Analysis 2 Ergänzung zur Formel-Sammlung

§5 Grenzwerte, Stetigkeit

5.1 Def: $\mathbb{R}^n : \{\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$

$\bar{x} + \bar{y} := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$, $\alpha \bar{x} := (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$

$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ Standard-Skalarprodukt

$\|\bar{x}\| := \sqrt{\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$ Norm von $\bar{x}$

$\|\bar{x} - \bar{y}\| =$ Abstand von $\bar{x}$ zu $\bar{y}$

Rechenregeln: $\forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$:

i) $\|\bar{x}\| \geq 0$, und $\|\bar{x}\| = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}$, ii) $\|\alpha \bar{x}\| = |\alpha| \|\bar{x}\|$, iii) $\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$

5.2 Def: $U_\varepsilon(\bar{a}) := \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\bar{x} - \bar{a}\| < \varepsilon\}$ ε-Umgebung von $\bar{a}$

5.3 Def: Eine Folge $(\bar{x}_k)_k$ in $\mathbb{R}^n$ konvergiert gegen $\bar{a} \in \mathbb{R}^n :\Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists k_0 \in \mathbb{N} \; \forall k \geq k_0 : \|\bar{x}_k - \bar{a}\| < \varepsilon$, d.h. $\bar{x}_k \in U_\varepsilon(\bar{a})$

In Worten: "Jede ε-Umgeb. von $\bar{a}$ enthält fast alle Folgenglieder."

Notation: $\lim_{k \to \infty} \bar{x}_k = \bar{a}$ oder $\bar{x}_k \xrightarrow[k \to \infty]{} \bar{a}$

5.4 Satz: $\lim_{k \to \infty} \bar{x}_k = \left(\lim_{k \to \infty} x_{k1}, \dots, \lim_{k \to \infty} x_{kn}\right)$,

dabei bezeichnet $(x_{ki})_k$ die i-te Komponentenfolge von $(\bar{x}_k)_k$.

5.5 Def: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ und $f : D \to \mathbb{R}^m$ Abbildung

1) $\bar{D} := \{\lim_{k \to \infty} \bar{x}_k \mid (\bar{x}_k)_k$ konverg. Folge in $D\}$ Abschluss von D in $\mathbb{R}^n$

2) f hat bei $\bar{a} \in \bar{D}$ den Grenzwert $\bar{b} \in \mathbb{R}^m :\Leftrightarrow$

Für jede Folge $(\bar{x}_k)_k$ in D mit $\bar{x}_k \xrightarrow[k \to \infty]{} \bar{a}$ gilt: $f(\bar{x}_k) \xrightarrow[k \to \infty]{} \bar{b}$

Notation: $\lim_{\bar{x} \to \bar{a}} f(\bar{x}) = \bar{b}$ oder $f(\bar{x}) \xrightarrow[\bar{x} \to \bar{a}]{} \bar{b}$

5.6 Def: $f : D \to \mathbb{R}^m$ stetig in $\bar{a} \in D :\Leftrightarrow \lim_{\bar{x} \to \bar{a}} f(\bar{x}) = f(\bar{a})$

$f : D \to \mathbb{R}^m$ stetig $:\Leftrightarrow f$ stetig in jedem $\bar{a} \in D$.

Bem: 1) $id_{\mathbb{R}^n}$ und konstante Abb. sind stetig.

2) Kompositionen und Einschränk. von stetigen Abb. sind stetig.

5.8 Satz: $f = (f_1, \dots, f_m) : D \to \mathbb{R}^m$ stetig $\Leftrightarrow f_1, \dots, f_m : D \to \mathbb{R}$ sind stetig.

5.9 Satz: $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow f+g, f-g, f \cdot g, f/g$ sind stetig.

5.11 Satz: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$ Funktion und $D' \subset D$ mit

i) $D' \subset \mathbb{R}^n$ offen, ii) $f|_{D'} : D' \to \mathbb{R}$ stetig.

Dann ist f in allen $\bar{a} \in D'$ stetig.

§6 Offene und abgeschlossene Mengen

6.1 Def: $D \subset \mathbb{R}^n$ offen $:\Longleftrightarrow \forall \bar{x} \in D\ \underbrace{\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(\bar{x}) \subset D}_{\text{"}\bar{x} \text{ ist innerer Punkt von } D\text{"}}$

D abgeschlossen $:\Longleftrightarrow \mathbb{R}^n \setminus D$ offen

Beisp: 1) $\forall \bar{a} \in \mathbb{R}^n$: $\{\bar{a}\}$ ist abgeschl., also $\mathbb{R}^n \setminus \{\bar{a}\}$ offen

2) $\forall a \in \mathbb{R}$: $\mathbb{R}_{<a}, \mathbb{R}_{>a}$ sind offen und $\mathbb{R}_{\leq a}, \mathbb{R}_{\geq a}$ abgeschl.

