Analysis 2, Kurs 13 Q+R   WS 2024/25

Dozent: H.-J. von Höhne

Homepage: Link über Kursseiten von Prof. Schulz
und Lernraum

Vorlesung: Mi 8:15–10:00, R1708/09 StEPS

Üb.: Q GrA: Mi 10:15–11:45, R1708/09, H.-J. v. Höhne
Q GrB: Mi 10:15–11:45, R 804, D. Pitteloud
R : Mi 10:15–12:45, R 1508, M. Schnapka

Klausur:

Inhalt

-) Gleichmäßige Stetigkeit (Ergänz. zu Ana 1)

-) Integralrechnung

-) $\mathbb{R}^n$ als metrischer Raum
  -) offen, abgeschlossen, Stetigkeit

-) Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$
  -) Differenzierbarkeit: partiell + total
  -) Lokale Extrema

Literatur

-) Skript, © von Höhne
-) Forster, Analysis 1+2
-) Fritzsche, Grundkurs Analysis 1+2
-) Grieser, Analysis 1

§0 Gleichmäßige Stetigkeit

0.1 Def: Sei $D \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge

D offen $:\Leftrightarrow \forall x \in D\ \exists \varepsilon > 0 : \underbrace{U_\varepsilon(x) :=]x-\varepsilon, x+\varepsilon[}_{\varepsilon\text{-Umgebung von } x} \subset D$

D abgeschlossen $:\Leftrightarrow$ $\mathbb{R} \setminus D$ ist offen

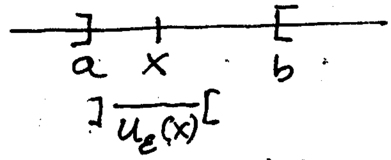
D Kompakt $:\Leftrightarrow$ D ist abgeschl. und beschränkt

$\ulcorner \exists K > 0 : D \subset [-K, K] \,\lrcorner$

Beisp

1) $]a,b[$ ist offen, aber nicht abgeschl. für $a < b$

$\ulcorner$ offen: Sei $x \in]a,b[$, d.h. $a < x < b$



Gesucht $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \subset]a,b[$

Wähle $\varepsilon := \min\{x-a, b-x\} \Rightarrow U_\varepsilon(x) \subset]a,b[$

nicht abg.: Betrachte $\mathbb{R} \setminus]a,b[=]-\infty, a] \cup [b, \infty[$

Für $x = a$ und alle $\varepsilon > 0$ gilt: $U_\varepsilon(a) \not\subset]-\infty, a] \cup [b, \infty[$

$\Rightarrow \mathbb{R} \setminus]a,b[$ ist nicht offen

$\Rightarrow]a,b[$ nicht abgeschl. $\lrcorner$

2) $\mathbb{R}_{\geq a} := [a, \infty[$ ist abg., aber nicht beschränkt

$\ulcorner$ abg: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_{\geq a} = \mathbb{R}_{<a}$ ist offen, da für alle $x < a$ und $\varepsilon := a - x > 0$ gilt: $U_\varepsilon(x) \subset \mathbb{R}_{<a}$

nicht beschr.: ✓ $\lrcorner$

3) Für $a \leq b$ ist $[a,b]$ abg. und beschr., also kompakt.

0.2 <u>Erinn 1</u> (aus Ana 1)

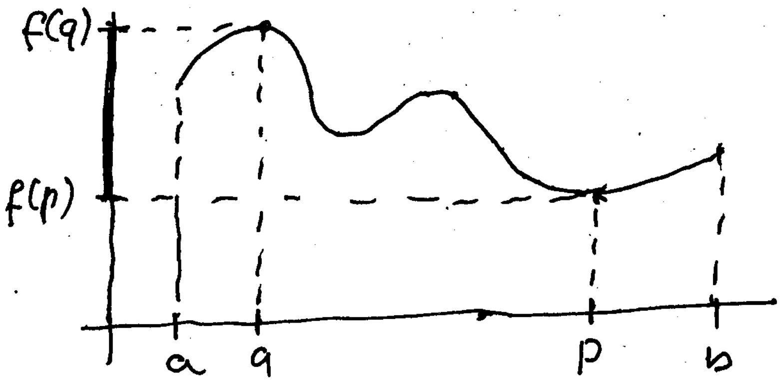
<u>Satz</u>: Sei $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:

1) Satz vom Min. und Max: es gibt $p, q \in [a,b]$ mit (5.15)
$$f(p) \leq f(x) \leq f(q) \quad \text{für alle } a \leq x \leq b,$$
d.h. f hat in p ein Min. und in q ein Max.

2) f ist beschränkt (Folg. 1)

3) Zwischenwertsatz (5.13): $\forall y$ zwischen $f(a)$ und $f(b)$ $\exists c \in [a,b]: f(c) = y$

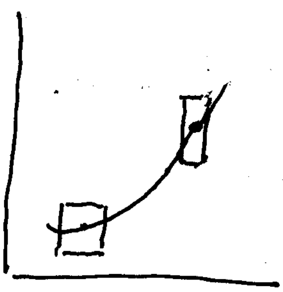
4) Folg 2 S67 $f([a,b]) = [f(p), f(q)]$, d.h. stetige Bilder von kompakten Intervallen sind kompakte Intervalle



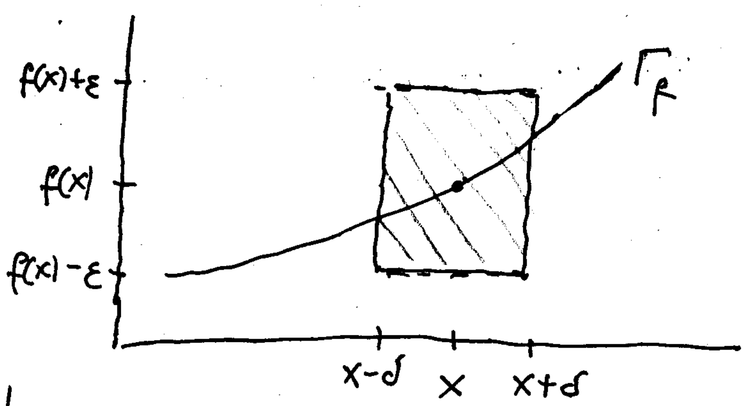
<u>Erinn 2</u> Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f: D \to \mathbb{R}$ Abb.

$f: D \to \mathbb{R}$ stetig $\overset{}{\underset{5.7}{\iff}}$ $\forall x \in D$: ε-δ-Kriterium, d.h.

$$\underbrace{\forall x \in D \ \forall \varepsilon > 0}_{\forall \varepsilon > 0 \ \forall x \in D} \ \exists \delta > 0 \ \underbrace{\forall y \in D: (|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)}_{\Gamma_f \text{ schneidet den Rand des Rechtecks höchstens an den vertikalen Seiten}}$$



δ hängt i.A. von ε <u>und von x</u> ab



0.3 Def: $f: D \to \mathbb{R}$ <u>gleichmäßig stetig</u> $:\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in D: (|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$$

d.h. δ hängt nur von ε ab, aber <u>nicht von x</u>

Bem: 1) f gleichm. stetig $\Rightarrow$ f stetig

2) Begriff der "Gleichm. Stet." entsteht durch Vertauschung der Reihenfolge von Quantoren:

Def. "Stet."	Def. "Gleichm. Stet"
$\ldots \forall x \in D\ \exists \delta > 0 \ldots$	$\ldots \exists \delta > 0\ \forall x \in D \ldots$

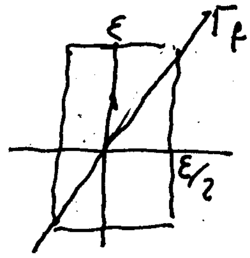
Alltagsbeisp: sei M = Menge aller Menschen

$\forall x \in M\ \exists \delta \in M$: δ ist Vater von x "Jeder Mensch hat einen Vater"

$\exists \delta \in M\ \forall x \in M$: δ ist Vater von x "Es gibt einen Vater aller Menschen"

0.4 Beisp

1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$ ist glm. stetig



Für $\varepsilon > 0$ setze $\delta := \varepsilon/2$

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|x-y| < \delta$

$\Rightarrow |2x - 2y| = 2|x-y| < 2\delta = 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ //

2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, ist nicht glm. stetig

Erinn: $\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$

<u>zu zeigen</u>: $\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x, y \in D: |x-y| < \delta \wedge |x^2 - y^2| \geq \varepsilon$

Ansatz $\varepsilon = 1$. Sei $\delta > 0$ bel.

Gesucht $x \underset{\text{o.E.}}{\leq} y$ mit $y - x < \delta$ und $y^2 - x^2 \geq 1$

Ansatz $y = x + \frac{\delta}{2} \Rightarrow y - x = \frac{\delta}{2} < \delta$

$$y^2 - x^2 = x^2 + 2x\frac{\delta}{2} + \frac{\delta^2}{4} - x^2 = x\delta + \frac{\delta^2}{4}$$

Wollen haben: $x\delta + \frac{\delta^2}{4} \geq 1$. Das gilt sicher für $x = \frac{1}{\delta}$

Also: Für $\varepsilon = 1$, $\delta > 0$ bel., $x := 1/\delta$, $y := x + \frac{\delta}{2}$ gilt:

$$|x-y| < \delta \wedge |x^2 - y^2| \geq 1 = \varepsilon$$ //

3) Für $b>0$ ist $f:[-b,b]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$, gleichm. stetig

Für $\varepsilon>0$ setze $\delta:=\frac{\varepsilon}{2b}>0$

Seien $x,y\in[-b,b]$ mit $|x-y|<\delta$.

$$\Rightarrow |x^2-y^2| \underset{\text{3.Bin.F.}}{=} |(x+y)\underbrace{(x-y)}_{<\delta}| < |x+y|\delta \underset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} (|x|+|y|)\delta$$

$$\leq 2b\delta = 2b\frac{\varepsilon}{2b} = \varepsilon$$ ✓

0.5 <u>Satz</u>: Sei $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ stetig

$\Longrightarrow$ f ist gleichmäßig stetig.

<u>Erinn Ana 1, 2.17</u>: Satz v. Bolzano-Weierstraß

Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ hat eine konvergente Teilfolge.

<u>Bew. v. Satz</u>

<u>Ann</u>: f ist nicht gleichm. stetig

$$\Rightarrow \exists\varepsilon>0\ \underset{(\delta=1/n)}{\forall n\in\mathbb{N}}\ \exists x_n,y_n\in[a,b]:$$

$$|x_n-y_n|<1/n \wedge |f(x_n)-f(y_n)|\geq\varepsilon \qquad (*)$$

$(x_n)_n$ Folge in $[a,b]$ ist beschränkt

$\underset{\text{Bo-Wei}}{\Longrightarrow}$ $(x_n)_n$ hat Teilfolge $(x_{n_k})_k$ mit

$$x_{n_k}\xrightarrow[k\to\infty]{} p \quad \text{für ein } p\in[a,b]$$

$(*)\Rightarrow (x_n-y_n)_n$ ist 0-Folge $\Rightarrow y_{n_k}\xrightarrow[k\to\infty]{} p$

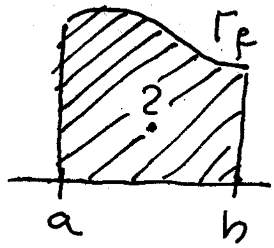
$$\left.\begin{array}{l} f \text{ stetig} \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty}(f(x_{n_k})-f(y_{n_k})) = f(p)-f(p)=0 \\ \text{Nach } (*) \text{ gilt aber } |f(x_{n_k})-f(y_{n_k})|\geq\varepsilon \text{ für alle } k \end{array}\right\} \text{Wid.}$$

✓

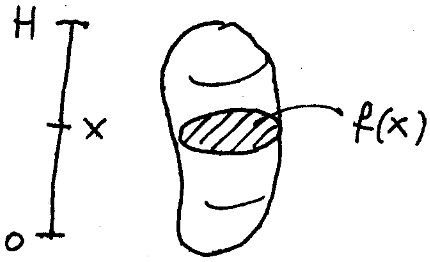
Integralrechnung

Drei Probleme

I) Gegeben: $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$
Gesucht: Flächeninhalt unter Graph von f



II) Gegeben: Körper der Höhe H
$f:[0,H] \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$
$f(x) =$ Flächeninhalt des Querschnitts in Höhe x



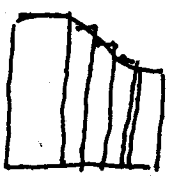
Gesucht: Volumen des Körpers

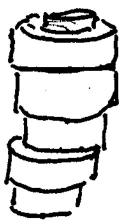
III) Gegeben: Autofahrt, $a =$ Startzeit, $b =$ Ankunftszeit
$f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$
$f(x) =$ Geschwind. zum Zeitpunkt x
Gesucht: zurückgelegbe Strecke

Gemeinsame Lösungsidee

Zerlege $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$
sodass $f|_{[x_{i-1},x_i]}$ wenig variiert
wähle z_i

Dann: gesuchte Größe $\approx \sum_{i=1}^{n} f(z_i)(x_i - x_{i-1})$

I) 

II) 

III)

30 Min	50 km/h
2 Std	120 km/h
15 Min	80 km/h

$s = 50 \cdot \frac{1}{2} + 120 \cdot 2 + 80 \cdot \frac{1}{4}$
$= 25 + 240 + 20 = \underline{285}$ km

§1 Das Riemann-Integral (Bernhard Riemann 1826 – 1866)

Im Folg: $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkte Funktion, d.h.

