Analysis 2, Kurs 14Q

WS 2025/26

Dozent: H.-J. von Höhne

Homepage: Link über Kursseiten von Prof. Schulz und Lernraum

Vorlesung: Mo 8:30 - 10:15, R1708/09 StEPS
Übung: Mo 10:45 - 12:15, R1708/09 StEPS, v. Höhne

Klausur: Test:

Inhalt

-) Gleichmäßige Stetigkeit (Ergänz. zu Ana 1)

-) Integralrechnung

-) $\mathbb{R}^n$ als metrischer Raum
   -) offen, abgeschlossen, Stetigkeit

-) Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$
   -) Differenzierbarkeit: partiell & total
   -) Lokale Extrema

Literatur

-) Skript, © von Höhne
-) Forster, Analysis 1+2
-) Fritzsche, Grundkurs Analysis 1+2
-) Grieser, Analysis 1

§0 Gleichmäßige Stetigkeit

0.1 **Def**: Sei $D \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge

D offen $:\Leftrightarrow \forall x \in D\ \exists \varepsilon > 0 : \underbrace{\mathcal{U}_\varepsilon(x) :=]x-\varepsilon, x+\varepsilon[}_{\varepsilon\text{-Umgebung von } x} \subset D$

D abgeschlossen $:\Leftrightarrow$ $\mathbb{R} \setminus D$ ist offen

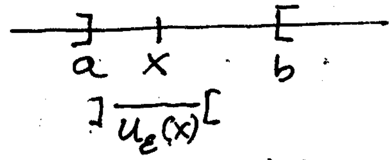
D Kompakt $:\Leftrightarrow$ D ist abgeschl. und beschränkt

$\exists K > 0 : D \subset [-K, K]$

Beisp

1) $]a,b[$ ist offen, aber nicht abgeschl. für $a < b$

offen: Sei $x \in]a,b[$, d.h. $a < x < b$



Gesucht $\varepsilon > 0$ mit $\mathcal{U}_\varepsilon(x) \subset]a,b[$

Wähle $\varepsilon := \min\{x-a, b-x\} \Rightarrow \mathcal{U}_\varepsilon(x) \subset]a,b[$

nicht abg.: Betrachte $\mathbb{R} \setminus]a,b[=]-\infty, a] \cup [b, \infty[$

Für $x = a$ und alle $\varepsilon > 0$ gilt: $\mathcal{U}_\varepsilon(a) \not\subset]-\infty, a] \cup [b, \infty[$

$\Rightarrow \mathbb{R} \setminus]a,b[$ ist nicht offen

$\Rightarrow]a,b[$ nicht abgeschl.

2) $\mathbb{R}_{\geq a} := [a, \infty[$ ist abg., aber nicht beschränkt

abg: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_{\geq a} = \mathbb{R}_{<a}$ ist offen, da für alle $x < a$ und $\varepsilon := a - x > 0$ gilt: $\mathcal{U}_\varepsilon(x) \subset \mathbb{R}_{<a}$

nicht beschr.: ✓

3) Für $a \leq b$ ist $[a,b]$ abg. und beschr., also kompakt.

0.2 Erinn 1 (aus Ana 1)

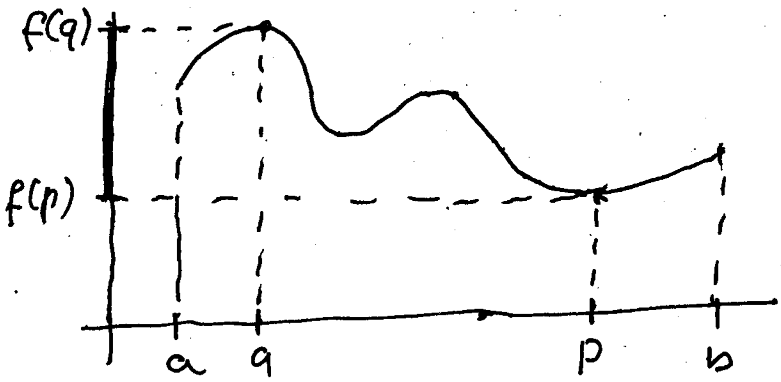
Satz: Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:

1) Satz vom Min. und Max (5.15): es gibt $p,q\in[a,b]$ mit
$$f(p)\le f(x)\le f(q) \quad \text{für alle } a\le x\le b,$$
d.h. f hat in p ein Min. und in q ein Max.

