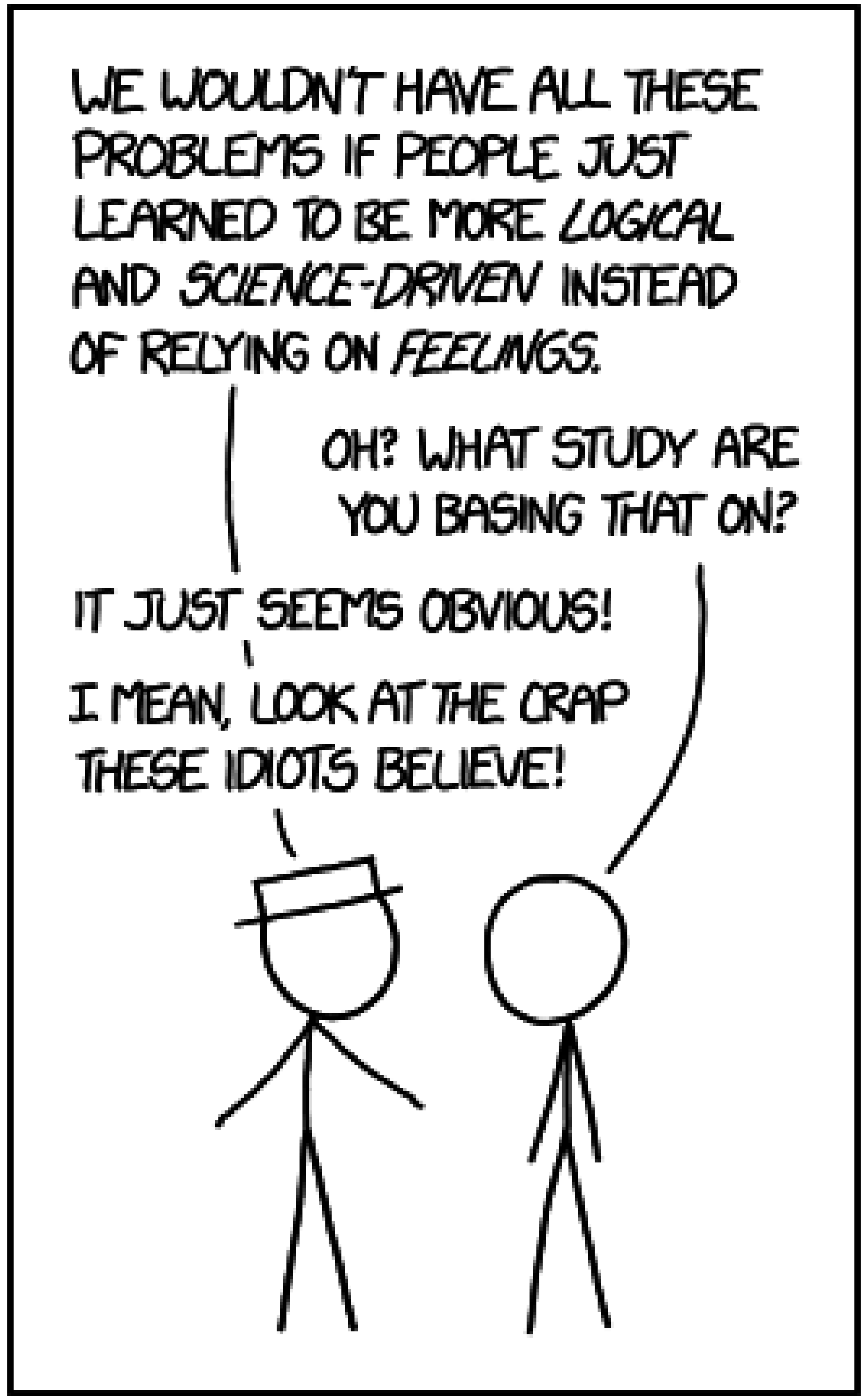
Brückenkurs Mathematik für Studienanfänger:innen der Informatik und Mathematik

Logik



Jonas Cleve, Freie Universität Berlin

03. – 14. April 2023

Logik – Aussagen

Definition:

Eine *Aussage* ist ein sprachliches Konstrukt, das entweder `wahr` oder `falsch` ist.

Beispiele:

nur durch sich selbst und 1 teilbar

„7 ist eine Primzahl" ist eine `wahre` Aussage

beim Teilen durch 2 bleibt ein Rest

„7 ist ungerade" ist eine `wahre` Aussage

beim Teilen durch 2 bleibt kein Rest

„7 ist gerade" ist eine `falsche` Aussage

Logik – Aussagen

Definition:

Eine *Aussage* ist ein sprachliches Konstrukt, das entweder `wahr` oder `falsch` ist.