$\exists\, m, M \in \mathbb{R}\ \forall x \in [a,b] :\ m \le f(x) \le M$

1.1 Def: Z Zerlegung von $[a,b]$ $:\Leftrightarrow$
$Z \subset [a,b]$ endl. mit $a, b \in Z$

Sei $Z = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$. Zerlegung von $[a,b]$

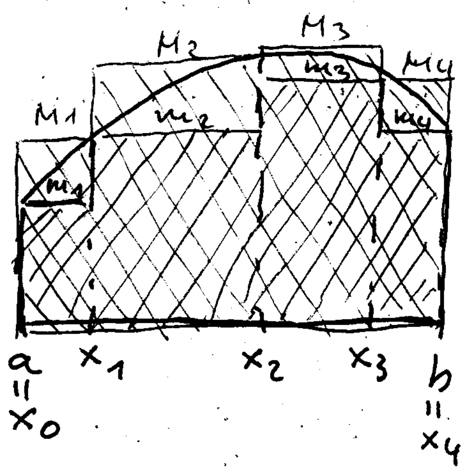
$U_Z(f) := \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$ Untersumme von f bzgl. Z

$O_Z(f) := \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$ Obersumme von f bzgl Z

wobei

$m_i := \inf\{f(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\} = \inf f([x_{i-1}, x_i])$

$M_i := \sup\{f(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\} = \sup f([x_{i-1}, x_i])$



grün $O_Z(f)$
rot $U_Z(f)$

Bemerk: $U_Z(f) \le O_Z(f)$

$\forall i = 1, \dots, n :\ m_i \le M_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$

1.2 Lemma

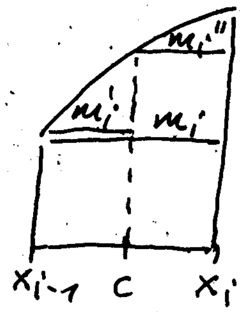
1) Seien Z, Z' Zerleg. von $[a,b]$ und Z' eine <u>Verfeinerung</u> von Z, d.h. $Z \subset Z'$. Dann gilt:

$$\mathcal{U}_Z(f) \leq \mathcal{U}_{Z'}(f) \quad \text{und} \quad O_{Z'}(f) \leq O_Z(f)$$

2) Für alle Zerl. Z_1, Z_2 von $[a,b]$ gilt:

$$\mathcal{U}_{Z_1}(f) \leq O_{Z_2}(f)$$

<u>Bew</u>: 1) o.E. $Z' = Z \cup \{c\}$, $x_{i-1} < c < x_i$



$$\Rightarrow \mathcal{U}_Z(f) = m_i(x_i - x_{i-1}) + \text{Rest}$$
$$= m_i(c - x_{i-1}) + m_i(x_i - c) + \text{Rest}$$

Aufg 1.3,4): $\emptyset \neq B \subset A \Rightarrow \inf A \leq \inf B$

$$m_i = \inf f([x_{i-1}, x_i]) \leq \begin{cases} \inf f([x_{i-1}, c]) =: m_i' \\ \inf f([c, x_i]) =: m_i'' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathcal{U}_Z(f) \leq m_i'(c - x_{i-1}) + m_i''(x_i - c) + \text{Rest}$$
$$= \mathcal{U}_{Z'}(f)$$

Analog für Obersummen.

2) $Z_1, Z_2 \subset Z := Z_1 \cup Z_2$

$$\Rightarrow \mathcal{U}_{Z_1}(f) \underset{1)}{\leq} \mathcal{U}_Z(f) \underset{1.1}{\leq} O_Z(f) \underset{1)}{\leq} O_{Z_2}(f).$$

✓

1.3 Folg: Folgende Größen sind endlich.

$\mathcal{U}(f) := \sup\{\mathcal{U}_Z(f) \mid Z \text{ Zerl. v. } [a,b]\}$ <u>Unterintegral</u> von f

$O(f) := \inf\{O_Z(f) \mid Z \text{ Zerl. v. } [a,b]\}$ <u>Oberintegral</u> von f

Es gilt:

$$\mathcal{U}(f) \leq O(f)$$

$\Leftarrow$ $X := \{\mathcal{U}_Z(f) \mid Z \text{ Zerl. v. } [a,b]\} \subset \mathbb{R}$

$Y := \{O_Z(f) \mid Z \quad \text{"} \quad [a,b]\} \subset \mathbb{R}$

$Z = \{a,b\}$ Zerl. von $[a,b]$ $\Longrightarrow X, Y \neq \emptyset$

1.2, 2) $\Longrightarrow X \leq Y$, d.h. $x \leq y$ für alle $x \in X$, $y \in Y$

$\xrightarrow[\mathbb{R} \text{ vollst.}]{} \quad X \leq \sup X \leq Y$ und weiter

$\mathcal{U}(f) = \sup X \leq \inf Y = O(f)$ $\Rightarrow$

<u>**Def**</u>: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt.

f (Riemann-)<u>integrierbar</u> $:\Longleftrightarrow \mathcal{U}(f) = O(f)$

In diesem Fall:

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^b f := \mathcal{U}(f) = O(f)$$ (Riemann-) <u>Integral von f</u>

1.4 <u>**Lemma**</u> (Integrierbarkeits-Kriterium)

f integrierbar $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists Z$ Zerl. v. $[a,b]$: $O_Z(f) - \mathcal{U}_Z(f) < \varepsilon$

<u>Bew</u>: „$\Rightarrow$": $I := \mathcal{U}(f) = O(f)$. Sei $\varepsilon > 0$

$I - \frac{\varepsilon}{2} < \mathcal{U}(f) \xRightarrow{\text{Aufg. 1.3}} \exists Z_1 : I - \varepsilon/2 < \mathcal{U}_{Z_1}(f) \leq \mathcal{U}_Z(f)$

$I + \varepsilon/2 > O(f) \Longrightarrow \exists Z_2 : I + \varepsilon/2 > O_{Z_2}(f) \geq O_Z(f)$

Setze $Z := Z_1 \cup Z_2$ $\Uparrow$ 1.2, 1)

$\Longrightarrow O_Z(f) - \mathcal{U}_Z(f) < (I + \varepsilon/2) - (I - \varepsilon/2) = \varepsilon$

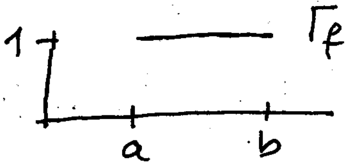
„$\Leftarrow$": $\forall \varepsilon > 0 \; \exists Z : \underbrace{O_Z(f) - \mathcal{U}_Z(f)}_{\geq} < \varepsilon$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : \quad 0 \leq O(f) - \mathcal{U}(f) < \varepsilon$

$\Rightarrow \quad \mathcal{U}(f) = O(f)$ ✓

1.5 Beisp.

1) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1$



Für jede Zerl $Z = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ gilt:

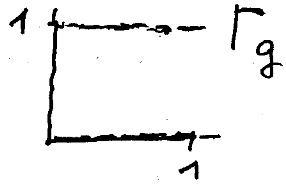
$$m_i = 1 = M_i \quad \text{für } i = 1, \ldots, n$$

$$\Rightarrow \mathcal{U}_Z(f) = \mathcal{O}_Z(f) = \sum_{i=1}^{n} 1(x_i - x_{i-1}) = b - a$$

$$\Rightarrow \mathcal{U}(f) = \mathcal{O}(f) = b - a$$

$\Rightarrow$ f integ.bar mit $\int_a^b f(x)\,dx = b - a$

2) $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{"} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$



Beh: g ist nicht integrierbar

Für jede Zerl. $Z = \{0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1\}$ gilt:

Jedes $[x_{i-1}, x_i]$ enthält Elem. aus $\mathbb{Q}$ und aus $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

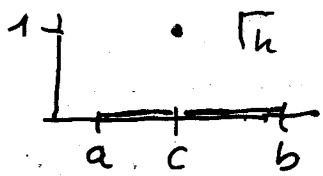
$\Rightarrow m_i = 0$ und $M_i = 1$ für $i = 1, \ldots, n$

$\Rightarrow \mathcal{U}_Z(g) = 0$ und $\mathcal{O}_Z(g) = x_n - x_0 = 1$

$\Rightarrow \mathcal{U}(g) = 0 \neq 1 = \mathcal{O}(g)$.

3) sei $a < c < b$ und

$h : [a,b] \to \mathbb{R}$, $h(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = c \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$



Beh: h ist integ.bar mit $\int_a^b h(x)\,dx = 0$

Sei $\varepsilon > 0$ und o.E. $\varepsilon/4 < c - a, b - c$

Betrachte $Z = \{ \underset{x_0}{\underset{\shortparallel}{a}}, \underset{x_1}{\underset{\shortparallel}{c - \frac{\varepsilon}{4}}}, \underset{x_2}{\underset{\shortparallel}{c + \varepsilon/4}}, \underset{x_3}{\underset{\shortparallel}{b}} \}$

$$\Rightarrow \mathcal{U}_Z(h) = 0(x_1 - x_0) + 0(x_2 - x_1) + 0(x_3 - x_2) = 0$$

$$\mathcal{O}_Z(h) = 0(x_1 - x_0) + 1\underbrace{(x_2 - x_1)}_{\varepsilon/2} + 0(x_3 - x_2) = \varepsilon/2$$

$$\Rightarrow \mathcal{O}_Z(h) - \mathcal{U}_Z(h) = \varepsilon/2 < \varepsilon$$

$\underset{1.4}{\Rightarrow}$ h ist integ.bar und $\int_a^b h(x)\,dx = \mathcal{U}(h) = 0$

1.6 <u>Satz</u>: Folgende Klassen von Funktionen $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ sind integrierbar.

1) stetige Funktionen,

2) monotone Funktionen.

<u>Bew</u>: 1) Sei $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $\varepsilon > 0$

f stetig $\underset{0.5}{\Rightarrow}$ f gleichm. stetig, d.h.

$$\exists \delta > 0 \ \forall x,y \in [a,b] : \left(|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \right)$$

Wähle $Z = \{x_0 < x_1 < \cdots < x_n\}$ Zerleg. von $[a,b]$ mit

$|x_i - x_{i-1}| < \delta$ für $i = 1,\dots,n$ $\left(\begin{array}{l} \text{etwa } x_i = a + i\frac{b-a}{n}, \\ \text{wobei } \frac{b-a}{n} < \delta \end{array} \right)$

$$\Rightarrow M_i - m_i \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \text{ für } i = 1,\dots,n$$

$$\Rightarrow O_Z(f) - U_Z(f) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})}_{b-a} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

2) Aufg. 2.3

Wiederholung

$f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt

$Z = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ Zerleg. von $[a,b]$

$$\mathcal{U}_Z(f) := \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\inf f([x_{i-1}, x_i])}_{=: m_i} (x_i - x_{i-1})$$

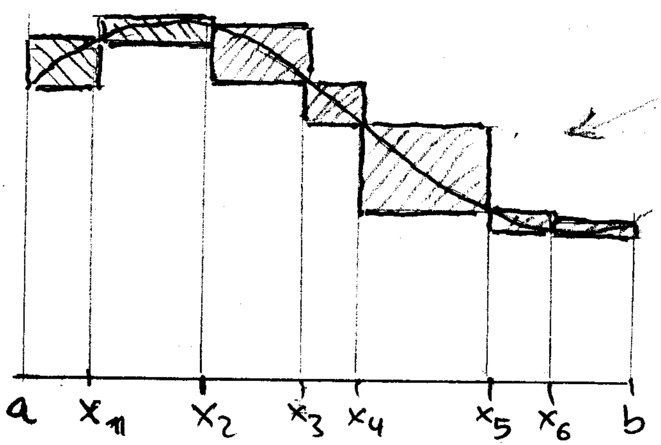
$$O_Z(f) := \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\sup f([x_{i-1}, x_i])}_{=: M_i} (x_i - x_{i-1})$$

$\mathcal{U}(f) := \sup\{\mathcal{U}_Z(f) \mid Z \text{ Zerl.}\} \leq \inf\{O_Z(f) \mid Z \text{ Zerl.}\} =: O(f)$

<u>Def</u>: f <u>integrierbar</u> $:\Longleftrightarrow$ $\mathcal{U}(f) = O(f)$

In diesem Fall: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx := \mathcal{U}(f)$

1.4 f integ.bar $\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists Z$ Zerl.: $O_Z(f) - \mathcal{U}_Z(f) < \varepsilon$



1.6 $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow$ f integrierbar

Bew.: Sei $\varepsilon > 0$. f gleichm. stetig

$\Rightarrow \exists \delta > 0\ \forall x,y \in [a,b]: \left(|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right)$

Sei Z Zerleg mit $x_i - x_{i-1} < \delta$ für $i = 1, \dots, n$

$\Rightarrow O_Z(f) - \mathcal{U}_Z(f) < \varepsilon$

1.7 Folg: sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig

$Z_n := \{x_i = a + i\frac{b-a}{n} \mid i = 0,1,\dots,n\}$ äquidist. Zerleg.