2) f ist beschränkt (Folg. 1)

3) Zwischenwertsatz (5.13): $\forall y$ zwischen $f(a)$ und $f(b)$ $\exists c\in[a,b]: f(c)=y$

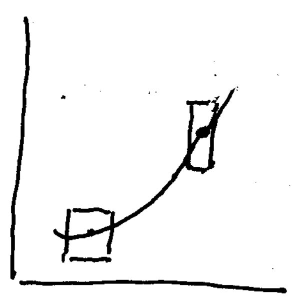
4) (Folg 2, S67) $f([a,b])=[f(p),f(q)]$, d.h. stetige Bilder von kompakten Intervallen sind kompakte Intervalle



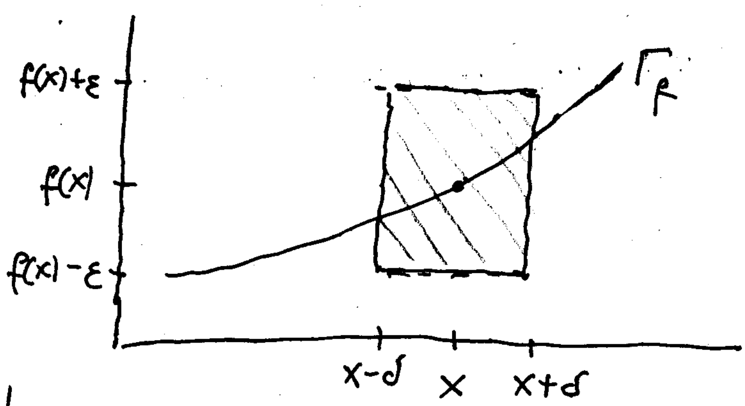
Erinn 2 Sei $D\subset\mathbb{R}$ und $f:D\to\mathbb{R}$ Abb.

$f:D\to\mathbb{R}$ stetig $\overset{}{\underset{5.7}{\Longleftrightarrow}}$ $\forall x\in D$: ε-δ-Kriterium, d.h.

$$\underbrace{\forall x\in D\ \forall\varepsilon>0}_{\forall\varepsilon>0\ \forall x\in D}\ \exists\delta>0\ \underbrace{\forall y\in D:(|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon)}_{\Gamma_f \text{ schneidet den Rand des Rechtecks höchstens an den vertikalen Seiten}}$$



δ hängt i.A. von ε <u>und von x</u> ab



0.3 Def: $f: D \to \mathbb{R}$ <u>gleichmäßig stetig</u> $:\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in D: (|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$$

d.h. δ hängt nur von ε ab, aber <u>nicht von x</u>

<u>Bem</u>: 1) f gleichm. stetig $\Rightarrow$ f stetig

2) Begriff der "Gleichm. Stet." entsteht durch Vertauschung der Reihenfolge von Quantoren:

Def. "Stet."	Def. "Gleichm. Stet"
$\ldots \forall x \in D\ \exists \delta > 0 \ldots$	$\ldots \exists \delta > 0\ \forall x \in D \ldots$

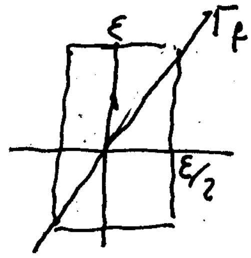
Alltagsbeisp: sei M = Menge aller Menschen

$\forall x \in M\ \exists \delta \in M$: δ ist Vater von x "Jeder Mensch hat einen Vater"

$\exists \delta \in M\ \forall x \in M$: δ ist Vater von x "Es gibt einen Vater aller Menschen"

0.4 <u>Beisp</u>

1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$ ist glm. stetig



Für $\varepsilon > 0$ setze $\delta := \varepsilon/2$

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|x-y| < \delta$

$\Rightarrow |2x - 2y| = 2|x-y| < 2\delta = 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, ist nicht glm. stetig

Erinn: $\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$

<u>zu zeigen</u>: $\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x, y \in D: |x-y| < \delta \wedge |x^2 - y^2| \geq \varepsilon$

Ansatz $\varepsilon = 1$. sei $\delta > 0$ bel.

