sei das Universum $\mathcal{U}$:

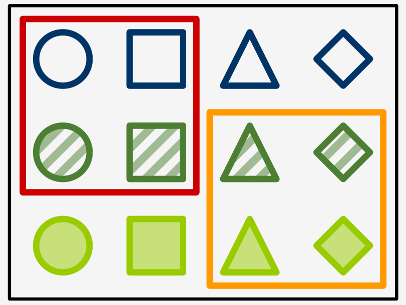
$|\mathcal{U}| = 12$

$A \subseteq \mathcal{U}$ und $B \subseteq \mathcal{U}$



Mengen A und B sind **disjunkt** wenn sie keine gemeinsamen Elemente haben.

$A \cap B = \emptyset$ ist dann wahr

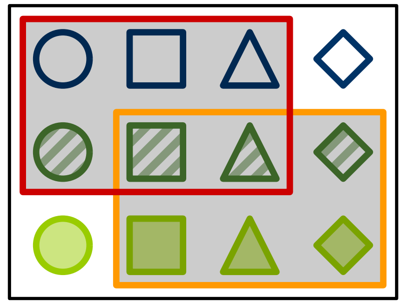


Vereinigung $A \cup B$:

„A vereinigt (mit) B“

alle Elemente in A *oder* B

$A \cup B = \{x \in \mathcal{U} \mid x \in A \vee x \in B\}$



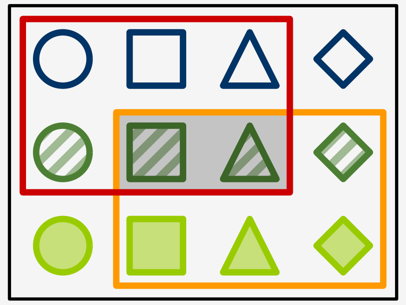
$A \cup B$

(Durch-)Schnitt $A \cap B$:

„A geschnitten (mit) B“

alle Elemente in A *und* B

$A \cap B = \{x \in \mathcal{U} \mid x \in A \wedge x \in B\}$



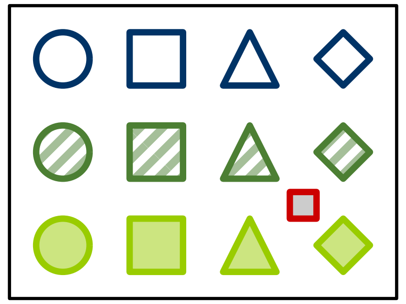
$A \cap B$

Leere Menge $\emptyset$:

eine Menge ohne Elemente

$\emptyset = \{\}$

$\emptyset$

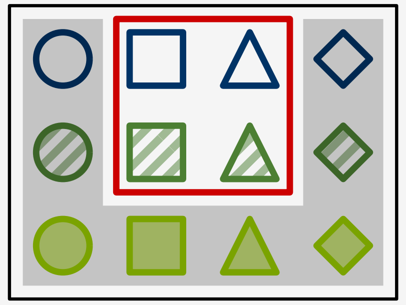


Komplement $\overline{A}$ einer Menge A:

immer bezüglich des Universums

alle Elemente nicht in A

$\overline{A} = \{x \in \mathcal{U} \mid x \notin A\} = \mathcal{U} \setminus A$



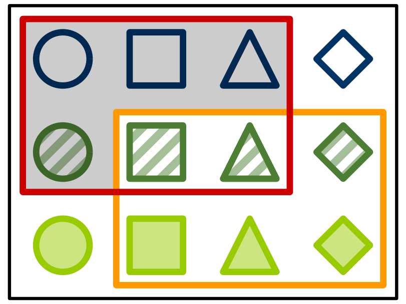
$\overline{A}$

Differenz $A \setminus B$:

„A ohne B“

alle Elemente in A *und nicht* in B

$A \setminus B = \{x \in \mathcal{U} \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

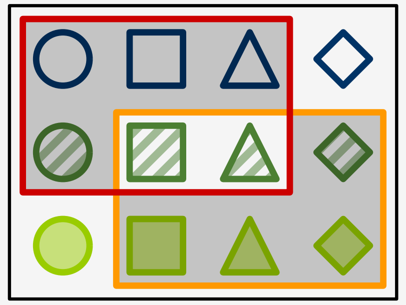


$A \setminus B$

Symmetrische Differenz $A \oplus B$:

alle Elemente *entweder* in A *oder* in B

$A \oplus B = \{x \in \mathcal{U} \mid x \in A \oplus x \in B\}$



$A \oplus B$

Mengen – Zusammenhang Mengen & Logik

Gegeben ein Universum $\mathcal{U}$ und zwei Mengen $A \subseteq \mathcal{U}$ und $B \subseteq \mathcal{U}$.