$z_i\in[x_{i-1},x_i]$ für $i=1,\dots,n$ $\quad S_n(f) := \sum_{i=1}^n f(z_i)\underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{(b-a)/n}$ "Riemann-Summe"

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} S_n(f) = \int_a^b f$$

Bew: $\forall i=1,\dots,n:\quad m_i \le f(z_i) \le M_i$

$$\left.\begin{array}{l} \Longrightarrow \quad \mathcal{U}_{Z_n}(f) \le S_n(f) \le O_{Z_n}(f) \\ \text{Außerdem } \mathcal{U}_{Z_n}(f) \le \int_a^b f \le O_{Z_n}(f) \end{array}\right\} (*)$$

Für $\varepsilon > 0$ sei $\delta > 0$ wie im Bew. von 1.6, 1)
und $n_0\in\mathbb{N}$ mit $\frac{b-a}{n_0} < \delta$

$\Longrightarrow \forall n \ge n_0: \; O_{Z_n}(f) - \mathcal{U}_{Z_n}(f) < \varepsilon$

$\overset{}{\underset{(*)}{\Longrightarrow}} \forall n \ge n_0: \; \left| S_n(f) - \int_a^b f\right| < \varepsilon \quad \checkmark$

Beisp: $f:[0,b]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$

$z_i = x_i = 0 + i\frac{b}{n}$ für $i = 1,\dots,n$

$$\Longrightarrow S_n(f) = \sum_{i=1}^n \left(i\frac{b}{n}\right)^2\frac{b}{n} = \sum_{i=1}^n i^2\frac{b^3}{n^3} = \frac{b^3}{n^3}\sum_{i=1}^n i^2$$

$$\underset{\text{AlgZth 1 }\cancel{\text{Ana 1}}}{=} \frac{b^3}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= b^3\cdot\frac{(1+1/n)(2+1/n)}{6} \xrightarrow[n\to\infty]{} b^3\frac{2}{6} = \frac{1}{3}b^3$$

Also: $\int_0^b x^2\,dx = \frac{1}{3}b^3$

1.8 Satz (Rechenregeln)

Seien $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrierbar. Dann gilt:

1) Linearität: $f+g$ und λf für $\lambda\in\mathbb{R}$ sind integ.bar mit
$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g \quad , \quad \int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$$

2) Monotonie: $f\leq g \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$

3) $|f|:[a,b]\to\mathbb{R},\ x\mapsto |f(x)|$, ist integ.bar mit
$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f| \qquad \text{"Dreiecksungleichung"}$$

4) $f(x)=g(x)$ für fast alle $x\in[a,b] \Rightarrow \int_a^b f = \int_a^b g$

5) Für $a<b<c$ und $h:[a,c]\to\mathbb{R}$ gilt:
$$h \text{ int.bar} \iff h|_{[a,b]} \text{ und } h|_{[b,c]} \text{ int.bar}$$
In diesem Fall:
$$\int_a^c h(x)dx = \int_a^b h(x)dx + \int_b^c h(x)dx \qquad \text{"Additivität bzgl. Integrationsbereich"}$$

Bew: mit ε-Kriterium 1.4

1) für $f+g$: Sei $\varepsilon>0$ und Z Zerl. von $[a,b]$ mit
$$O_Z(f)-U_Z(f)<\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad O_Z(g)-U_Z(g)<\frac{\varepsilon}{2}$$
zeigen:
$$A:=U_Z(f)+U_Z(g) \overset{(*)}{\leq} U_Z(f+g)\leq O_Z(f+g) \overset{(**)}{\leq} O_Z(f)+O_Z(g)=:B$$
$\Big(\Rightarrow O_Z(f+g)-U_Z(f+g)\leq B-A<\varepsilon$, d.h. $f+g$ integ.bar

Wegen $\int_a^b (f+g),\ \int_a^b f+\int_a^b g\in[A,B]$ folgt: $\int_a^b (f+g)=\int_a^b f+\int_a^b g\ \Big)$

zu $(*)$: Sei $Z=\{x_0<x_1<\dots<x_n\}$ und $i\in\{1,\dots,n\}$

$\Rightarrow m_i(f):=\inf f([x_{i-1},x_i])\leq f(y)$ für alle $y\in[x_{i-1},x_i]$

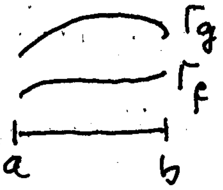
$\Rightarrow m_i(f)+m_i(g)\leq f(y)+g(y)=(f+g)(y)$ " " "

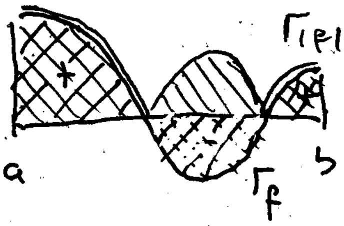
$\Rightarrow m_i(f)+m_i(g)\leq \inf (f+g)([x_{i-1},x_i])=:m_i(f+g)$

Mult. mit (x_i-x_{i-1}) und Aufsumm. liefert die Beh $(*)$.

$(**)$ analog.

2) – 5) ähnlich 2) $g = f + \underbrace{(g-f)}_{=:h\geq 0} \underset{1)}{\Rightarrow}$ reicht z.z. $h \geq 0 \Rightarrow \int_a^b h \geq 0$

2) 

3) 

blau $\leq$ rot

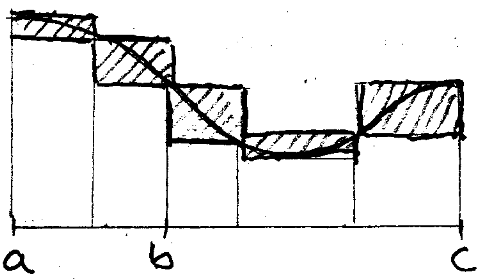
4) $\{x \in [a,b] \mid f(x) \neq g(x)\} = \{c_1, \dots, c_r\}$ endlich

Nach 1.5, 3) ist $\eta_{c_i}(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x = c_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ intbar mit $\int_a^b \eta_{c_i} = 0$

$$g = f + \sum_{i=1}^{r} \underbrace{(g(c_i) - f(c_i))}_{=:\lambda_i} \eta_{c_i}$$

$$\Rightarrow \int_a^b g \underset{1)}{=} \int_a^b f + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \underbrace{\int_a^b \eta_{c_i}}_{0} = \int_a^b f$$

5) Betrachte Zerlegungen Z von $[a,c]$ mit $b \in Z$



✓

<u>Def</u>: Für $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ integ.bar setzt man

$$\int_a^a f := 0 \quad , \quad \int_b^a f := -\int_a^b f$$

<u>Folg</u>: Ist $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ integrierbar, so gilt:

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f \qquad \text{für alle } a, b, c \in [\alpha, \beta]$$

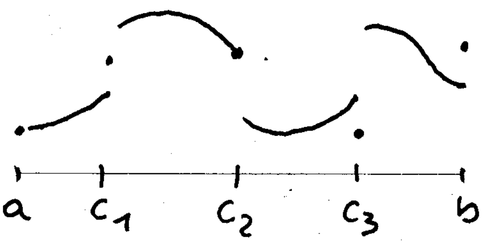
// z.B. für $c < a < b$

$$\int_c^b \underset{5)}{=} \int_c^a + \int_a^b \Rightarrow -\int_c^a = \int_a^b - \int_c^b \Rightarrow \int_a^c = \int_a^b + \int_b^c$$ ✓ //

1.9 Def: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ <u>stückweise stetig</u> $:\Leftrightarrow$

es gibt Punkte $a=c_0<c_1<\dots<c_m=b$ und stetige Fkt. $f_i:[c_{i-1},c_i]\to\mathbb{R}$ für $i=1,\dots,m$

mit $f(x)=f_i(x)$ für alle $x\in\,]c_{i-1},c_i[$, $i=1,\dots,m$



Satz: Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stückweise stetig wie oben

$\Rightarrow$ f ist integrierbar mit

$$\int_a^b f=\sum_{i=1}^m\int_{c_{i-1}}^{c_i}f_i$$

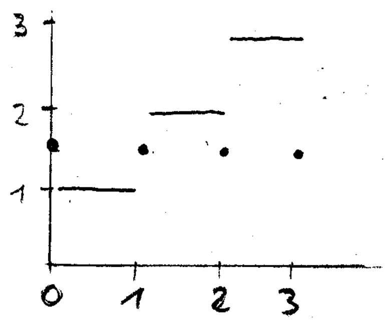
Bew: Für $i=1,\dots,m$:

$$\left.\begin{array}{l} f_i \text{ stetig, also int.bar} \\ f|_{[c_{i-1},c_i]}=f_i \text{ fast überall}\end{array}\right\}\ 1.8,4)$$

$$\Rightarrow\quad \int_a^b f\ \underset{\uparrow\,1.8,5)}{=}\ \sum_{i=1}^m\int_{c_{i-1}}^{c_i} f|_{[c_{i-1},c_i]}\ \overset{1.8,4)}{=}\ \sum_{i=1}^m\int_{c_{i-1}}^{c_i}f_i \qquad ✓$$

Beisp $f:[0,3]\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{für } 0<x<1\\ 2 & \text{"} \quad 1<x<2\\ 3 & \text{"} \quad 2<x<3\\ 3/2 & \text{"} \quad x\in\{0,1,2,3\}\end{cases}$$



f ist stückweise stetig mit

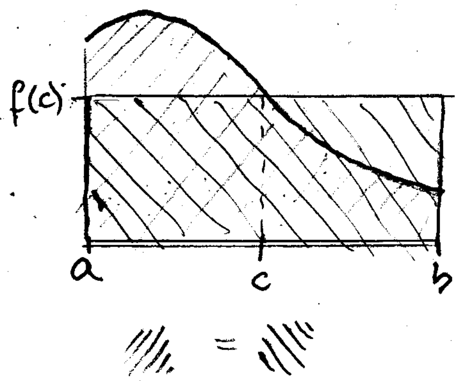
$$\int_0^3 f=\sum_{i=1}^3\underbrace{\int_{i-1}^i i}_{i}=1+2+3=6$$

1.10 Mittelwertsatz (der Integralrechnung)

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig

$\Rightarrow$ es gibt ein $c \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f = f(c) \cdot (b-a)$$



Satz (Verallg. MWS)

Seien $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $g \geq 0$

$\Rightarrow$ es gibt ein $c \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b fg = f(c) \int_a^b g$$

Bew: "Verallg. MWS $\Rightarrow$ MWS"

$$g = 1 \text{ const.} \Rightarrow \int_a^b g = \int_a^b 1 \underset{1.5,1)}{=} b-a$$

Verallg. MWS: $m := \min f([a,b])$, $M := \max f([a,b])$

$$\Rightarrow m \leq f \leq M \underset{g \geq 0}{\Rightarrow} mg \leq fg \leq Mg$$

$$\underset{1.8}{\Rightarrow} m \int_a^b g \underset{1)}{=} \int_a^b mg \underset{2)}{\leq} \int_a^b fg \underset{2)}{\leq} \int_a^b Mg \underset{1)}{=} M \int_a^b g$$

$$\Rightarrow \exists \mu \in [m, M]: \int_a^b fg = \mu \int_a^b g$$

f stetig $\underset{ZWS}{\Rightarrow} \exists c \in [a,b]: f(c) = \mu$ ✓

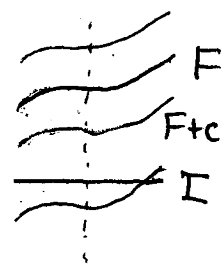
§ 2 Hauptsatz, Integralberechnung

Im Folg: $I \subset \mathbb{R}$ Intervall der Länge > 0

2.1 **Def**: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

$F : I \to \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion von f $:\Leftrightarrow$
F ist differenzierbar mit $F' = f$

Lemma: Sei $F : I \to \mathbb{R}$ Stammfkt. von $f : I \to \mathbb{R}$
Dann gilt für $G : I \to \mathbb{R}$:
G Stammfkt. von $f \iff \exists c \in \mathbb{R} : G = F + c$



Bew

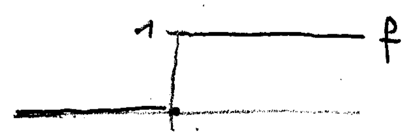
„$\Rightarrow$": $G' = f = F' \Rightarrow \left.\begin{array}{l}(G-F)' = G' - F' = 0\\ I \text{ Intervall}\end{array}\right\}$

$\underset{\text{Ana 1, 6.13}}{\Longrightarrow} \exists c \in \mathbb{R} : G - F = c$, d.h. $G = F + c$

„$\Leftarrow$": F diff.bar mit $F' = f$
$\Rightarrow G = F + c$ diff.bar mit $G' = F' + c' = f + 0 = f$ ✓

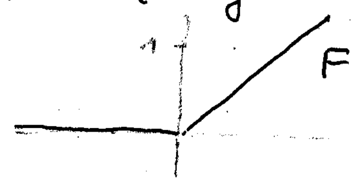
Bemerk: Nicht jede Funktion hat eine Stammfkt.