Gesucht $x \leq y$ mit $y - x < \delta$ und $y^2 - x^2 \geq 1$
(o.E. beim $\leq$)

Ansatz $y = x + \frac{\delta}{2} \Rightarrow y - x = \frac{\delta}{2} < \delta$

$$y^2 - x^2 = x^2 + 2x\frac{\delta}{2} + \frac{\delta^2}{4} - x^2 = x\delta + \frac{\delta^2}{4}$$

Wollen haben: $x\delta + \frac{\delta^2}{4} \geq 1$. Das gilt sicher für $x = \frac{1}{\delta}$

Also: Für $\varepsilon = 1$, $\delta > 0$ bel., $x := 1/\delta$, $y := x + \frac{\delta}{2}$ gilt:

$$|x-y| < \delta \wedge |x^2 - y^2| \geq 1 = \varepsilon$$

3) Für $b>0$ ist $f:[-b,b]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$, gleichm. stetig

Für $\varepsilon>0$ setze $\delta:=\frac{\varepsilon}{2b}>0$

Seien $x,y\in[-b,b]$ mit $|x-y|<\delta$.

$$\Rightarrow |x^2-y^2| \underset{\text{3. Bin. F.}}{=} |(x+y)\underbrace{(x-y)}_{<\delta}| < |x+y|\delta \underset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} (|x|+|y|)\delta$$

$$\leq 2b\delta = 2b\frac{\varepsilon}{2b} = \varepsilon$$

✓

0.5 <u>Satz</u>: Sei $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ stetig

$\Longrightarrow$ f ist gleichmäßig stetig.

<u>Erinn Ana 1, 2.17</u>: Satz v. Bolzano-Weierstraß

Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ hat eine konvergente Teilfolge.

<u>Bew. v. Satz</u>

<u>Ann</u>: f ist nicht gleichm. stetig

$$\Rightarrow \exists \varepsilon>0 \ \underset{(\delta=1/n)}{\forall n\in\mathbb{N}} \ \exists x_n, y_n\in[a,b]:$$

$$|x_n-y_n|<1/n \wedge |f(x_n)-f(y_n)|\geq\varepsilon \qquad (*)$$

$(x_n)_n$ Folge in $[a,b]$ ist beschränkt

$\underset{\text{Bo-Wei}}{\Longrightarrow}$ $(x_n)_n$ hat Teilfolge $(x_{n_k})_k$ mit

$$x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} p \quad \text{für ein } p\in[a,b]$$

$(*) \Rightarrow (x_n-y_n)_n$ ist 0-Folge $\Rightarrow y_{n_k}\xrightarrow[k\to\infty]{} p$

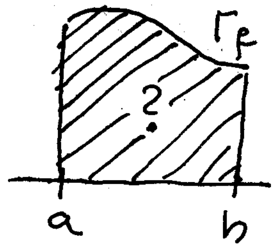
$$\left.\begin{array}{l} f \text{ stetig} \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty}(f(x_{n_k})-f(y_{n_k})) = f(p)-f(p)=0 \\ \text{Nach } (*) \text{ gilt aber } |f(x_{n_k})-f(y_{n_k})|\geq\varepsilon \text{ für alle } k \end{array}\right\} \text{Wid.}$$

✓

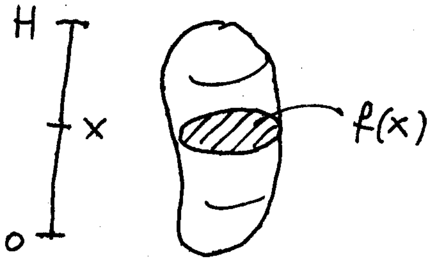
Integralrechnung

Drei Probleme

I) Gegeben: $f:[a,b] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$
Gesucht: Flächeninhalt unter Graph von f



II) Gegeben: Körper der Höhe H
$f:[0,H] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$
$f(x) =$ Flächeninhalt des Querschnitts in Höhe x