Beispiele:

$\underbrace{\text{„7 ist eine Primzahl}}_{\texttt{wahr}}$ *und* $\underbrace{\text{7 ist ungerade“}}_{\texttt{wahr}}$ ist eine `wahre` Aussage

$\underbrace{\text{„7 ist eine Primzahl}}_{\texttt{wahr}}$ *und* $\underbrace{\text{7 ist gerade“}}_{\texttt{falsch}}$ ist eine `falsche` Aussage

$\underbrace{\text{„7 ist eine Primzahl}}_{\texttt{wahr}}$ *oder* $\underbrace{\text{7 ist gerade“}}_{\texttt{falsch}}$ ist eine `wahre` Aussage

$\underbrace{\text{„7 ist eine Primzahl}}_{\texttt{wahr}}$ *oder* $\underbrace{\text{7 ist ungerade“}}_{\texttt{wahr}}$ ist eine `wahre` Aussage

Logik – Aussagen

Definition:

Eine *Aussage* ist ein sprachliches Konstrukt, das entweder `wahr` oder `falsch` ist.

Beispiele:

kann als endlicher Bruch geschrieben werden

„$\sqrt{2}$ ist eine rationale Zahl" ist eine `falsche` Aussage

„Jede gerade, natürliche Zahl größer als 2, ist Summe zweier Primzahlen" (Goldbachsche Vermutung)
ist eine Aussage; es ist aber nicht bekannt, ob sie `wahr` oder `falsch` ist

„Dieser Satz ist falsch" ist **keine** Aussage

„Die natürliche Zahl n ist eine Primzahl"
ist **keine** Aussage; der Wahrheitsgehalt hängt von der Wahl von n ab. (Ist ein *Prädikat* $\rightarrow$ später)

Logik – Aussagen

Definition:

Eine *Aussage* ist ein sprachliches Konstrukt, das entweder `wahr` oder `falsch` ist.

Zwei Grundprinzipien:

Zweiwertigkeitsprinzip:	Nur `wahr` und `falsch` sind als Wahrheitswerte erlaubt.
Extensionalitätsprinzip:	Der Wahrheitswert einer zusammengesetzten Aussage hängt nur vom Wahrheitswert der Bestandteile ab.

Logik – Verknüpfungsoperatoren

Wie werden zusammengesetze Aussagen aufgebaut?

Zunächst: Vereinfachen Notation, wählen 1 für `wahr` und 0 für `falsch`.
Führen Variablen x, y als Platzhalter für beliebige Aussagen ein.

Operationen

Negation:	$\neg x$	„nicht x“
Konjunktion:	$x \wedge y$	„x und y“
Disjunktion:	$x \vee y$	„x oder y“ → **inklusives** Oder
Implikation:	$x \rightarrow y$	„aus x folgt y“ „wenn x, dann y“
Äquivalenz:	$x \leftrightarrow y$	„x genau dann, wenn y“
Antivalenz:	$x \oplus y$	„entweder x oder y“ → **exklusives** Oder

Wahrheitstabelle

x	$\neg x$
0	1
1	0

Wie $\wedge$ und $\vee$ unterscheiden?
- $\wedge$ wie A, für „and“
- Die „Oder“ ist ein Fluss ◡

x	y	$x \wedge y$	$x \vee y$	$x \rightarrow y$	$x \leftrightarrow y$	$x \oplus y$
0	0	0	0	1	1	0
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	0

Beispiel Implikation: Aus „Regen“ (x) folgt „Straße nass“ (y).