Beisp: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ 1 & \text{"} \quad x > 0 \end{cases}$



Ann: f hat Stammfkt F, und o.E. $F(0) = 0$ (wegen Lemma)

$\Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ x & \text{"} \quad x > 0 \end{cases}$



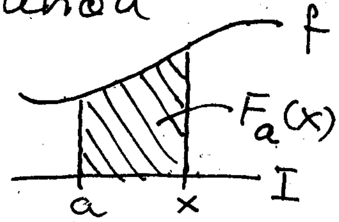
Aber F ist nicht diffbar in $x = 0$ Wid.

2.2 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Sei $f: I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:

1) Für jedes $a \in I$ ist die Integralfunktion

$$F_a : I \to \mathbb{R}$$
$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$



differenzierbar mit $F_a' = f$, d.h. F_a ist Stammfkt. von f.

2) Ist $F: I \to \mathbb{R}$ eine belieb. Stammfkt von f, so gilt für alle $a, b \in I$:

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) =: F\Big|_a^b \quad (= [F]_a^b)$$

<u>Bew</u>: 1) Seien $a, x \in I$ fest.

<u>zeigen</u>: $\lim\limits_{y \to x} \dfrac{F_a(y) - F_a(x)}{y - x} = f(x)$

$$\frac{F_a(y) - F_a(x)}{y-x} = \frac{1}{y-x}\left(\int_a^y f - \int_a^x f\right) \underset{1.8,\text{ Folg}}{=} \frac{1}{y-x} \cdot \int_x^y f$$

$$\underset{1.10}{=} \frac{1}{y-x} f(c_y)(y-x) \quad \text{für ein } c_y \text{ zwisch. } x \text{ und } y$$

$$= f(c_y) \xrightarrow[y \to x]{} \ ?$$

$$\begin{array}{ccccc} y & & c_y & & f(c_y) \\ \downarrow & \xRightarrow[\text{x und y}]{c_y \text{ zwisch.}} & \downarrow & \xRightarrow[f \text{ stetig}]{} & \downarrow \\ x & & x & & f(x) \end{array}$$

2) Sei $F: I \to \mathbb{R}$ Stammfkt von f, $a, b \in I$, und $F_a : I \to \mathbb{R}$ wie in 1).

$\underset{2.1}{\Rightarrow} \exists c \in \mathbb{R}: F = F_a + c$

$$\Rightarrow F(b) - F(a) = (F_a(b) + c) - (F_a(a) + c)$$
$$= \int_a^b f + \cancel{c} - \underbrace{\int_a^a f}_{0} - \cancel{c} = \int_a^b f \quad \checkmark$$

2.3 Bedeutung des Hauptsatzes (HS)

1) "Integration = Umkehrung von Differentiation"

für f stetig: $\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' \underset{HS\,1)}{=\!=} f(x)$

für f diffbar, mit f' stetig: $\int_a^x f'(t)\,dt \underset{HS\,2)}{=} f(x) - \underbrace{f(a)}_{\text{const}}$ (mehr kann man nicht erwarten)

2) HS 2) reduziert Berechnung von $\int_a^b f$ für f stetig auf zwei Schritte:

I) Finde eine Stammfkt. F von f

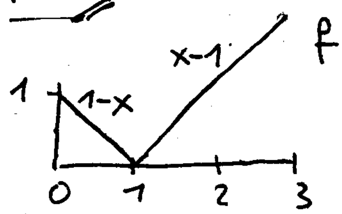
II) Berechne $F(b) - F(a)$

2.4 Beisp

1) $\int_1^2 \underbrace{(x^2-1)}_{f(x)}\,dx = \underbrace{\left(\frac{1}{3}x^3 - x\right)}_{F(x)}\Big|_1^2 = \underbrace{\left(\frac{8}{3}-2\right)}_{F(2)} - \underbrace{\left(\frac{1}{3}-1\right)}_{F(1)} = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$

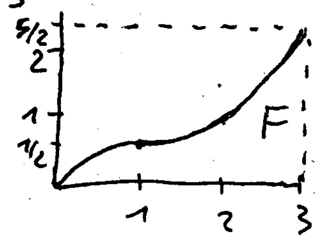
$\left(\frac{1}{3}x^3 - x\right)' = x^2 - 1 = f(x)$!

2) $\int_0^3 \underbrace{|x-1|}_{f(x)}\,dx = ?$



f hat Stammfkt

$$F(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{2}x^2 & \text{für } 0 \le x \le 1 \\ \frac{1}{2}x^2 - x + \cancel{c}1 & \text{für } 1 < x \le 3 \end{cases}$$



$c = ?$: $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 1 + c \Rightarrow c = 1$!

$\Rightarrow \int_0^3 f = F(x)\Big|_0^3 = F(3) - F(0) = \left(\frac{9}{2} - 3 + 1\right) - 0 = \underline{\underline{\frac{5}{2}}}$

Alternativ:

$\int_0^3 f = \int_0^1 f + \int_1^3 f = \int_0^1 (1-x)\,dx + \int_1^3 (x-1)\,dx$

$= \left(x - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)\Big|_1^3 = \left(\frac{1}{2} - 0\right) + \left(\frac{3}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{5}{2}$

2.5 <u>Def</u>: Sei $f: I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann heißt

$\int f := \int f(x)\,dx :=$ Menge der Stammfunktionen von f

das <u>unbestimmte Integral von f</u>.

Statt $F \in \int f$ schreibt man oft

$\int f = F$ Lies: "F ist eine Stammfkt. von f"

<u>Achtung!</u> $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3$ und $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + 1$, aber $\frac{1}{3}x^3 \neq \frac{1}{3}x^3 + 1$

<u>Bem</u>: Im Gegensatz zu $\int f$ nennt man $\int_a^b f$ "bestimmtes Integral"
⊛

<u>Wichtige Stammfunktionen</u>

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$
$\frac{1}{x},\ x \neq 0$	$\ln\lvert x \rvert$
$\sin x,\ \cos x$	$-\cos x,\ \sin x$
e^x	e^x
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$

zu $\ln\lvert x\rvert$ für $x < 0$:

$x < 0 \Rightarrow \lvert x \rvert = -x > 0 \Rightarrow \ln(-x)' = (-1) \cdot \frac{1}{-x} = \frac{1}{x}$

<u>Bem</u>: Folgende Funktionen haben keine "elementare" Stammfunktion:

$\frac{\sin x}{x}$, e^{-x^2}, $\frac{1}{\ln x}$ (siehe: Behrends, Ana 2, 6.6)

⊛ <u>MERKE</u>: | $\int f$ ist eine Menge von Funktionen
$\int_a^b f$ ist eine Zahl

Exkurs: Ergänzung zu 2.3, 1) (Bedeutung des Hauptsatzes)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall

$$W := \{ f : I \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig} \}$$
$$V := \{ F : I \longrightarrow \mathbb{R} \mid F \text{ stetig diff.bar} \}$$
$$\mathcal{U} := \{ F : I \longrightarrow \mathbb{R} \mid F \text{ konstant} \}$$

Dann sind V und W $\mathbb{R}$-Vektorräume, $\mathcal{U} \subset V$ ein 1-dim. Unterraum, und wir haben den Faktorraum (Lin A 2, 17.1)

$$V/\mathcal{U} = \{ \bar{F} = F + \mathcal{U} \mid F \in V \}$$

Nun betrachte die Abbildung $D : V \longrightarrow W$,

$$D(F) = F'$$

Es gilt:

1) $D : V \to W$ ist linear.
2) $\operatorname{Ker} D = \mathcal{U}$ (nach Ana 1, 6.13)
3) $D : V \to W$ ist surjektiv.

   [Nach HS 1) hat $f \in W$ eine Stammfunktion, z.B. $F_a(x) = \int_a^x f$. Dabei ist $F_a \in V$ und $D(F_a) = f$.]

4) Für jedes $a \in I$ ist $F_a + \mathcal{U} = \int f$ (nach Lemma 2.1)

Fazit

Die Abb. $D : V \to W$ induziert einen Isomorphism. $V/\mathcal{U} \simeq W$, der durch folgende zueinander inverse Abbildungen gegeben ist.

$$V/\mathcal{U} \rightleftarrows W$$
$$\bar{F} = F + \mathcal{U} \longmapsto F'$$
$$F_a + \mathcal{U} = \int f \longleftarrow\!\shortmid f$$

Bem: Die Aussage ist ein Spezialfall des Homomorphie-Satzes (siehe Lin A 2, 17.5, u. vgl. Alg Zth 2, 10.1, 14.1)

Integrationsmethoden

2.6 Linearität: Seien $f,g: I \to \mathbb{R}$ stetig, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$\Rightarrow \int(\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$$

und $\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$ für alle $a,b \in I$

Γ sei $\int f = F$ und $\int g = G$

$$\Rightarrow (\alpha F + \beta G)' = \alpha F' + \beta G' = \alpha f + \beta g$$

d.h. $\int(\alpha f + \beta g) = \alpha F + \beta G$

Für bestimmte Integrale siehe 1.8, 1)

—

<u>Def</u>: $f: I \to \mathbb{R}$ <u>stetig differenzierbar</u> $:\Leftrightarrow$ f ist diff.bar und f' stetig

2.7 Satz (Partielle Integration)

Seien $f,g: I \to \mathbb{R}$ stetig diff.bar. Dann gilt:

$$\int f'g = fg - \int fg'$$

und $\int_a^b f'g = fg\Big|_a^b - \int_a^b fg'$ für alle $a,b \in I$

<u>Bew</u>: $fg: I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)g(x)$ ist diffbar mit

$(fg)' = f'g + fg'$ (Produktregel)

$$\Rightarrow fg = \int(f'g + fg') \underset{2.6}{=} \int f'g + \int fg'$$

und $fg\Big|_a^b \underset{HS\,2)}{=} \int_a^b (f'g + fg') = \int_a^b f'g + \int_a^b fg'$

$$\Rightarrow \int_a^b f'g = fg\Big|_a^b - \int_a^b fg' \quad ✓$$

2.8 Beisp

1) $\int \underset{g}{x}\,\underset{f'}{\sin x}\,dx = \underset{f}{(-\cos x)}\,\underset{g}{x} - \int -\cos x\,dx = -x\cos x + \underbrace{\int \cos x\,dx}_{\sin x}$

$\int_0^{\pi} x\sin x\,dx = (-x\cos x + \sin x)\Big|_0^{\pi} = -\pi\underbrace{\cos\pi}_{-1} + \underbrace{\sin\pi}_{0} + 0 - 0 = \underline{\underline{\pi}}$

2) $\int \underset{g}{(x^2+3x)}\,\underset{f'}{e^{2x}}\,dx = \underset{g}{(x^2+3x)}\underbrace{\tfrac{1}{2}e^{2x}}_{f} - \underbrace{\int \underset{v}{(2x+3)}\,\underbrace{\tfrac{1}{2}e^{2x}}_{u'}\,dx}_{(2x+3)\frac{1}{4}e^{2x} - \underbrace{\int \frac{1}{2}e^{2x}dx}_{\frac{1}{4}e^{2x}}}$

$= (2x^2+6x-2x-3+1)\tfrac{1}{4}e^{2x}$

$= \tfrac{1}{2}(x^2+2x-1)\,e^{2x}$

MERKE: Bei $\int$ Polyn·trigonFkt oder $\int$ Polyn·exp-Fkt arbeite Polynom ab.

3) $\int \underset{f'}{e^x}\,\underset{g}{\sin x}\,dx = e^x\sin x - \underbrace{\int \underset{u'}{e^x}\,\underset{v}{\cos x}\,dx}_{e^x\cos x + \int e^x \sin x\,dx}$

$\Rightarrow \cancel{2}\int e^x\sin x\,dx = \tfrac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x)$

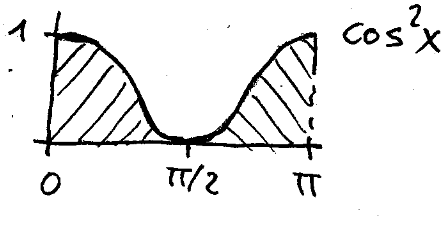
4) $\int \cos^2 x\,dx = \int \underset{f'}{\cos x}\,\underset{g}{\cos x}\,dx = \sin x\cos x - \int \sin x(-\sin x)\,dx$

$= \sin x\cos x + \underbrace{\int \sin^2 x\,dx}_{\int(1-\cos^2 x)dx = \underbrace{\int 1}_{x} - \int \cos^2 x\,dx}$

$\Rightarrow \int \cos^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}(x + \sin x\cos x)$

und $\int_0^{\pi} \cos^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}(x+\sin x\cos x)\Big|_0^{\pi}$

$= \tfrac{1}{2}(\pi + 0 - 0 - 0) = \pi/2$



5) $\int \ln x\,dx = \int \underset{f'}{1}\cdot\underset{g}{\ln x}\,dx = x\ln x - \underbrace{\int \underbrace{x\cdot\tfrac{1}{x}}_{1}dx}_{x} = x(\ln x - 1)$

2.9 <u>Satz</u> (Substitutionsregel)

Sei $f: I \to \mathbb{R}$ stetig und
$\varphi: [a,b] \to I$ stetig diff.bar

Dann gilt:

$$\int (f\circ\varphi)\varphi' = (\int f)\circ\varphi$$

$$\int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx$$

<u>Bew</u>: Sei $F: I \to \mathbb{R}$ Stammfkt. von f, d.h. $\int f = F$

$$\Rightarrow (F\circ\varphi)' \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Kettenreg.}}}{=} (F'\circ\varphi)\varphi' = (f\circ\varphi)\varphi',$$