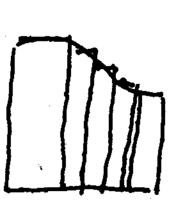
Gesucht: Volumen des Körpers

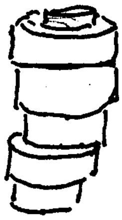
III) Gegeben: Autofahrt, $a =$ Startzeit, $b =$ Ankunftszeit
$f:[a,b] \to \mathbb{R}$
$f(x) =$ Geschwind. zum Zeitpunkt x
Gesucht: zurückgelegte Strecke

Gemeinsame Lösungsidee

Zerlege $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$
sodass $f|_{[x_{i-1}, x_i]}$ wenig variiert
wähle z_i

Dann: gesuchte Größe $\approx \sum_{i=1}^{n} f(z_i)(x_i - x_{i-1})$

I) 

II) 

III)

30 Min	50 km/h
2 Std	120 km/h
15 Min	80 km/h

$s = 50 \cdot \frac{1}{2} + 120 \cdot 2 + 80 \cdot \frac{1}{4}$
$= 25 + 240 + 20 = \underline{285}$ km

§ 1 Das Riemann-Integral (Bernhard Riemann 1826 – 1866)

Im Folg: $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkte Funktion, d.h.

$\exists m, M \in \mathbb{R} \; \forall x \in [a,b] : m \le f(x) \le M$

1.1 <u>Def</u>: Z <u>Zerlegung von</u> $[a,b] \; :\Leftrightarrow$

$Z \subset [a,b]$ endl. mit $a, b \in Z$

Sei $Z = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ Zerlegung von $[a,b]$

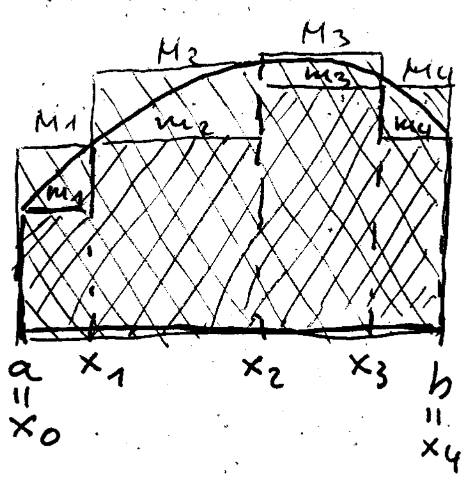
$U_Z(f) := \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$ <u>Untersumme</u> von f bzgl. Z

$O_Z(f) := \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$ <u>Obersumme</u> von f bzgl Z

wobei

$m_i := \inf\{f(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\} = \inf f([x_{i-1}, x_i])$

$M_i := \sup\{f(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\} = \sup f([x_{i-1}, x_i])$



grün $O_Z(f)$
rot $U_Z(f)$

<u>Bemerk</u>: $U_Z(f) \le O_Z(f)$

$\forall i = 1, .., n : m_i \le M_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$

1.2 Lemma

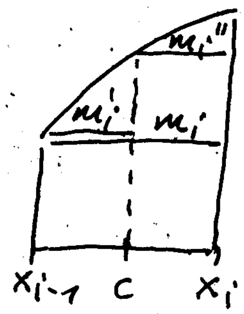
1) Seien Z, Z' Zerleg. von $[a,b]$ und Z' eine <u>Verfeinerung</u> von Z, d.h. $Z \subset Z'$. Dann gilt:

$$\mathcal{U}_Z(f) \leq \mathcal{U}_{Z'}(f) \quad \text{und} \quad O_{Z'}(f) \leq O_Z(f)$$

2) Für alle Zerl. Z_1, Z_2 von $[a,b]$ gilt:

$$\mathcal{U}_{Z_1}(f) \leq O_{Z_2}(f)$$

<u>Bew</u>: 1) o.E. $Z' = Z \cup \{c\}$, $x_{i-1} < c < x_i$



$$\Rightarrow \mathcal{U}_Z(f) = m_i(x_i - x_{i-1}) + \text{Rest}$$
$$= m_i(c - x_{i-1}) + m_i(x_i - c) + \text{Rest}$$

Aufg 1.3,4): $\emptyset \neq B \subset A \Rightarrow \inf A \leq \inf B$

$$m_i = \inf f([x_{i-1}, x_i]) \leq \begin{cases} \inf f([x_{i-1}, c]) =: m_i' \\ \inf f([c, x_i]) =: m_i'' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathcal{U}_Z(f) \leq m_i'(c - x_{i-1}) + m_i''(x_i - c) + \text{Rest}$$
$$= \mathcal{U}_{Z'}(f)$$

Analog für Obersummen.