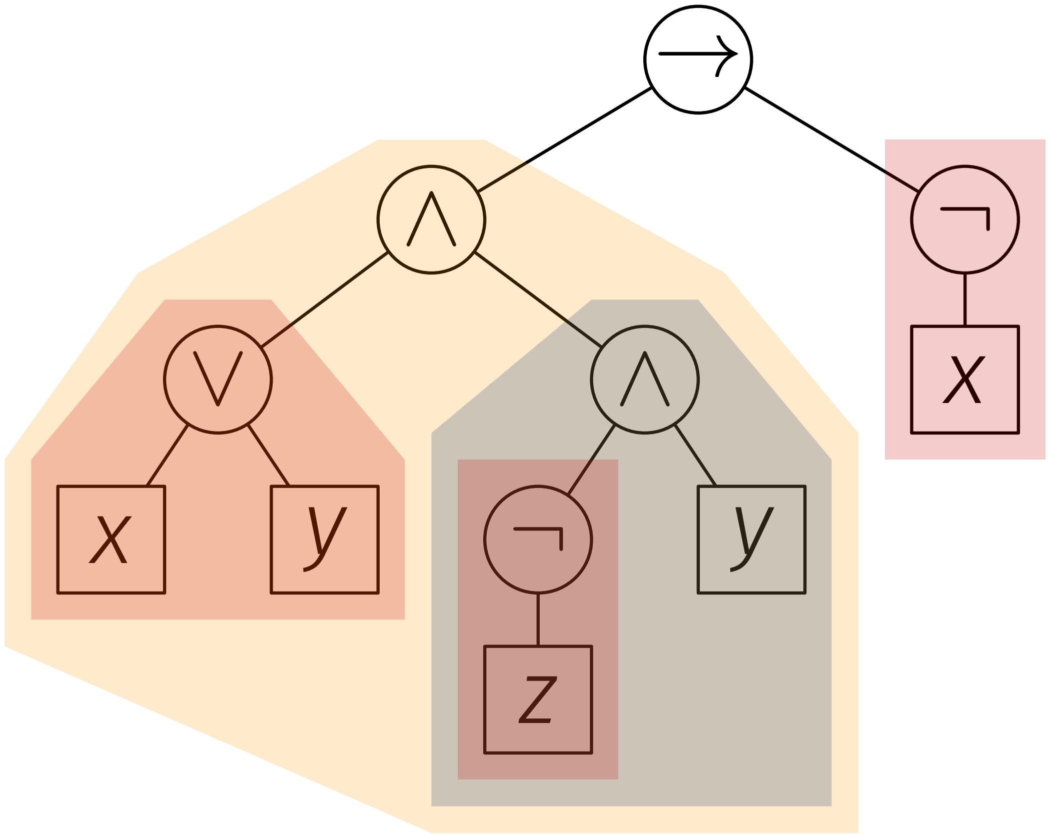
„kein Regen“ und „Straße trocken“ ✓
„kein Regen“ und „Straße nass“ ✓
„Regen“ und „Straße trocken“ ✗
„Regen“ und „Straße nass“ ✓

Logik – Zusammengesetzte Aussagen

Beispiel eines zusammengesetzen Ausdrucks

$$(((x \lor y) \land ((\neg z) \land y)) \to (\neg x))$$

Darstellung als *Syntaxbaum*



Sowohl Klammerung als auch Syntaxbaum sagt aus, in welcher Reihenfolge die (Teil-)Ausdrücke verknüpft werden

Wann müssen Klammern gesetzt werden?

Kennen „Punkt-vor-Strichrechnung“ aus der Schule.

$$(a \cdot b) + (c \cdot d) \;=\; a \cdot b + c \cdot d$$

$$(a + b) \cdot (c + d) \;\neq\; a + b \cdot c + d = a + (b \cdot c) + d$$

Bindungsstärke in absteigender Reihenfolge: ·, +

Bindungsstärke in der Aussagenlogik (in absteigender Reihenfolge):

wichtigster Teil

$\neg$	Negation	stark
$\land$	Konjunktion	
$\lor$	Disjunktion	
$\to$	Implikation	
$\leftrightarrow$	Äquivalenz	schwach

$$\neg a \land b \lor c \land d$$
$$= (\neg a) \land b \lor c \land d$$
$$= ((\neg a) \land b) \lor (c \land d)$$
$$= (((\neg a) \land b) \lor (c \land d))$$

Bemerkung:

Eine *Aussage* hat einen konkreten Wahrheitswert (`wahr` / `falsch`), er muss jedoch noch nicht bekannt sein. (Beispiel Goldbachsche Vermutung.)

Wenn wir bei zusammengesetzten Aussagen die einzelnen Aussagen durch Platzhalter / Variablen ersetzen bekommen wir einen *Term* oder eine *Formel*. In der Regel werden die Adjektive *logisch* oder *boolesch* (nach dem Mathematiker Georg Boole) vorangestellt.

Ein Konstrukt wie $(x \vee \neg z) \wedge x$ ist also eine *logische Formel* oder ein *boolescher Term*. Werden für die Platzhalter konkrete Wahrheitswerte (`wahr` / `falsch` oder 1 / 0) eingesetzt, ergibt sich wieder eine Aussage.