	Mengen			Logik	
Aussagen	Gleichheit	$A = B$	$\equiv$	$\forall x \in \mathcal{U} : x \in A \leftrightarrow x \in B$	Äquivalenz
	Teilmenge / Inklusion	$A \subseteq B$	$\equiv$	$\forall x \in \mathcal{U} : x \in A \rightarrow x \in B$	Implikation
Mengen	Komplement	$\overline{A}$	$=$	$\{x \in \mathcal{U} \mid \neg(x \in A)\}$	Negation
	Vereinigung	$A \cup B$	$=$	$\{x \in \mathcal{U} \mid x \in A \vee x \in B\}$	Disjunktion
	Schnitt	$A \cap B$	$=$	$\{x \in \mathcal{U} \mid x \in A \wedge x \in B\}$	Konjunktion
	symmetrische Differenz	$A \oplus B$	$=$	$\{x \in \mathcal{U} \mid x \in A \oplus x \in B\}$	Antivalenz
	Universum	$\mathcal{U}$	$=$	$\{x \in \mathcal{U} \mid 1\}$	`wahr`
	Leere Menge	$\emptyset$	$=$	$\{x \in \mathcal{U} \mid 0\}$	`falsch`

Mengen – Äquivalenzregeln

Wegen des Mengen-Logik-Zusammenhangs können wir die bekannten Äquivalenzen übertragen:

Logik	Mengen	Logik	Mengen
Assoziativität: $(r \wedge s) \wedge t \equiv r \wedge (s \wedge t)$ $(r \vee s) \vee t \equiv r \vee (s \vee t)$	Assoziativität: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	Kommutativität: $r \wedge s \equiv s \wedge r$ $r \vee s \equiv s \vee r$	Kommutativität: $A \cap B = B \cap A$ $A \cup B = B \cup A$
Distributivität: $r \wedge (s \vee t) \equiv (r \wedge s) \vee (r \wedge t)$ $r \vee (s \wedge t) \equiv (r \vee s) \wedge (r \vee t)$	Distributivität: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	Idempotenz: $r \wedge r \equiv r$ $r \vee r \equiv r$	Idempotenz: $A \cap A = A$ $A \cup A = A$
Absorption: $r \wedge (r \vee s) \equiv r$ $r \vee (r \wedge s) \equiv r$	Absorption: $A \cap (A \cup B) = A$ $A \cup (A \cap B) = A$	Dominanz: $r \wedge 0 \equiv 0$ $r \vee 1 \equiv 1$	Dominanz: $A \cap \emptyset = \emptyset$ $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$
de-morgansche Regeln: $\neg(r \wedge s) \equiv \neg r \vee \neg s$ $\neg(r \vee s) \equiv \neg r \wedge \neg s$	de-morgansche Regeln: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	Neutralität: $r \wedge 1 \equiv r$ $r \vee 0 \equiv r$	Neutralität: $A \cap \mathcal{U} = A$ $A \cup \emptyset = A$
Komplementierung: $r \wedge \neg r \equiv 0$ $r \vee \neg r \equiv 1$	Komplementierung: $A \cap \overline{A} = \emptyset$ $A \cup \overline{A} = \mathcal{U}$	doppelte Negation: $\neg\neg r \equiv r$	doppelte Negation: $\overline{(\overline{A})} = A$

Mengen – Äquivalenzregeln

Wegen des Mengen-Logik-Zusammenhangs können wir die bekannten Äquivalenzen übertragen:

Logik

Assoziativität:

$(r \land s) \land t \equiv r \land (s \land t)$

$(r \lor s) \lor t \equiv r \lor (s \lor t)$

Distributivität:

$r \land (s \lor t) \equiv (r \land s) \lor (r \land t)$

$r \lor (s \land t) \equiv (r \lor s) \land (r \lor t)$

Absorption:

$r \land (r \lor s) \equiv r$

$r \lor (r \land s) \equiv r$

de-morgansche Regeln:

$\neg(r \land s) \equiv \neg r \lor \neg s$

$\neg(r \lor s) \equiv \neg r \land \neg s$

Komplementierung:

$r \land \neg r \equiv 0$

$r \lor \neg r \equiv 1$

Mengen

Assoziativität:

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Distributivität:

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Absorption:

$A \cap (A \cup B) = A$

$A \cup (A \cap B) = A$

de-morgansche Regeln:

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Komplementierung:

$A \cap \overline{A} = \emptyset$

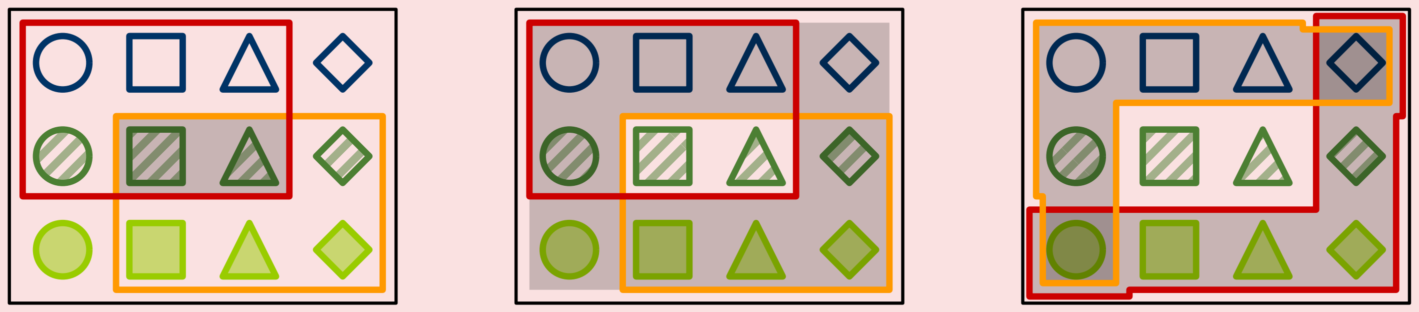
$A \cup \overline{A} = \mathcal{U}$

Beispielhafter **Beweis** für $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$$
\begin{aligned}
\overline{A \cap B} &= \{x \in \mathcal{U} \mid \neg(x \in (A \cap B))\} \\
&= \{x \in \mathcal{U} \mid \neg(x \in \{y \in \mathcal{U} \mid y \in A \land y \in B\})\} \\
&= \{x \in \mathcal{U} \mid \neg(x \in A \land x \in B)\} \\
&= \{x \in \mathcal{U} \mid \neg(x \in A) \lor \neg(x \in B)\} \\
&= \{x \in \mathcal{U} \mid \neg(x \in A) \lor (x \in \overline{B})\} \\
&= \{x \in \mathcal{U} \mid (x \in \{y \in \mathcal{U} \mid \neg(y \in A)\}) \lor (x \in \overline{B})\} \\
\overline{A} \cup \overline{B} &= \{x \in \mathcal{U} \mid (x \in \overline{A}) \lor (x \in \overline{B})\}
\end{aligned}
$$

Visualisierung der Mengen

$A \cap B$ $\longrightarrow$ $\overline{A \cap B}$ $=$ $\overline{A} \cup \overline{B}$



Mengen – Schreibweisen & Partitionen

Um viele Mengen zu vereinigen / schneiden gibt es eine spezielle Notation:

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_k = \bigcup_{i=1}^{k} A_i \quad \text{sowie} \quad A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_k = \bigcap_{i=1}^{k} A_i$$

Definition:

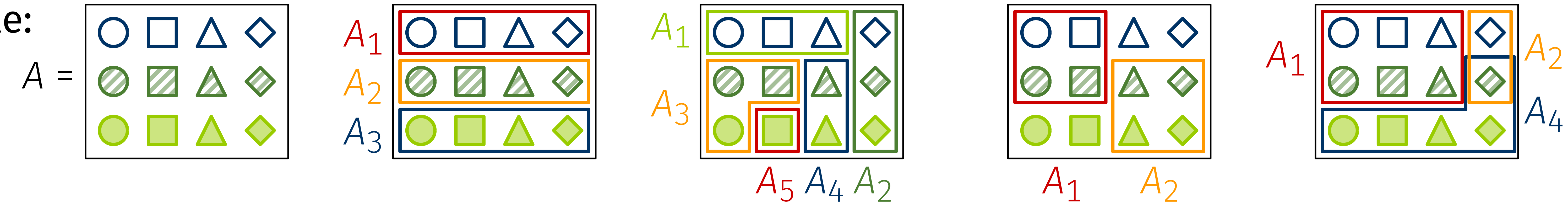
Eine *Menge* $\mathcal{M} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\} = \{A_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ mit n Mengen ist eine *Partition* einer weiteren Menge A, wenn

– $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$ („die A_i zusammen ergeben A“ oder „jedes Element aus A ist in mindestens einem A_i“)

– für alle Paare i, j mit $i \neq j$ gilt, dass $A_i \cap A_j = \emptyset$ („jedes Element ist in höchstens einem A_i“)

$\Rightarrow$ („jedes Element ist in *genau* einem A_i“)

Beispiele:



✓ Partition ✓ Partition ✗ keine Partition ✗ keine Partition

Mengen – Potenzmengen

Definition:

Gegeben eine Menge A. Die Menge, die genau alle Teilmengen von A beinhaltet, heißt Potenzmenge von A, geschrieben $\mathcal{P}(A)$ oder seltener 2^A.

Fakt: Ist A endlich, dann gilt $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

Etwas, das eigentlich bewiesen werden müsste.
Wir akzeptieren hier, dass es schon bewiesen ist.

Beispiel:

$A = \{$🐱, 🐶, 🐰$\}$

$\mathcal{P}(A) = \{$ $\{$🐱, 🐶, 🐰$\}$, $\{$🐱, 🐶$\}$, $\{$🐱, 🐰$\}$, $\{$🐶, 🐰$\}$, $\{$🐱$\}$, $\{$🐶$\}$, $\{$🐰$\}$, $\emptyset$ $\}$

$|\mathcal{P}(A)| = 8 = 2^3$

Wichtig:

$\emptyset \neq \{\emptyset\}$ $\quad |\emptyset| = 0$ $\quad |\{\emptyset\}| = 1$

ein Beutel, der einen leeren Beutel enthält

ein leerer Beutel

$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$