2) $Z_1, Z_2 \subset Z := Z_1 \cup Z_2$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{U}_{Z_1}(f) \underset{1)}{\leq} \mathcal{U}_Z(f) \underset{1.1}{\leq} O_Z(f) \underset{1)}{\leq} O_{Z_2}(f).$$

✓

1.3 Folg: Folgende Größen sind endlich.

$\mathcal{U}(f) := \sup\{\mathcal{U}_Z(f) \mid Z \text{ Zerl. v. } [a,b]\}$ <u>Unterintegral</u> von f

$\mathcal{O}(f) := \inf\{\mathcal{O}_Z(f) \mid Z \text{ Zerl. v. } [a,b]\}$ <u>Oberintegral</u> von f

Es gilt:

$$\mathcal{U}(f) \leq \mathcal{O}(f)$$

$\Leftarrow$ $X := \{\mathcal{U}_Z(f) \mid Z \text{ Zerl. v. } [a,b]\} \subset \mathbb{R}$

$Y := \{\mathcal{O}_Z(f) \mid Z \quad '' \quad [a,b]\} \subset \mathbb{R}$

$Z = \{a,b\}$ Zerl. von $[a,b]$ $\Longrightarrow X, Y \neq \emptyset$

1.2, 2) $\Longrightarrow X \leq Y$, d.h. $x \leq y$ für alle $x \in X$, $y \in Y$

$\xrightarrow[\mathbb{R} \text{ vollst.}]{}$ $X \leq \sup X \leq Y$ und weiter

$\mathcal{U}(f) = \sup X \leq \inf Y = \mathcal{O}(f)$ ✓

Def: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt.

f (Riemann-)<u>integrierbar</u> $:\Longleftrightarrow \mathcal{U}(f) = \mathcal{O}(f)$

In diesem Fall:

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^b f := \mathcal{U}(f) = \mathcal{O}(f)$$

(Riemann-) <u>Integral von f</u>

1.4 <u>Lemma</u> (Integrierbarkeits-Kriterium)

f integrierbar $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists Z \text{ Zerl. v. } [a,b] : \mathcal{O}_Z(f) - \mathcal{U}_Z(f) < \varepsilon$

<u>Bew</u>: „$\Rightarrow$": $I := \mathcal{U}(f) = \mathcal{O}(f)$. Sei $\varepsilon > 0$

$I - \frac{\varepsilon}{2} < \mathcal{U}(f) \underset{\text{Aufg. 1.3}}{\Longrightarrow} \exists Z_1 : I - \varepsilon/2 < \mathcal{U}_{Z_1}(f) \leq \mathcal{U}_Z(f)$

$I + \varepsilon/2 > \mathcal{O}(f) \Longrightarrow \exists Z_2 : I + \varepsilon/2 > \mathcal{O}_{Z_2}(f) \geq \mathcal{O}_Z(f)$

Setze $Z := Z_1 \cup Z_2$ — 1.2, 1)

$\Longrightarrow \mathcal{O}_Z(f) - \mathcal{U}_Z(f) < (I + \varepsilon/2) - (I - \varepsilon/2) = \varepsilon$

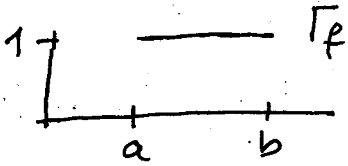
„$\Leftarrow$": $\forall \varepsilon > 0 \; \exists Z : \underbrace{\mathcal{O}_Z(f) - \mathcal{U}_Z(f)}_{\geq} < \varepsilon$

$\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \quad 0 \leq \mathcal{O}(f) - \mathcal{U}(f) < \varepsilon$