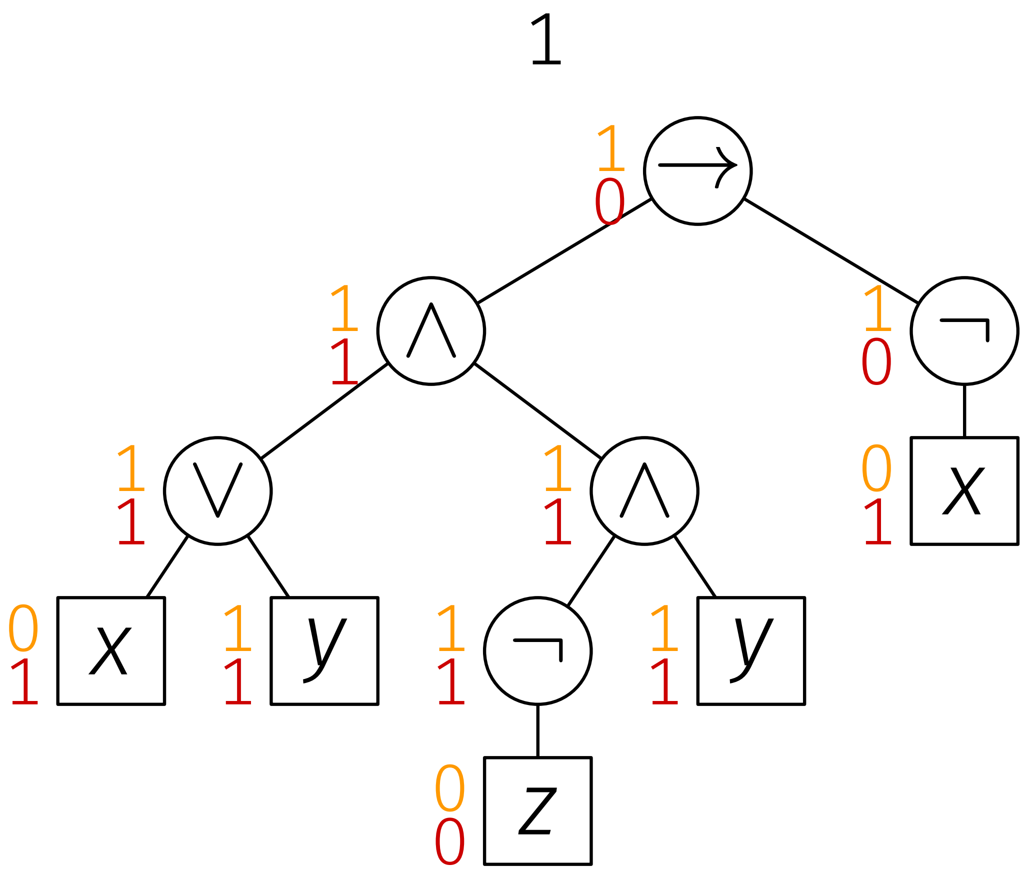
Logik – Auswertung von booleschen Formeln

Welche Bedeutung (`wahr` oder `falsch`) hat diese Formel? $(((x \vee y) \wedge ((\neg z) \wedge y)) \rightarrow (\neg x))$

Das hängt davon ab, welchen Wahrheitswert die Aussagen x, y und z haben.

Beispiel 1:
$x \mapsto 1$
$y \mapsto 1$
$z \mapsto 0$

Beispiel 2:
$x \mapsto 0$
$y \mapsto 1$
$z \mapsto 0$



Der Prozess nennt sich „Auswertung einer Formel“.

Wir werten von unten nach oben aus, daher heißt es auch „Bottom-Up-Auswertung“.

Beobachtung:

- Pro Variable gibt es nur zwei Möglichkeiten: 0 und 1.
- Insgesamt gibt es nur endlich viele Möglichkeiten.
- Genauer: bei k Variablen gibt es 2^k Möglichkeiten:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & & x_2 & & x_3 & & \dots & & x_k \\ 2 & \cdot & 2 & \cdot & 2 & \cdot & \dots & \cdot & 2 = 2^k \end{array}$$

Definition:

Werden Variablen zur Auswertung konkrete Werte zugewiesen, nennen wir dies eine *Belegung*.

Logik – Äquivalenz von Aussagen

Definition:

Zwei Formeln sind *(logisch) äquivalent*, wenn jede beliebige Belegung der Variablen bei der Auswertung den gleichen Wert ergibt. Für zwei Formeln s und t schreiben wir dies als $s \equiv t$.

Wie können wir überprüfen, ob zwei Formeln äquivalent sind?

Alle Belegungen ausprobieren!

$\Rightarrow$ Wahrheitstabelle ausfüllen!

$s : (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$

$t : x \leftrightarrow y$

x	y	$x \rightarrow y$	$y \rightarrow x$	s	t
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Satz:

Für beliebige Formeln r, s, t gelten die folgenden Äquivalenzen:

Assoziativität:
$$(r \wedge s) \wedge t \equiv r \wedge (s \wedge t)$$
$$(r \vee s) \vee t \equiv r \vee (s \vee t)$$

Kommutativität:
$$r \wedge s \equiv s \wedge r$$
$$r \vee s \equiv s \vee r$$

Distributivität:
$$r \wedge (s \vee t) \equiv (r \wedge s) \vee (r \wedge t)$$
$$r \vee (s \wedge t) \equiv (r \vee s) \wedge (r \vee t)$$