$\Rightarrow$ $F\circ\varphi$ ist Stammfkt von $(f\circ\varphi)\varphi'$

d.h. $\int (f\circ\varphi)\varphi' = F\circ\varphi$

$$\Rightarrow \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \underset{HS}{=} (F\circ\varphi)(t)\Big|_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) \underset{HS}{=} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx$$

✓

<u>Bem</u>:

1) Merkhilfe: $\boxed{\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ dx &= \varphi'(t)\,dt \end{aligned}}$ $\quad \frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$ Leibniz-notation

2) <u>Anwend.</u> gegeben neu

Methode I: $$\int_a^b f(\underbrace{\varphi(x)}_{u})\,\underbrace{\varphi'(x)\,dx}_{du} = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,du$$

Methode II: $$\int_a^b f(\underset{\substack{\| \\ \varphi(t)}}{x})\,\underbrace{dx}_{\varphi'(t)dt} = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

2.10 Beisp

1) $\displaystyle\int_4^9 \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = ?$

Meth. I: $\displaystyle\int_4^9 \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = \int_4^9 \cos\sqrt{x}\,\frac{2}{2\sqrt{x}}\,dx$

$f = \cos$

$u = \varphi(x) = \sqrt{x}$

$\frac{du}{dx} = \varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$

$\displaystyle \underset{\substack{u=\sqrt{x}\\ du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx}}{=} 2\int_{u(4)=2}^{u(9)=3} \cos u\,du$

$= 2 \sin u \Big|_2^3$

$= 2(\sin 3 - \sin 2)$

Meth II: $\displaystyle\int_{4\leftarrow x}^9 \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx \underset{\substack{x=t^2\\ dx=2t\,dt}}{=} \int_{2\leftarrow t}^3 \frac{\cos t}{\cancel{t}}\,2\cancel{t}\,dt$

$\sqrt{x}$ stört

$x = \varphi(t) = t^2$

$\frac{dx}{dt} = \varphi'(t) = 2t$

$dx = 2t\,dt$

$\displaystyle = 2\int_2^3 \cos t\,dt = 2 \sin t\Big|_2^3$

$= 2(\sin 3 - \sin 2)$

2) $\displaystyle\int 4x e^{x^2+3}\,dx \underset{\substack{u=x^2+3\\ du=2x\,dx}}{=} \int 2e^u\,du = 2e^u \underset{\uparrow\, u=x^2+3}{=} 2e^{x^2+3}$

3) $\displaystyle\int \sin^2(5x)\cos(5x)\,dx \underset{\substack{u=\sin(5x)\\ du=5\cos(5x)\,dx}}{=} \frac{1}{5}\int u^2\,du = \frac{1}{15}u^3 \underset{\uparrow\, u=\sin(5x)}{=} \frac{1}{15}\sin^3(5x)$

4) $\displaystyle\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx \underset{\substack{u=\cos x\\ du=-\sin x\,dx}}{=} -\int \frac{1}{u}\,du = -\ln(u) = \underline{-\ln(\cos x)}$

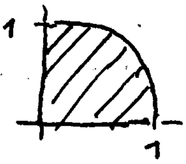
5) Lineare Substitution: Sei F Stammfkt. von f und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$

$$\int f(\alpha x+\beta)\,dx \underset{\substack{u=\alpha x+\beta\\ du=\alpha\,dx}}{=} \frac{1}{\alpha}\underbrace{\int f(u)\,du}_{F(u)} = \frac{1}{\alpha}F(\alpha x+\beta)$$

6) $$\int_3^5 x(x-2)^{10}\,dx \underset{\substack{x=t+2\\ dx=dt}}{=} \int_{3-2}^{5-2}(t+2)\,t^{10}\,dt = \int_1^3 (t^{11}+2t^{10})\,dt$$

$$= \left(\frac{1}{12}t^{12}+\frac{2}{11}t^{11}\right)\Big|_1^3 = \frac{3^{12}}{12}+\frac{2\cdot 3^{11}}{11}-\frac{1}{12}-\frac{2}{11}$$

7) $$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = ?$$



$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx \underset{\substack{x=\sin t\\ dx=\cos t\,dt}}{=} \int_0^{\pi/2} \underbrace{\sqrt{1-\sin^2 t}}_{\cos t}\,\cos t\,dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt \underset{2.8,4)}{=} \frac{1}{2}(t+\sin t\cos t)\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+0-0-0\right) = \frac{\pi}{4}$$

8) $\int \ln x\,dx$ (alternativ zu 2.8,5))

$$\int \ln x\,dx \underset{\substack{x=e^t\\ dx=e^t dt}}{=} \int \underbrace{\ln(e^t)}_{t\ (g)}\,\underbrace{e^t}_{f'}\,dt \underset{\text{P.I.}}{=} t e^t - \underbrace{\int e^t dt}_{e^t}$$

$$= (t-1)e^t \underset{t=\ln x}{=} (\ln x-1)\,x$$

Rationale Funktionen sind Funkt. der Form

$$\frac{p(x)}{q(x)}, \text{ wobei } p(x), q(x) \text{ Polynome}$$

zwei Beispiele mit $\operatorname{grad} p(x) < \operatorname{grad} q(x) = 2$

9) $$\int \frac{2x+3}{x^2+4}\,dx = \underbrace{\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int \frac{3}{x^2+4}\,dx}_{I_2}$$

$$I_1 \underset{\substack{u = x^2+4 \\ du = 2x\,dx}}{=} \int \frac{1}{u}\,du = \ln(x^2+4)$$

$$I_2 = \frac{3}{4}\int \frac{1}{1+\frac{1}{4}x^2}\,dx = \frac{3}{4}\int \frac{1}{1+(\frac{x}{2})^2}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{1}{1+u^2}\,du$$

$$u = \frac{x}{2}, \quad du = \frac{1}{2}dx$$

$$= \frac{3}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \int \frac{2x+3}{x^2+4}\,dx = \ln(x^2+4) + \frac{3}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)$$

10) $$\int \frac{2x+5}{x^2-3x+2}\,dx = ?$$

Finde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\frac{2x+5}{x^2-3x+2} = \frac{2x+5}{(x-1)(x-2)} = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x-2}$$ (Partialbruch-zerlegung)

$$2x+5 = \alpha(x-2) + \beta(x-1) = (\alpha+\beta)x + (-2\alpha-\beta)$$

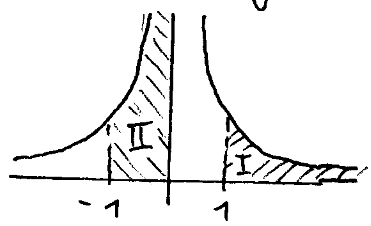
$$\underset{\text{Koeff.vergl.}}{\Longleftrightarrow} \left| \begin{aligned} \alpha+\beta &= 2 \\ -2\alpha-\beta &= 5 \end{aligned} \right. \Longleftrightarrow \left| \begin{aligned} +\alpha &= -7 \\ \beta &= 9 \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow \int \frac{2x+5}{x^2-3x+2}\,dx = \int \left(\frac{-7}{x-1} + \frac{9}{x-2}\right) dx$$

$$= -7\ln(x-1) + 9\ln(x-2)$$

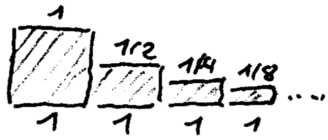
§ 3 Uneigentliche Integrale

$f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$



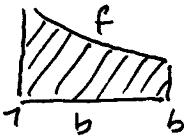
Frage: Haben I bzw II endl. Flächeninhalt?

unbeschr & endl. Inhalt?



$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2$!

Idee:



$1 < b < +\infty$! Wie bei Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

$\int_1^b f \xrightarrow[b\to\infty]{} ?$ $\qquad s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \xrightarrow[n\to\infty]{} ?$

3.1 Ein uneigentl. Integral $\int_a^\beta f$ mit kritischem Randpkt. β ist gegeben durch Fkt $f: [a, \beta[\to \mathbb{R}$, $a < \beta \leq +\infty$, mit

1) $f|_{[a,b]}$ integbar für alle $b \in [a, \beta[$

2) $\beta = +\infty$ oder f nicht beschränkt (bei β)

Bem: -) f stetig $\Rightarrow$ 1) ist erfüllt

-) $\beta < +\infty \Rightarrow \forall b < \beta: f|_{]b,\beta[}$ nicht beschr.,
d.h. β ist "Singularität" von f

Def: $\int_a^\beta f$ konvergiert $:\Leftrightarrow \lim_{b \nearrow \beta} \int_a^b f$ existiert (in $\mathbb{R}$)

In diesem Fall: $\int_a^\beta f := \lim_{b \nearrow \beta} \int_a^b f$ Wert des uneig. Int.

Andernfalls heißt $\int_a^\beta f$ divergent.

$\int_a^\beta f$ bestimmt divergent $:\Leftrightarrow \lim_{b\nearrow\beta} \int_a^b f = +\infty$ $(-\infty)$

Analog: uneigentl. Int. $\int_\alpha^b f$ mit krit. Randpkt. $\alpha \geq -\infty$

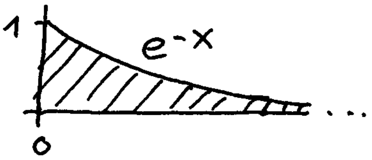
Für $\int_\alpha^\beta f$ mit α und β kritisch spaltet man auf:

$$\int_\alpha^\beta f = \int_\alpha^c f + \int_c^\beta f \quad \text{für ein } c \in]\alpha, \beta[$$

$\int_\alpha^\beta f$ konv. $:\Leftrightarrow$ beide konv. (unabh. von c)

3.2 Beisp

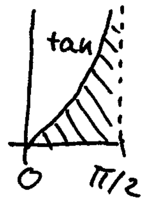
1) $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$



$$\int_0^b e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^b = -e^{-b} + \underbrace{e^0}_{1} = 1 - e^{-b} \xrightarrow[b\to\infty]{} 1 - 0 = 1$$

Also: $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$ konverg. mit Wert $\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$

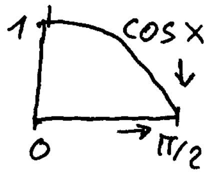
2) $\int_0^{\pi/2 \leftarrow \text{krit.}} \tan x\,dx$

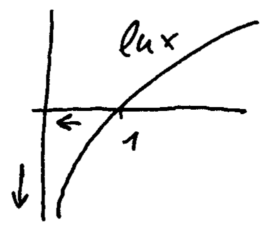


$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \xrightarrow[x \nearrow \frac{\pi}{2}]{} +\infty$$

$$\int_0^b \tan x\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ 2.10,4)}}{=} -\ln(\cos x)\Big|_0^b = -\ln(\cos b) + \underbrace{\ln(\overset{1}{\cos 0})}_{0}$$

$$\lim_{b \nearrow \frac{\pi}{2}} -\ln(\cos b) = \lim_{y \searrow 0} -\ln(y)$$
$$= -(-\infty) = +\infty$$

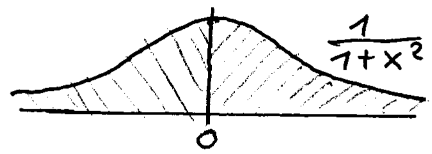




Alo: $\int_0^{\pi/2} \tan x\,dx$ divergiert bestimmt

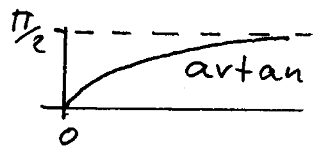
mit $\int_0^{\pi/2} \tan x\,dx = +\infty$

3) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$



$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$: $\int_0^b \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x\Big|_0^b$

$$= \arctan b - 0 \xrightarrow[b\to\infty]{} \pi/2$$



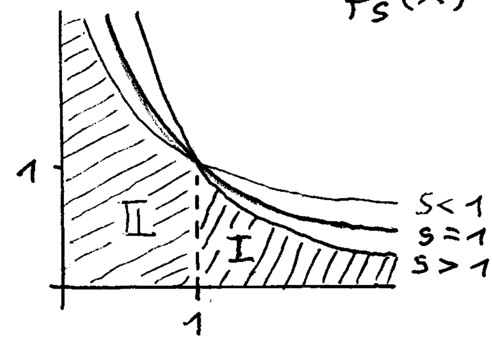
Also: $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$

Analog: $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ konverg. mit Wert $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi$

4) Sei $s>0$ und $f_s:]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$f_s(x) = \frac{1}{x^s}$$



$$\overset{\text{krit}\to\infty}{\underset{\text{Krit}\to 0}{\int}} \frac{1}{x^s}\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{x^s}\,dx$$

Bek: I) $\int_1^\infty \frac{1}{x^s}dx = \frac{1}{s-1}$ für $s>1$, und $+\infty$ sonst.

II) $\int_0^1 \frac{1}{x^s}dx = \frac{1}{1-s}$ für $s<1$, und $+\infty$ sonst.