$\Longrightarrow \mathcal{U}(f) = \mathcal{O}(f)$ ✓

1.5 Beisp.

1) $f:[a,b]\to\mathbb{R},\ f(x)=1$



Für jede Zerl $Z=\{a=x_0<x_1<\dots<x_n=b\}$ gilt:

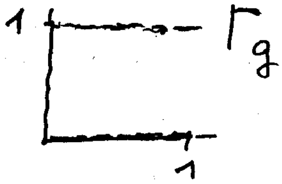
$$m_i = 1 = M_i \quad \text{für } i=1,\dots,n$$

$$\Rightarrow \mathcal{U}_Z(f) = \mathcal{O}_Z(f) = \sum_{i=1}^{n} 1(x_i-x_{i-1}) = b-a$$

$$\Rightarrow \mathcal{U}(f) = \mathcal{O}(f) = b-a$$

$$\Rightarrow f \text{ integ.bar mit } \int_a^b f(x)\,dx = b-a$$

2) $g:[0,1]\to\mathbb{R},\ g(x)=\begin{cases}1 & \text{falls } x\in\mathbb{Q}\\ 0 & \text{"}\quad x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$



Beh: g ist nicht integrierbar

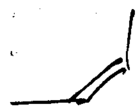
Für jede Zerl. $Z=\{0=x_0<x_1<\dots<x_n=1\}$ gilt:

Jedes $[x_{i-1},x_i]$ enthält Elem. aus $\mathbb{Q}$ und aus $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

$$\Rightarrow m_i = 0 \text{ und } M_i = 1 \quad \text{für } i=1,\dots,n$$

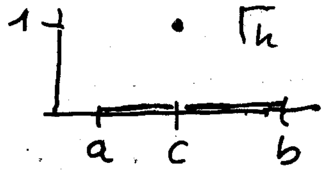
$$\Rightarrow \mathcal{U}_Z(g) = 0 \text{ und } \mathcal{O}_Z(g) = x_n - x_0 = 1$$

$$\Rightarrow \mathcal{U}(g) = 0 \neq 1 = \mathcal{O}(g).$$



3) Sei $a<c<b$ und

$$h:[a,b]\to\mathbb{R},\ h(x)=\begin{cases}1 & \text{falls } x=c\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$



Beh: h ist integ.bar mit $\int_a^b h(x)\,dx = 0$

Sei $\varepsilon>0$ und o.E. $\varepsilon/4 < c-a,\ b-c$

Betrachte $Z=\{\underset{x_0}{a},\ \underset{x_1}{c-\frac{\varepsilon}{4}},\ \underset{x_2}{c+\varepsilon/4},\ \underset{x_3}{b}\}$

$$\Rightarrow \mathcal{U}_Z(h) = 0(x_1-x_0)+0(x_2-x_1)+0(x_3-x_2) = 0$$

$$\mathcal{O}_Z(h) = 0(x_1-x_0)+1\underbrace{(x_2-x_1)}_{\varepsilon/2}+0(x_3-x_2) = \varepsilon/2$$

$$\Rightarrow \mathcal{O}_Z(h)-\mathcal{U}_Z(h) = \varepsilon/2 < \varepsilon$$

$$\underset{1.4}{\Rightarrow} h \text{ ist integ.bar und } \int_a^b h(x)\,dx = \mathcal{U}(h) = 0$$

1.6 Satz: Folgende Klassen von Funktionen $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ sind integrierbar.

1) stetige Funktionen,
2) monotone Funktionen.

Bew: 1) Sei $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $\varepsilon > 0$
f stetig $\underset{0.5}{\Longrightarrow}$ f gleichm. stetig, d.h.

$$\exists \delta > 0 \ \forall x,y \in [a,b] : \left(|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \right)$$

Wähle $Z = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n\}$ Zerleg. von $[a,b]$ mit
$|x_i - x_{i-1}| < \delta$ für $i = 1, \dots, n$ $\left(\text{etwa } x_i = a + i\frac{b-a}{n}, \text{ wobei } \frac{b-a}{n} < \delta \right)$

$$\Rightarrow M_i - m_i \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \text{ für } i = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow O_Z(f) - U_Z(f) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})}_{b-a} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

2) Aufg. 2.3