Idempotenz:
$$r \wedge r \equiv r$$
$$r \vee r \equiv r$$

Dominanz:
$$r \wedge 0 \equiv 0$$
$$r \vee 1 \equiv 1$$

Neutralität:
$$r \wedge 1 \equiv r$$
$$r \vee 0 \equiv r$$

Absorption:
$$r \wedge (r \vee s) \equiv r$$
$$r \vee (r \wedge s) \equiv r$$

de-morgansche Regeln:
$$\neg(r \wedge s) \equiv \neg r \vee \neg s$$
$$\neg(r \vee s) \equiv \neg r \wedge \neg s$$

Komplementierung:
$$r \wedge \neg r \equiv 0$$
$$r \vee \neg r \equiv 1$$

doppelte Negation: $\neg\neg r \equiv r$

Logik – Äquivalenzregeln

Satz:

Für beliebige Formeln r, s, t gelten die folgenden Äquivalenzen:

Assoziativität: $(r \wedge s) \wedge t \equiv r \wedge (s \wedge t)$

$(r \vee s$

Kommutativität:

Distributivität: $r \wedge (s$

$r \vee (s$

Idempotenz:

Dominanz: $r \wedge 0 \equiv 0$

$r \vee 1 \equiv 1$

Neutralität: $r \wedge 1 \equiv r$

$r \vee 0 \equiv r$

$\vee s) \equiv r$

$\wedge s) \equiv r$

:

$\wedge s) \equiv \neg r \vee \neg s$

$\vee s) \equiv \neg r \wedge \neg s$

$r \wedge \neg r \equiv 0$

$r \vee \neg r \equiv 1$

doppelte Negation: $\neg\neg r \equiv r$

Wie beweisen?

Mittels Wahrheitstabelle.

Beispiel: de-morgansche Regel

$\neg(r \wedge s) \equiv \neg r \vee \neg s$

r	s	$r \wedge s$	$\neg(r \wedge s)$	$\neg r$	$\neg s$	$(\neg r) \vee (\neg s)$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

Logik – Äquivalenzregeln

Satz:

Für beliebige Formeln r, s, t gelten die folgenden Äquivalenzen:

Assoziativität:

$$(r \wedge s) \wedge t \equiv r \wedge (s \wedge t)$$
$$(r \vee s) \vee t \equiv r \vee (s \vee t)$$

Kommutativität:

$$r \wedge s \equiv s \wedge r$$
$$r \vee s \equiv s \vee r$$

Distributivität:

$$r \wedge (s \vee t) \equiv (r \wedge s) \vee (r \wedge t)$$
$$r \vee (s \wedge t) \equiv (r \vee s) \wedge (r \vee t)$$

Idempotenz:

$$r \wedge r \equiv r$$
$$r \vee r \equiv r$$

Dominanz:

$$r \wedge 0 \equiv 0$$
$$r \vee 1 \equiv 1$$

Neutralität:

$$r \wedge 1 \equiv r$$
$$r \vee 0 \equiv r$$

Absorption:

$$r \wedge (r \vee s) \equiv r$$
$$r \vee (r \wedge s) \equiv r$$

de-morgansche Regeln:

$$\neg(r \wedge s) \equiv \neg r \vee \neg s$$
$$\neg(r \vee s) \equiv \neg r \wedge \neg s$$

Komplementierung:

$$r \wedge \neg r \equiv 0$$
$$r \vee \neg r \equiv 1$$

doppelte Negation:

$$\neg\neg r \equiv r$$

Beispiel: $x \vee ((y \vee z) \wedge \neg((\neg x) \wedge ((\neg x) \vee u)))$

$$r \wedge (r \vee u)$$

$$\overset{\text{(Absorption)}}{\equiv} x \vee ((y \vee z) \wedge \neg(\neg x))$$

$$\overset{\text{(doppelte Negation)}}{\equiv} x \vee ((y \vee z) \wedge x)$$

$$x \vee (r \wedge x)$$

$$\overset{\text{(Absorption)}}{\equiv} x$$

Beispiel: Prüfen, ob $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$ kommutativ sind.

Gilt $r \rightarrow s \equiv s \rightarrow r$? Gilt $r \leftrightarrow s \equiv s \leftrightarrow r$?

r	s	$r \rightarrow s$	$s \rightarrow r$	$r \leftrightarrow s$	$s \leftrightarrow r$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

✗ ✓

$\rightarrow$ ist nicht kommutativ $\leftrightarrow$ ist kommutativ

Satz:

Für beliebige Formeln r, s, t gelten die folgenden Äquivalenzen:

Assoziativität:

$$(r \wedge s) \wedge t \equiv r \wedge (s \wedge t)$$
$$(r \vee s) \vee t \equiv r \vee (s \vee t)$$