$s=1$: $\int_1^b \frac{1}{x}dx = \ln b - \underbrace{\ln 1}_{0} \xrightarrow[b\to\infty]{} +\infty \Rightarrow \int_1^\infty \frac{1}{x}dx = +\infty$

$\int_a^1 \frac{1}{x}dx = \underbrace{\ln 1}_{0} - \ln a \xrightarrow[a\searrow 0]{} \underbrace{-(-\infty)}_{+\infty} \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{x}dx = +\infty$

$s>1$: $\int_1^b \frac{1}{x^s}dx = \frac{1}{1-s}x^{1-s}\Big|_1^b = \frac{1}{1-s}\underbrace{\left(\frac{1}{b}\right)^{s-1}}_{\uparrow >0} - \frac{1}{1-s} \xrightarrow[b\to\infty]{} -\frac{1}{1-s} = \frac{1}{s-1}$

$\Rightarrow \int_1^\infty \frac{1}{x^s}dx = \frac{1}{s-1}$

$\left.\begin{array}{l}\forall x \in]0,1]: \frac{1}{x^s} \geq \frac{1}{x} \\ \int_0^1 \frac{1}{x}dx = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{x^s}dx = +\infty$

$s<1$: $\left.\begin{array}{l}\forall x \in [1,\infty[: \frac{1}{x^s} \geq \frac{1}{x} \\ \int_1^\infty \frac{1}{x}dx = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \int_1^\infty \frac{1}{x^s}dx = +\infty$

$\int_a^1 \frac{1}{x^s}dx = \frac{1}{1-s}x^{1-s}\Big|_a^1 = \frac{1}{1-s} - \frac{1}{1-s}\underbrace{a^{1-s}}_{\uparrow >0} \xrightarrow[a\searrow 0]{} \frac{1}{1-s} - 0$

$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{x^s}dx = \frac{1}{1-s}$

3.3 Satz (Majoranten-Kriterium)

Seien $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ stetig mit $|f| \le g$

Dann gilt:

$$\int_a^b g \text{ konv.} \Rightarrow \int_a^b f \text{ konv.}$$

Siehe z.B. Fritzsche, Analysis 1, 4.4

Ähnl. wie Majo-Krit. für Reihen: Ana 1, 3.7

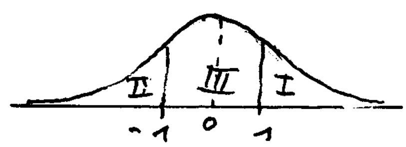
Beisp

1) Beh: $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x+x^2}\,dx$ konverg.

$\forall x \ge 1 : \left|\frac{\cos x}{x+x^2}\right| = \frac{|\cos x|}{x+x^2} \le \frac{1}{x+x^2} \le \frac{1}{x^2}$

Nach 3.2, 4): $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ konverg. $\left.\right\} \underset{\text{Satz}}{\Longrightarrow}$ Beh

2) Beh: $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx$ konverg.



I) $\forall x \ge 1 : x^2 \ge x$, also $e^{-x^2} \le e^{-x}$

Nach 3.2, 1): $\int_1^\infty e^{-x}\,dx$ konv. $\left.\right\} \underset{\text{Satz}}{\Longrightarrow} \int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$ konv.

II) Analog: $\int_{-\infty}^{-1} e^{-x^2}\,dx$ konv.

III) $\int_{-1}^{1} e^{-x^2}\,dx$ ist endlich

Bem: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$

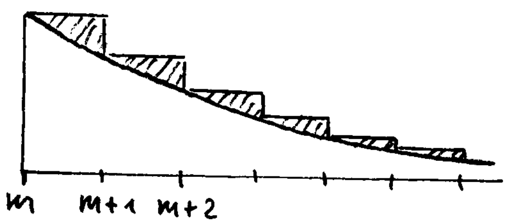
3.4 <u>Satz</u> (Integralkriterium): Sei $m \in \mathbb{N}_0$ und $f: [m, \infty[\to \mathbb{R}$ monoton fallend mit $f \geq 0$.

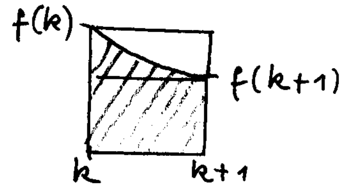
Dann gilt:

$$\sum_{k=m}^{\infty} f(k) \text{ konverg.} \iff \int_m^{\infty} f(x)\,dx \text{ konverg.}$$

In diesem Fall:

$$0 \leq \sum_{k=m}^{\infty} f(k) - \int_m^{\infty} f(x)\,dx \leq f(m)$$





<u>Bew</u>: $\forall k \geq m: \quad f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f \leq f(k)$

$$\Rightarrow \forall n \geq m: \sum_{k=m+1}^{n+1} f(k) = \sum_{k=m}^{n} f(k+1) \leq \int_m^{n+1} f \leq \sum_{k=m}^{n} f(k) \qquad (*)$$

„$\Rightarrow$": Sei $S := \sum_{k=m}^{\infty} f(k)$ und $F(b) := \int_m^b f(x)\,dx$ für $b \geq m$

$\left.\begin{array}{l} f \geq 0 \Rightarrow F \text{ mon. steigend} \\ (*) \Rightarrow \forall b \geq m: F(b) \leq S \end{array}\right\}$

$\Rightarrow$ es exist. $\int_m^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to \infty} F(b) \quad (= \sup F([m, \infty[))$

und $\int_m^{\infty} f(x)\,dx \leq S = \sum_{k=m}^{\infty} f(k)$

„$\Leftarrow$": Sei $I := \int_m^{\infty} f(x)\,dx$ und $\left(s_n := \sum_{k=m}^{n} f(k)\right)_{n \geq m}$ Folge

$\left.\begin{array}{l} f \geq 0 \Rightarrow (s_n)_{n \geq m} \text{ mon. steig.} \\ (*) \Rightarrow \forall n \geq m: \; s_n \leq I + f(m) \end{array}\right\}$

$\underset{\text{Ana1 } 2.13}{\Longrightarrow} \sum_{k=m}^{\infty} f(k)$ Konverg und $\sum_{k=m}^{\infty} f(k) \leq \int_m^{\infty} f(x)\,dx + f(m)$ ✓

Beisp (Für $s>0$ gilt:)

1) Beh: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ konverg. $\iff$ $s>1$

// $f(x)=\frac{1}{x^s}$, $x\geq 1$, ist mon. fall. und ≥ 0

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{k^s}}_{f(k)} \text{ konv.} \underset{3.4}{\iff} \int_1^{\infty} \underbrace{\frac{1}{x^s}}_{f(x)} dx \text{ konv.} \underset{3.2,4)}{\iff} s>1$$

2) Beh: $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$ ist divergent

// zeigen: $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$ ist div. $\left(\underset{3.4}{\Longrightarrow} \text{Beh}\right)$

$$\int_2^b \frac{1}{x\ln x} dx \underset{\text{Aufg 4.4, b)}}{=} \ln(\ln b) - \ln(\ln 2) \xrightarrow[b\to\infty]{} +\infty$$

3.5 Folg: Sei $\varepsilon > 0$ und

$f: [1,\infty[\to \mathbb{R}$ mon. fall., ≥ 0 mit $\int_1^{\infty} f$ konverg.

Weiter sei $m \in \mathbb{N}$ mit $f(m) < \varepsilon$ und

$$A := \sum_{k=1}^{m-1} f(k) + \int_m^{\infty} f(x)\,dx$$

Dann gilt:

$$A \leq \sum_{k=1}^{\infty} f(k) < A + \varepsilon$$

// Nach 3.4 gilt: $0 \leq \displaystyle\sum_{k=m}^{\infty} f(k) - \int_m^{\infty} f \leq f(m)$.

Nun addiere A.

Beisp: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = ?$ bis auf $\varepsilon = 0.01$

$\frac{1}{m^2} < 0.01 \iff m > 10$. Wähle $m = 11$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{10^2} \approx 1.550 \\ &\int_{11}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{x}\Big|_{11}^{b} = +\frac{1}{11} \approx 0.091 \end{aligned}\right\} + = A \approx 1.641$$

$$\Rightarrow \quad 1.641 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 1.651$$

Genauer Wert: $\frac{\pi^2}{6} \approx 1.6449$

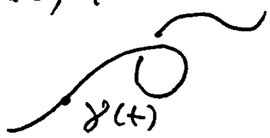
§ 4 Anwendung der Integralrechn.
(Längen, Volumen, Flächen)

4.1 Kurven im $\mathbb{R}^n$

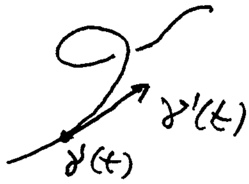
Def: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall der Länge > 0.

1) Eine **C^1-Kurve** ist eine Abb. $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$,
$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$$
mit $\gamma_i : I \to \mathbb{R}$ stetig diff.bar für $i = 1, .., n$

2) $\gamma(I) := \{\gamma(t) \mid t \in I\}$ heißt **Bahn** von γ

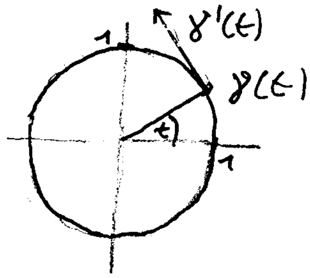


3) Für jedes $t \in I$ heißt
$$\gamma'(t) := (\gamma_1'(t), \dots, \gamma_n'(t))$$
Ableitung oder **Tangentenvektor** von γ in t



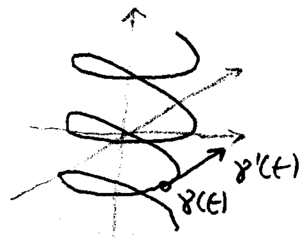
4.2 Beisp

1) $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$
$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$



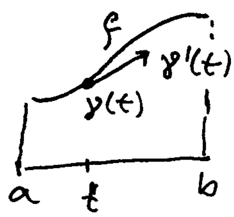
Bahn = Einheitskreis

2) $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$
$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$



Bahn = Spirale

3) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stet. diff.bar
$\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$\gamma(t) = (t, f(t))$
$\gamma'(t) = (1, f'(t))$



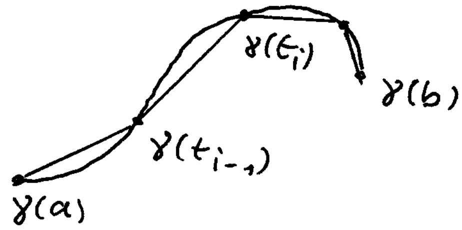
Bahn = Graph von f

Bem: Physikalische Interpret. von $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$
$\gamma(t)$ = Position eines Teilchens zum Zeitpkt t
$\gamma'(t)$ = Geschwind. des " " " t

Erinn: Für $\overline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$: $\|\overline{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ Norm von $\overline{x}$

4.3 Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ C^1-Kurve

$\{a = t_0 < t_1 < \dots < t_r = b\}$ Zerl. v. $[a,b]$



Länge des Polygonzugs

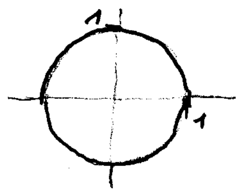
$$= \sum_{i=1}^{r} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \Big\| \underbrace{\frac{\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}}_{\approx \gamma'(t_i)} \Big\| \cdot \underbrace{(t_i - t_{i-1})}_{\Delta t_i}$$

Def: $L(\gamma) := \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$ Länge von γ

4.4 Beisp

1) $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

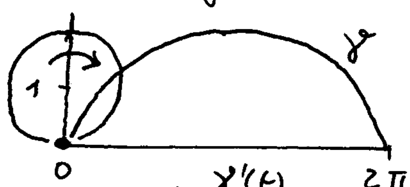


$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$

$\|\gamma'(t)\| = \|(-\sin t, \cos t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$

$\Rightarrow L(\gamma) = \int_0^{2\pi} 1 \, dt = \underline{\underline{2\pi}}$ Kreisumfang v. Einheitskreis

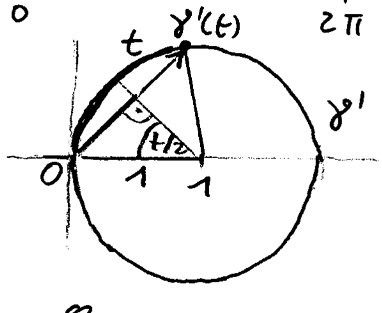
2) $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$



Zykloide

$\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$

$\gamma'(t) = (1 - \cos t, \sin t)$



$\|\gamma'(t)\| = 2 \cdot \sin(t/2)$

$\Rightarrow L(\gamma) = \int_0^{2\pi} 2 \sin(t/2) \, dt$

$= -4 \cos(t/2) \Big|_0^{2\pi} = 4 - (-4) = \underline{\underline{8}}$

3) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig diff.bar

$\gamma(t) = (t, f(t))$

$\|\gamma'(t)\| = \|(1, f'(t))\| = \sqrt{1 + f'(t)^2}$

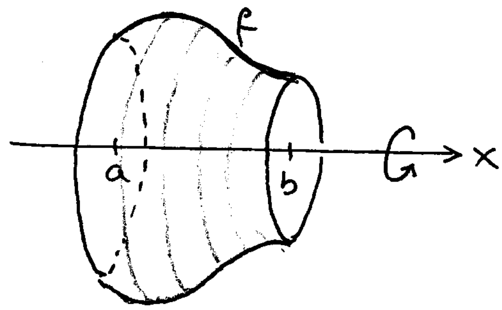
$\Rightarrow L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} \, dt$ Länge des Graphen von f