Kommutativität:

$$r \wedge s \equiv s \wedge r$$
$$r \vee s \equiv s \vee r$$

Distributivität:

$$r \wedge (s \vee t) \equiv (r \wedge s) \vee (r \wedge t)$$
$$r \vee (s \wedge t) \equiv (r \vee s) \wedge (r \vee t)$$

Idempotenz:

$$r \wedge r \equiv r$$
$$r \vee r \equiv r$$

Dominanz:

$$r \wedge 0 \equiv 0$$
$$r \vee 1 \equiv 1$$

Neutralität:

$$r \wedge 1 \equiv r$$
$$r \vee 0 \equiv r$$

Absorption:

$$r \wedge (r \vee s) \equiv r$$
$$r \vee (r \wedge s) \equiv r$$

de-morgansche Regeln:

$$\neg(r \wedge s) \equiv \neg r \vee \neg s$$
$$\neg(r \vee s) \equiv \neg r \wedge \neg s$$

Komplementierung:

$$r \wedge \neg r \equiv 0$$
$$r \vee \neg r \equiv 1$$

doppelte Negation:

$$\neg\neg r \equiv r$$

Weitere nützliche Äquivalenzen:

$$r \rightarrow s \equiv \neg r \vee s$$
$$r \rightarrow s \equiv \neg(r \wedge \neg s)$$

$$r \leftrightarrow s \equiv (r \wedge s) \vee (\neg r \wedge \neg s)$$

$$r \rightarrow (s \wedge t) \equiv (r \rightarrow s) \wedge (r \rightarrow t)$$
$$r \rightarrow (s \vee t) \equiv (r \rightarrow s) \vee (r \rightarrow t)$$

$$(r \wedge s) \rightarrow t \equiv (r \rightarrow t) \vee (s \rightarrow t)$$
$$(r \vee s) \rightarrow t \equiv (r \rightarrow t) \wedge (s \rightarrow t)$$

Definition:

Eine beliebige boolesche Formel s ist

- *erfüllbar* genau dann, wenn es (mindestens) eine Belegung ihrer Variablen gibt, sodass s zu 1 auswertet,
- eine *Tautologie* / *allgemeingültig* genau dann, wenn s für jede Belegung ihrer Variablen zu 1 auswertet,
- eine *Kontradiktion* genau dann, wenn s für jede Belegung ihrer Variablen zu 0 auswertet,
- eine *Kontradiktion* genau dann, wenn sie nicht erfüllbar ist.

Beispiele:

$(x \lor y) \land (\neg x \lor \neg y)$

$x \mapsto 0, y \mapsto 1$

$(0 \lor 1) \land (1 \lor 0) \equiv 1 \land 1 \equiv 1$

$\Rightarrow$ erfüllbar, keine Kontradiktion

$x \mapsto 1, y \mapsto 1$

$(1 \lor 1) \land (0 \lor 0) \equiv 1 \land 0 \equiv 0$

$\Rightarrow$ keine Tautologie

$(x \land \neg x) \land (y \lor \neg x)$

(Komplementierung)

$\equiv \quad 0 \quad \land (y \lor \neg x)$

(Dominanz)

$\equiv \quad 0$

$\Rightarrow$ Kontradiktion

$(x \lor y \lor \neg x) \land (\neg y \lor x \lor y)$

(Komplementierung)

$\equiv (\quad 1 \quad \lor y) \land (\quad 1 \quad \lor x)$

(Dominanz)

$\equiv \quad 1 \quad \land \quad 1$

(Neutralität / Idempotenz)

$\equiv \quad 1$ $\quad \Rightarrow$ Tautologie

Freie Universität Berlin

Definition:

Ein *Prädikat* ist ein (sprachliches) Konstrukt, das

- mindestens eine *freie* Variable / einen *freien* Platzhalter enthält und
- beim Ersetzen aller Variablen mit jeweils einem konkreten Element[1] zu einer Aussage wird.

[1] die Elemente können dabei nur aus einem festen, konkret vorgegebenen Bereich gewählt werden.

Beispiele:

$P(x)$: „$x = 0$“
$Q(x)$: „$x + 0 = x$“
$R(x, y)$: „$x + y = x$“
$S(x)$: „x ist Primzahl“

[Für x und y aus dem Bereich der natürlichen Zahlen.]

$P(2)$:	„$2 = 0$“	falsche Aussage
$Q(3)$:	„$3 + 0 = 3$“	wahre Aussage
$R(2, 0)$:	„$2 + 0 = 2$“	wahre Aussage
$S(8)$:	„8 ist Primzahl“	falsche Aussage

$R(2, z)$: „$2 + z = 2$“ ist weiterhin ein Prädikat, aber mit nur noch einer freien Variable

Wie sagen wir, dass ein Prädikat für bestimmte Elemente gilt?

„Für alle natürlichen Zahlen x ist $P(x)$ wahr.“ $\forall x \in \mathbb{N} : P(x)$

„Es gibt eine ganze Zahl y für die $Q(y)$ wahr ist.“ $\exists y \in \mathbb{Z} : Q(y)$

- $\forall$ ist *Allquantor*: „für *alle* Elemente gilt“
- $\exists$ ist *Existenzquantor*: „für *mindestens ein* Element gilt“
- (selten: $\exists!$ heißt „für *genau* ein Element gilt“)
- $x \in M$ heißt: x ist aus dem mit M bezeichneten Bereich
- $\mathbb{N}$ sind alle natürlichen Zahlen $(0, 1, 2, \ldots)$, $\mathbb{Z}$ sind alle ganzen Zahlen $(\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots)$.
- Bei mehreren Quantoren werden sie von links nach rechts gelesen und ausgewertet
- eine Variable eines Prädikats, die in einem Quantor auftaucht wird durch den Quantor *gebunden*, sie ist dann nicht mehr *frei*
- sind alle Variablen gebunden, ergibt sich wieder eine Aussage

---

$\forall x \in \mathbb{N} : x + 0 = x$ `wahre` Aussage

$\exists x \in \mathbb{N} : x^2 = x$ `wahre` Aussage, $1^2 = 1$

$\forall x \in \mathbb{N} : x + y = x$ Prädikat, denn y ist frei

$\exists x \in \mathbb{N} : x + 1 = x$ `falsche` Aussage

$\forall x \in \mathbb{N} : x^2 = x$ `falsche` Aussage, $2^2 = 4 \neq 2$

Logik – Quantoren

Wie sagen wir, dass ein Prädikat für bestimmte Elemente gilt?

„Für alle natürlichen Zahlen x ist $P(x)$ wahr." $\forall x \in \mathbb{N} : P(x)$

„Es gibt eine ganze Zahl y für die $Q(y)$ wahr ist." $\exists y \in \mathbb{Z} : Q(y)$

- $\forall$ ist *Allquantor*: „für *alle* Elemente gilt"
- $\exists$ ist *Existenzquantor*: „für *mindestens ein* Element gilt"
- (selten: $\exists!$ heißt „für *genau* ein Element gilt")
- $x \in M$ heißt: x ist aus dem mit M bezeichneten Bereich
- $\mathbb{N}$ sind alle natürlichen Zahlen $(0, 1, 2, \ldots)$, $\mathbb{Z}$ sind alle ganzen Zahlen $(\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots)$.
- Bei mehreren Quantoren werden sie von links nach rechts gelesen und ausgewertet
- eine Variable eines Prädikats, die in einem Quantor auftaucht wird durch den Quantor *gebunden*, sie ist dann nicht mehr *frei*
- sind alle Variablen gebunden, ergibt sich wieder eine Aussage

---

$\forall x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} : y < x$ `falsche` Aussage, für $x = 0$ gibt es keine kleinere (natürliche) Zahl y

$\forall x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z} : y < x$ `wahre` Aussage, für $x = a$ wähle $y = a - 1$

$\Rightarrow$ der Bereich der Variablen ist wichtig für die Aussage!

Wollen zeigen, dass diese Aussage eine `wahre` Aussage ist:

$\forall x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} : (x+1)^2 < y < (x+2)^2$ „Zwischen zwei Quadratzahlen past immer eine natürliche Zahl“

Idee: $\left.\begin{array}{l}(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 \\ (x+2)^2 = x^2 + 4x + 4\end{array}\right\}$ z. B. $(x+1)^2 < x^2 + 2x + 2 < (x+2)^2$

Beweis:

Sei $x = a$ eine beliebige natürliche Zahl.

Setze $y = a^2 + 2a + 2$.

Prüfe, ob $(x+1)^2 < y$ gilt:

$$
\begin{aligned}
& (x+1)^2 < y \\
\Leftrightarrow\ & (a+1)^2 < a^2 + 2a + 2 \\
\Leftrightarrow\ & a^2 + 2a + 1 < a^2 + 2a + 2 \\
\Leftrightarrow\ & 2a + 1 < 2a + 2 \\
\Leftrightarrow\ & 1 < 2 \quad ✓
\end{aligned}
$$

Prüfe, ob $y < (x+2)^2$ gilt:

$$
\begin{aligned}
& y < (x+2)^2 \\
\Leftrightarrow\ & a^2 + 2a + 2 < (a+2)^2 \\
\Leftrightarrow\ & a^2 + 2a + 2 < a^2 + 4a + 4 \\
\Leftrightarrow\ & 2a + 2 < 4a + 4 \\
\Leftrightarrow\ & -2 < 2a \\
\Leftrightarrow\ & -1 < a \quad ✓
\end{aligned}
$$

Stimmt, da a nicht negativ ist. □

„Beweis ist fertig“
früher „Q.E.D.“
Alternativ genutzt: ■

Hinweise:

- Dieser Beweis funktioniert, weil die Aussage wahr ist.
- Wollen wir zeigen, dass eine Aussage falsch ist, funktioniert das Schema nicht so einfach.
- Stattdessen: Aussage negieren und zeigen, dass die Negation wahr ist.
- Wenn $t \equiv 0$, dann ist $\neg t \equiv 1$.