4.5 Rotationskörper und -flächen

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $f\geq 0$, stetig diff.bar

Zugeh. Rotationskörper bei Drehung um x-Achse

$$K := \left\{ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} a\leq x\leq b \\ y^2+z^2\leq f(x)^2 \end{array} \right\}$$



zugeh. Mantelfläche

$$M := \left\{ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} a\leq x\leq b \\ y^2+z^2= f(x)^2 \end{array} \right\}$$

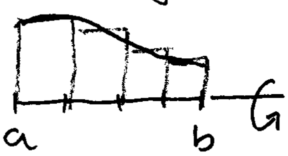
Dann gilt:

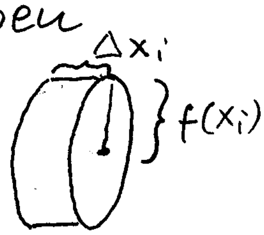
$$V = \pi\int_a^b f(x)^2\,dx \qquad \text{Volumen von } K$$

$$F = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx \qquad \text{Inhalt von } M$$

zu V: Approx. durch Zylinderscheiben

$$V \approx \sum_{i=1}^{r} V_i$$

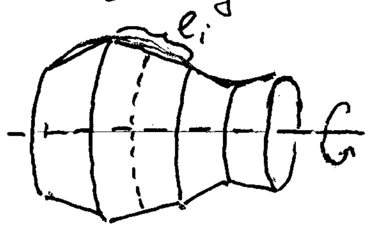


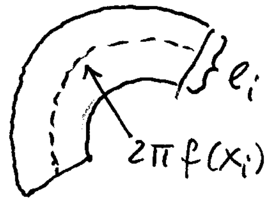


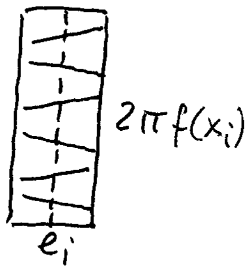
$$V_i = \underbrace{\pi f(x_i)^2}_{\text{Grundfl.}}\cdot\underbrace{\Delta x_i}_{\text{Höhe}}$$

zu F: Approx durch Kegelstumpfmäntel

$$F \approx \sum_{i=1}^{r} F_i$$

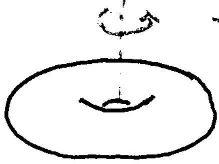






$$l_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \underbrace{\Delta y_i}_{f'(x_i)\Delta x_i}{}^2} = \sqrt{1+f'(x_i)^2}\,\Delta x_i$$

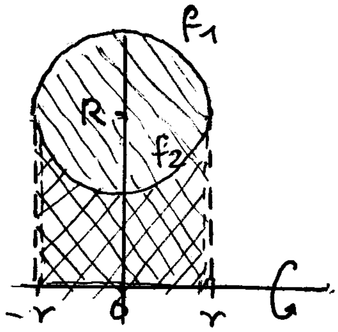
$$F_i = \underbrace{2\pi f(x_i)}_{\text{Länge}}\cdot\underbrace{l_i}_{\text{Breite}} = 2\pi f(x_i)\sqrt{1+f'(x_i)^2}\,\Delta x_i$$

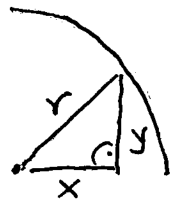
4.6 <u>Beisp</u> Torus  Volumen, Oberfläche?

$f_{1,2} : [-r, r] \longrightarrow \mathbb{R}$

$f_1(x) = R + \sqrt{r^2 - x^2}$

$f_2(x) = R - \sqrt{r^2 - x^2}$





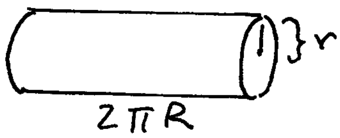
$$V = V_1 - V_2$$

$$= \pi \int_{-r}^{r} \underbrace{(f_1(x)^2 - f_2(x)^2)}_{(f_1+f_2)(f_1-f_2)} dx = \pi \int_{-r}^{r} 2R \, 2\sqrt{r^2-x^2}\, dx$$

$$= 4\pi R \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2}\, dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{symm}}}{=} 8\pi R \int_0^{r} \sqrt{r^2-x^2}\, dx$$

$$\underset{\substack{x = rt \\ dx = r\,dt}}{=} 8\pi R \int_0^1 \underbrace{\sqrt{r^2 - r^2t^2}}_{r\sqrt{1-t^2}}\, r\,dt = 8\pi R r^2 \underbrace{\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\, dt}_{\pi/4 \text{ nach } 2.10{,}7)}$$

$$= \underline{\underline{2\pi^2 R r^2}} = \underset{\text{Länge}}{\underbrace{2\pi R}} \cdot \underset{\text{Querschitt}}{\underbrace{\pi r^2}}$$



<u>zu F</u>: $f_{1,2}(x) = R \pm \sqrt{r^2-x^2}$, $f_{1,2}'(x) = \pm \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{r^2-x^2}}$

$$\Rightarrow \sqrt{1 + f_{1,2}'(x)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2-x^2}} = \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

$$\Rightarrow F = F_1 + F_2$$

$$= 2\pi \int_{-r}^{r} \underbrace{(f_1(x) + f_2(x))}_{2R} \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\, dx = 4\pi R \int_{-r}^{r} \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\, dx$$

$$\underset{\substack{x = rt \\ dx = r\,dt}}{=} 4\pi R \int_{-1}^{1} \frac{r}{\cancel{r}\sqrt{1-t^2}}\, \cancel{r}\,dt = 4\pi R r \underbrace{\arcsin t \Big|_{-1}^{1}}_{\pi/2 - (-\pi/2) = \pi}$$

$$= \underline{\underline{4\pi^2 R r}} = 2\pi R \cdot 2\pi r$$

Mehrdimensionale Analysis

Ana 1: $\mathbb{R} \supset D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

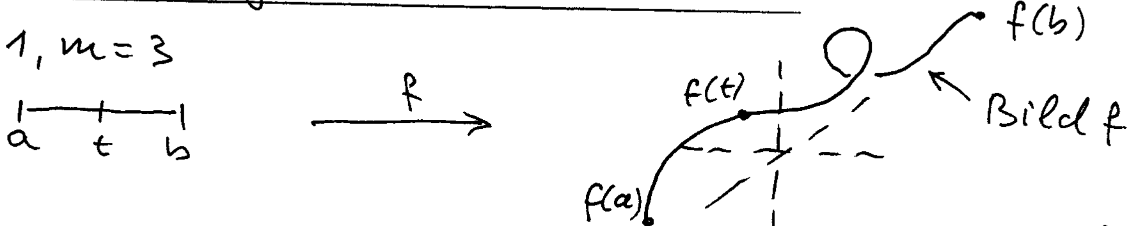
Ana 2: $\mathbb{R}^n \supset D \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$

Beisp

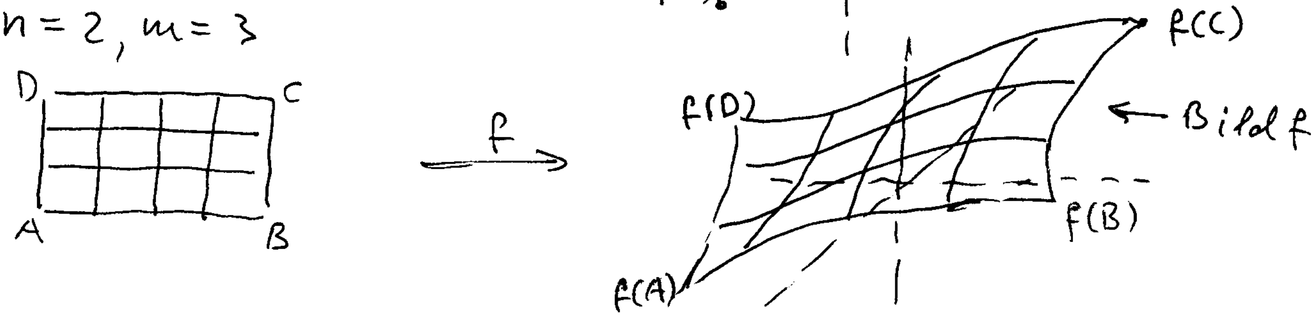
1) $f: [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(t) = (\cos t, \sin t)$
2) $V: \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}$, $V(r,h) = \pi r^2 h$ Vol. von 
3) $T: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$, $T(x,y,z,t)$ = Temperatur am Ort (x,y,z) zum Zeitpkt. t
4) $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (xe^y, y^2 - 3xy)$

Darstellung von $\mathbb{R}^n \supset D \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$

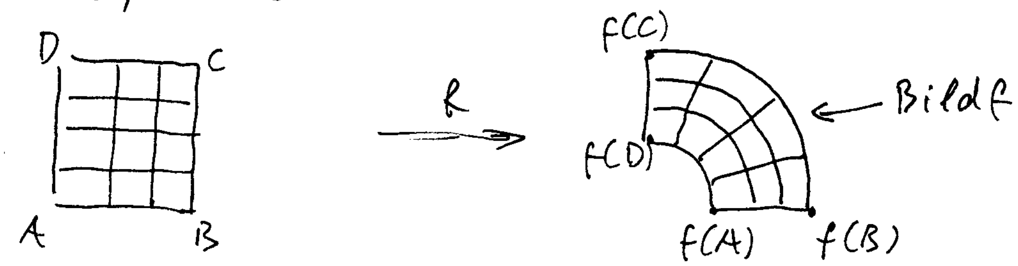
$n = 1, m = 3$



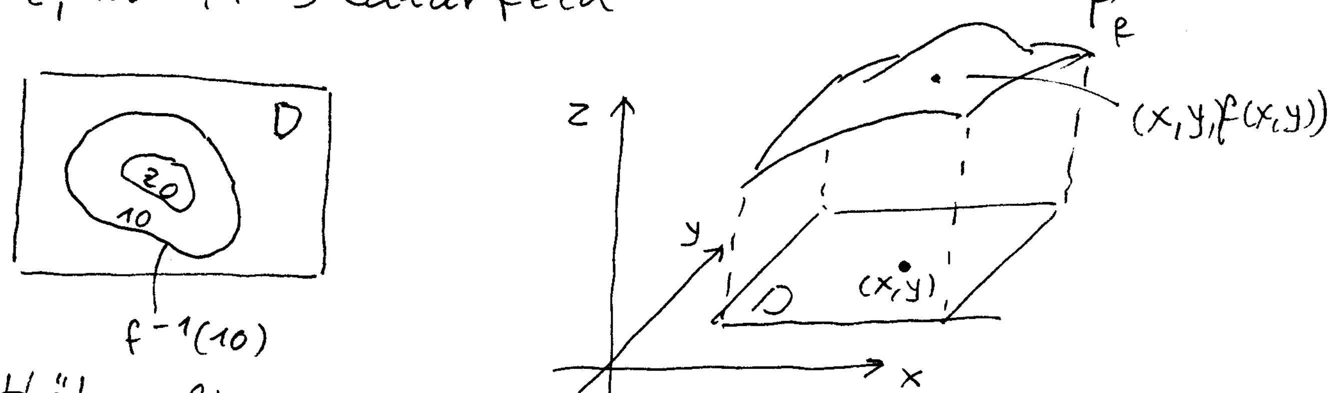
$n = 2, m = 3$



$n = 2, m = 2$



$n = 2, m = 1$: Skalarfeld



Höhenlinie

Γ_f = Graph von f

§5 Grenzwerte, Stetigkeit

Im Folgenden

$$\mathbb{R}^n := \{\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

$\mathbb{R}^n$ ist $\mathbb{R}$-Vektorraum via

$$\left.\begin{array}{l} \bar{x} + \bar{y} := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \\ \lambda \bar{x} := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \end{array}\right\} \text{ für alle } \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$$

$\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ Standardbasis: $\bar{e}_i = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-te Stelle}}}{1}, 0, \dots, 0)$

5.1 Für $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ heißt:

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad \text{(Standard-)}\underline{\text{Skalarprodukt}}$$

$$\|\bar{x}\| := \sqrt{\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \qquad \underline{\text{Norm}} \text{ von } \bar{x}$$

$$\|\bar{x} - \bar{y}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right)^{1/2} \qquad \underline{\text{Abstand}} \text{ von } \bar{x} \text{ zu } \bar{y}$$

<u>Eigenschaften</u>: $\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$:

1) $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle \le \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|$ Cauchy-Schwarz-Ungleichung

2) i) $\|\bar{x}\| \ge 0$, und $\|\bar{x}\| = 0 \iff \bar{x} = 0$

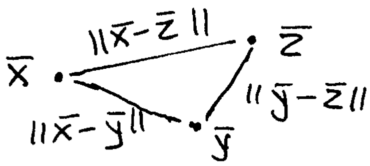
ii) $\|\lambda \bar{x}\| = |\lambda| \|\bar{x}\|$

iii) $\|\bar{x} + \bar{y}\| \le \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$ Dreiecks-Ungleichung