Logik – Äquivalenzen mit Quantoren

Wie können wir eine Aussage mit Quantoren negieren?

Satz:

Für beliebige Prädikate $P(x), Q(x), R(x,y)$ gelten die folgenden Äquivalenzen:

$$\neg(\forall x : P(x)) \equiv \exists x : \neg P(x)$$
$$\neg(\exists x : P(x)) \equiv \forall x : \neg P(x)$$

$$(\forall x : P(x)) \land (\forall x : Q(x)) \equiv \forall x : (P(x) \land Q(x))$$
$$(\exists x : P(x)) \lor (\exists x : Q(x)) \equiv \exists x : (P(x) \lor Q(x))$$

$$\forall x : (\forall y : R(x,y)) \equiv \forall y : (\forall x : R(x,y))$$
$$\exists x : (\exists y : R(x,y)) \equiv \exists y : (\exists x : R(x,y))$$

Bei $\forall x$ / $\exists x$ fehlt der Bereich, aus dem x kommt.
Für die Übersichtlichkeit so geschrieben.
Wir denken uns $\forall x \in M$ / $\exists x \in M$ an diesen Stellen.

Achtung:

Im Allgemeinen sind die folgenden Aussagen **nicht** äquivalent!

$$(\forall x : P(x)) \lor (\forall x : Q(x)) \not\equiv \forall x : (P(x) \lor Q(x))$$
$$(\exists x : P(x)) \land (\exists x : Q(x)) \not\equiv \exists x : (P(x) \land Q(x))$$

$$\forall x : \exists y : R(x,y) \not\equiv \exists y : \forall x : R(x,y)$$

Bei voneinander unabhängigen Aussagen können die Quantoren zusammen gezogen werden:

$$(\forall x : P(x)) \land (\forall y : Q(y)) \equiv \forall x : \forall y : (P(x) \land Q(y))$$
$$(\forall x : P(x)) \lor (\forall y : Q(y)) \equiv \forall x : \forall y : (P(x) \lor Q(y))$$

$$(\exists x : P(x)) \land (\exists y : Q(y)) \equiv \exists x : \exists y : (P(x) \land Q(y))$$
$$(\exists x : P(x)) \lor (\exists y : Q(y)) \equiv \exists x : \exists y : (P(x) \lor Q(y))$$

Logik – Negation von Quantoren, Teil 2

Freie Universität Berlin

Wollen zeigen, dass diese Aussage eine `falsche` Aussage ist:

$$\forall x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z} : (x+1)^2 < y < (x+2)^2$$

$\neg(\forall x : P(x)) \equiv \exists x : \neg P(x)$
$\neg(\exists x : P(x)) \equiv \forall x : \neg P(x)$

$\neg(a \wedge b) \equiv \neg a \vee \neg b$ (de Morgan)

1. Wir negieren und vereinfachen die Aussage.

$$\neg\left(\forall x \in \mathbb{Z} : \exists y \in \mathbb{Z} : (x+1)^2 < y < (x+2)^2\right)$$
$$\equiv \exists x \in \mathbb{Z} : \neg\left(\exists y \in \mathbb{Z} : (x+1)^2 < y < (x+2)^2\right)$$
$$\equiv \exists x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : \neg\left((x+1)^2 < y < (x+2)^2\right)$$
$$\equiv \exists x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : \neg(((x+1)^2 < y) \wedge (y < (x+2)^2))$$
$$\equiv \exists x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : \neg((x+1)^2 < y) \vee \neg(y < (x+2)^2)$$
$$\equiv \exists x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z} : ((x+1)^2 \geq y) \vee (y \geq (x+2)^2)$$

2. Wir zeigen, dass die negierte Aussage `wahr` ist.

Wähle $x = -3$. (Jede negative Zahl funktioniert hier)

Sei $y = b$ ein beliebiges $b \in \mathbb{Z}$.

$$((-3+1)^2 \geq b) \vee (b \geq (-3+2)^2)$$
$$\equiv ((-2)^2 \geq b) \vee (b \geq (-1)^2)$$
$$\equiv (4 \geq b) \vee (b \geq 1)$$

✓ Das ist eine `wahre` Aussage für jedes $b \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow$ Für $x = -3$ existiert kein y, welches die Ungleichung $4 < y < 1$ erfüllt. $\square$