3) i) $\|\bar{x} - \bar{y}\| \ge 0$, und $\|\bar{x} - \bar{y}\| = 0 \iff \bar{x} = \bar{y}$

ii) $\|\bar{x} - \bar{y}\| = \|\bar{y} - \bar{x}\|$

iii) $\|\bar{x} - \bar{z}\| \le \|\bar{x} - \bar{y}\| + \|\bar{y} - \bar{z}\|$



$\ulcorner$ 1) siehe Lin. Alg 2, 31.2 oder Fritzsche, Analysis 2, 1.1.5

2) i), ii) ✓

iii)
$$\|\bar{x} + \bar{y}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2$$
$$= \underbrace{\sum_i x_i^2}_{\|} + 2 \underbrace{\sum_i x_i y_i}_{\wedge\ 1)} + \underbrace{\sum_i y_i^2}_{\|}$$
$$\le \|\bar{x}\|^2 + 2\|\bar{x}\|\|y\| + \|\bar{y}\|^2 = (\|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|)^2$$

3) i), ii) folgen aus 2) i), ii) $(\lambda = -1)$

iii) $\|\bar{x} - \bar{z}\| = \|\underline{\bar{x} - \bar{y}} + \underline{\bar{y} - \bar{z}}\| \underset{2)\,iii)}{\le} \|\bar{x} - \bar{y}\| + \|\bar{y} - \bar{z}\|$ $\lrcorner$

Bem

1) Für $n=1$ ist $\bar{x} = (x_1) = x_1$ und $\|\bar{x}\| = \sqrt{x_1^2} = |x_1|$
d.h. $\|-\|$ ist Verallgemeinerung von Betragsfkt. auf $\mathbb{R}$
und 2) " " " Ana 1, 1.5

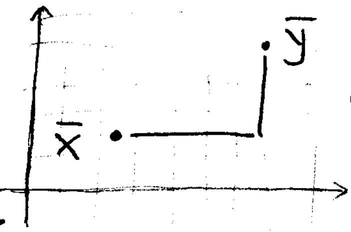
2) Ein Metrischer Raum ist ein Paar (M, d),
wobei M Menge und $d: M \times M \to \mathbb{R}$ Abb. mit
i) $d(x,y) \geq 0$, und $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$,
ii) $d(x,y) = d(y,x)$, iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

3) besagt: $(\mathbb{R}^n, \|?-?\|)$ ist metr. Raum

Anderes Beisp: $M = \mathbb{R}^n$

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

Taxifahrer-Metrik



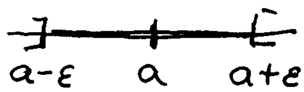
$(n=2)$

5.2 Def: Für $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$ heißt

$$\mathcal{U}_\varepsilon(\bar{a}) := \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\bar{x} - \bar{a}\| < \varepsilon\}$$ ε-Umgebung von $\bar{a}$

Beisp

$n=1$:



$n=2$
$(n=3)$

randloser Kreis (Kugel) mit Mittelpunkt $\bar{a}$ und Radius ε

Ziel: Übertrage grundlegende Begriffe "Konverg. Folge, Grenzwerte, Stetigkeit" von $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ auf $(\mathbb{R}^n, \|-\|)$

5.3 Def: Sei $(\bar{x}_k)_k$ Folge in $\mathbb{R}^n$ und $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$. (vgl. Ana 1, 2.2)

$(\bar{x}_k)_k$ konvergiert gegen $\bar{a}$ $:\Longleftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists k_0 \in \mathbb{N} \; \forall k \geq k_0 : \; \|\bar{x}_k - \bar{a}\| < \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$\bar{x}_k \in \mathcal{U}_\varepsilon(\bar{a})$$

d.h. jede ε-Umgeb. von $\bar{a}$ enthält fast alle Folgenglieder

Notation: $\lim\limits_{k\to\infty} \bar{x}_k = \bar{a}$, $\quad \bar{x}_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \bar{a}$

Bem: 1) Grenzwert ist eindeutig (falls existiert)

2) $\bar{x}_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \bar{a} \Longleftrightarrow (\|\bar{x}_k - \bar{a}\|)_k$ ist 0-Folge in $\mathbb{R}$

5.4 Satz: Sei $(\bar{x}_k)_k$ Folge in $\mathbb{R}^n$, $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ und

$\bar{x}_k = (x_{k1}, \ldots, x_{kn}) \in \mathbb{R}^n$ für $k \in \mathbb{N}$

Dann gilt:

$$\bar{x}_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \bar{a} \Longleftrightarrow x_{ki} \xrightarrow[k\to\infty]{} a_i \text{ für } i = 1, \ldots, n$$

d.h. $\lim\limits_{k\to\infty} \bar{x}_k = \left(\lim\limits_{k\to\infty} x_{k1}, \ldots, \lim\limits_{k\to\infty} x_{kn}\right)$

Bew:

„$\Leftarrow$": Sei $x_{ki} \xrightarrow[k\to\infty]{} a_i$ für $i = 1, \ldots, n$

$$\xRightarrow[\text{und } \sqrt{\ } \text{ stetig}]{\text{Ana 1, 2.6}} \|\bar{x}_k - \bar{a}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_{ki} - a_i)^2\right)^{1/2} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

$$\xRightarrow[\text{Bem 2, 5.3}]{} \bar{x}_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \bar{a}$$

„$\Rightarrow$": $\forall i = 1, \ldots, n: \; 0 \leq |x_{ki} - a_i| \leq \|\bar{x}_k - \bar{a}\|$

Sandwich-Lemma Ana 1, 2.7 liefert Beh. ✓

5.5 Def 1: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ (vgl. Ana 1, 5.1, 5.2)

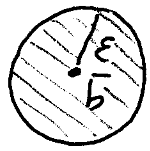
$$\bar{D} := \{\bar{a} \in \mathbb{R}^n \mid \forall \delta > 0 : D \cap \mathcal{U}_\delta(\bar{a}) \neq \emptyset\}$$

$$\overset{\S 6}{=} \{\bar{a} \in \mathbb{R}^n \mid \text{es gibt Folge } (\bar{x}_k)_k \text{ in } D \text{ mit } \bar{x}_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \bar{a}\}$$

heißt <u>Abschluss von D in $\mathbb{R}^n$</u>

<u>Bem</u>: $D \subset \bar{D}$

<u>Beisp</u>: 1) $\overline{\mathcal{U}_\varepsilon(\bar{b})} = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\bar{x} - \bar{b}\| \leq \varepsilon\}$



"mit Rand"

2) $\overline{\mathbb{R}^n \setminus \{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_r\}} = \mathbb{R}^n$

<u>Def 2</u>: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^m$ Abb, $\bar{a} \in \bar{D}$ und $\bar{b} \in \mathbb{R}^m$.

f <u>hat bei ā den Grenzwert</u> $\bar{b}$:$\Longleftrightarrow$

Für <u>jede</u> Folge $(\bar{x}_k)_k$ in D mit $\bar{x}_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \bar{a}$ gilt:

$$f(\bar{x}_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} \bar{b}$$

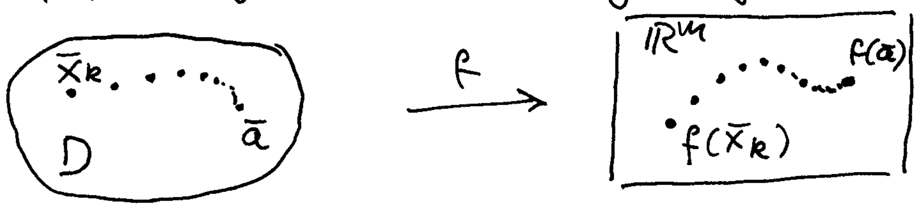
Notation: $\lim\limits_{\bar{x} \to \bar{a}} f(\bar{x}) = \bar{b}$

⊗ Beisp: siehe S. 40 unten

5.6 <u>Def</u>: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ und $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ Abb.

f <u>stetig in</u> $\bar{a} \in D$:$\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{\bar{x} \to \bar{a}} f(\bar{x}) = f(\bar{a})$

f <u>stetig</u> :$\Longleftrightarrow$ f stetig in jedem $\bar{a} \in D$



(vgl. Ana 1 5.7)

<u>Beisp und Bem</u>

1) $id : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ist stetig

2) Konstante Abb. sind stetig

3) $D \subset \mathbb{R}^n$, $E \subset \mathbb{R}^m$, $f : D \to E$, $g : E \longrightarrow \mathbb{R}^\ell$ stetig

$\Longrightarrow g \circ f : D \longrightarrow \mathbb{R}^\ell$ stetig

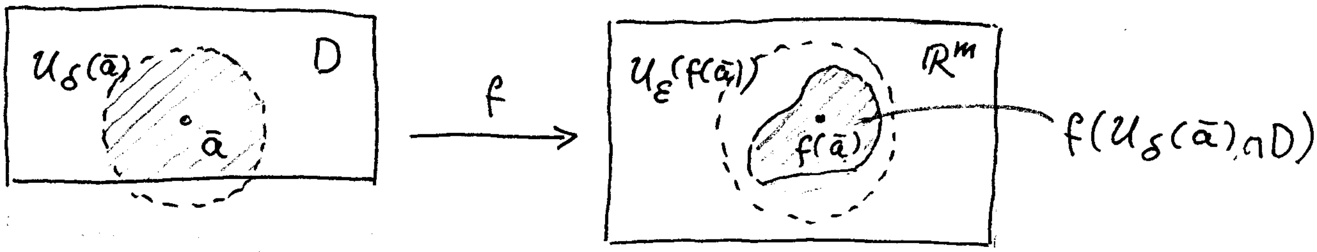
⟪ sei $\bar{a} \in D$, $\bar{x}_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \bar{a} \underset{f \text{ stet.}}{\Longrightarrow} f(x_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(\bar{a}) \underset{g \text{ stet.}}{\Longrightarrow} g(f(\bar{x}_k)) \xrightarrow[k\to\infty]{} g(f(\bar{a}))$ ⟫

4) $f : D \to \mathbb{R}^m$ stetig, $D' \subset D \Rightarrow f|_{D'}$ stetig

5.7 Satz (ε-δ-Kriterium): Sei $D \subset \mathbb{R}^n$.

$f: D \to \mathbb{R}^m$ ist stetig in $\bar{a} \in D$ $\iff$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \underbrace{\forall \bar{x} \in D \cap \mathcal{U}_\delta(\bar{a}) : f(\bar{x}) \in \mathcal{U}_\varepsilon(f(\bar{a}))}_{f(D \cap \mathcal{U}_\delta(\bar{a})) \subset \mathcal{U}_\varepsilon(f(\bar{a}))}$$



Bew: „$\Leftarrow$": Sei $(\bar{x}_k)_k$ Folge in D mit $\bar{x}_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \bar{a}$.

zu zeigen: $f(\bar{x}_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(\bar{a})$

Sei $\varepsilon > 0$, und $\delta > 0$ mit $f(\mathcal{U}_\delta(\bar{a}) \cap D) \subset \mathcal{U}_\varepsilon(f(\bar{a}))$ $(*)$

$\bar{x}_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \bar{a} \Rightarrow \exists k_0 \in \mathbb{N}\ \forall k \geq k_0 : \bar{x}_k \in \mathcal{U}_\delta(\bar{a}) \cap D$

$\underset{(*)}{\Longrightarrow} \qquad \forall k \geq k_0 : f(\bar{x}_k) \in \mathcal{U}_\varepsilon(f(\bar{a}))$

$\Rightarrow f(\bar{x}_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(\bar{a})$

„$\Rightarrow$": Zeigen Kontrapos (von $p \Rightarrow q$): $\neg q \Rightarrow \neg p$

$\neg q$: $\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists \bar{x} \in \mathcal{U}_\delta(\bar{a}) \cap D : f(\bar{x}) \notin \mathcal{U}_\varepsilon(f(\bar{a}))$

$\underset{\delta = 1/k}{\Longrightarrow} \quad \forall k \in \mathbb{N}\ \exists \bar{x}_k \in \mathcal{U}_{1/k}(\bar{a}) \cap D : f(\bar{x}_k) \notin \mathcal{U}_\varepsilon(f(\bar{a}))$

$\Rightarrow (\bar{x}_k)_k$ ist Folge in D mit $\bar{x}_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \bar{a}$ und $f(\bar{x}_k) \not\xrightarrow[k\to\infty]{} f(\bar{a})$

$\Rightarrow f$ nicht stetig in $\bar{a}$ ✓

Beisp. zu 5.5

$f: \mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\} \to \mathbb{R}^2$, $f(\bar{x}) = \frac{1}{\|\bar{x}\|}\bar{x}$, $\bar{0} \in \overline{\mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\}}$

Beh: $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{0}} f(\bar{x})$ existiert nicht

$\bar{x}_k := (\frac{1}{k}, 0) \xrightarrow[k\to\infty]{} \bar{0}$ mit $f(\frac{1}{k}, 0) = \frac{1}{1/k}(\frac{1}{k}, 0) = (1,0) \xrightarrow[k\to\infty]{} (1,0)$

$\bar{x}_k' := (0, \frac{1}{k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} \bar{0}$ mit $f(0, \frac{1}{k}) = \frac{1}{1/k}(0, \frac{1}{k}) = (0,1) \xrightarrow[k\to\infty]{} (0,1)$ $\quad (1,0) \neq (0,1)$