Bem: Endl. Durchschn. und belieb. Verein. v. offenen Mengen sind offen.

6.5 D abgeschl. $\Longleftrightarrow$ D enthält mit jeder konverg. Folge auch den Grenzwert.

6.2 Satz: Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig und $E \subset \mathbb{R}$. Dann gilt:

1) $E \subset \mathbb{R}$ offen $\Rightarrow f^{-1}(E) \subset \mathbb{R}^n$ offen

2) $E \subset \mathbb{R}$ abgeschl. $\Rightarrow f^{-1}(E) \subset \mathbb{R}^n$ abgeschl.

Dabei ist $f^{-1}(E) := \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\bar{x}) \in E\}$ das Urbild von E bzgl. f

Beisp: $U_\varepsilon(\bar{a})$ ist offen, da $f(\bar{x}) = \|\bar{x} - \bar{a}\|$ stetig und $U_\varepsilon(\bar{a}) = f^{-1}(\mathbb{R}_{<\varepsilon})$.

§7 Partielle und totale Differenzierbarkeit

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

7.1 Def: f bei $\bar{a} \in D$ partiell nach x_i diff.bar $:\Longleftrightarrow$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{a}) := \lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{a} + h\bar{e}_i) - f(\bar{a})}{h} \quad \text{existiert}$$

f partiell diffbar $:\Longleftrightarrow \forall \bar{a} \in D\ \forall i = 1, \ldots, n : \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{a})$ existiert

Interpret.: $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{a})$ = Anstieg von f bei $\bar{a}$ in Richtung $\bar{e}_i$

Beisp.: $f(x,y,z) = x^2 + \sin(xy) - y^3 z$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2x + y\cos(xy) - 0$

7.4 Def: f bei $\bar{a} \in D$ (total) differenzierbar $:\Longleftrightarrow \exists$ lin. Abb. $L_{\bar{a}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$\lim_{\bar{h} \to \bar{0}} \frac{f(\bar{a} + \bar{h}) - f(\bar{a}) - L_{\bar{a}}(\bar{h})}{\|\bar{h}\|} = 0$$

$L_{\bar{a}}$ heißt dann Ableitung von f bei $\bar{a}$

und $g(\bar{a} + \bar{h}) = f(\bar{a}) + L_{\bar{a}}(\bar{h})$ (affin) lineare Approximation.

7.5 Satz: Ist $f : D \to \mathbb{R}$ (total) diff.bar bei $\bar{a} \in D$, so gilt:

1) f ist stetig in $\bar{a}$.

2) f ist part. diffbar bei $\bar{a}$, und $L_{\bar{a}}(\bar{h}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{a}) h_i$ für alle $\bar{h} \in \mathbb{R}^n$.

7.6 Folg (Differenzierbarkeits-Kriterium)

$$f \text{ diffbar bei } \bar{a} \in D \Longleftrightarrow \begin{cases} f \text{ partiell diffbar bei } \bar{a}, \\ \underbrace{\frac{1}{\|\bar{h}\|}\left(f(\bar{a}+\bar{h}) - f(\bar{a}) - \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{a}) h_i\right)}_{= \varphi(\bar{h})} \xrightarrow[\bar{h} \to \bar{0}]{} 0 \end{cases}$$

7.7 Def: $f : D \to \mathbb{R}$ C^1-Funktion $:\Longleftrightarrow$ alle $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existieren und sind stetig.

Satz: Jede C^1-Funktion ist (total) diff.bar.

§ 8 Der Gradient

sei $f: D \to \mathbb{R}$ diffbar bei $\bar{a} \in D$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen.

Def: 1) $\operatorname{grad} f(\bar{a}) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{a})\right) \in \mathbb{R}^n$ Gradient von f bei $\bar{a}$.

2) Für $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\bar{v}\| = 1$ heißt

$\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(\bar{a}) := \lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{a} + h\bar{v}) - f(\bar{a})}{h}$ Ableitung von f bei $\bar{a}$ in Richtung $\bar{v}$

8.3 Satz: 1) $\forall \bar{v} \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\bar{v}\| = 1$: $\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(\bar{a}) = \langle \operatorname{grad} f(\bar{a}), \bar{v} \rangle$

2) $\operatorname{grad} f(\bar{a}) \neq \bar{0}$ zeigt in Richtung des größten Anstiegs von f bei $\bar{a}$, und dieser ist $\|\operatorname{grad} f(\bar{a})\|$.

8.4 Satz: $\operatorname{grad} f(\bar{a})$ steht senkrecht auf $N_{f(\bar{a})} := \{\bar{x} \in D \mid f(\bar{x}) = f(\bar{a})\}$

8.5 Def: Für $\operatorname{grad} f(\bar{a}) \neq \bar{0}$ ist der Tangentialraum an $N_{f(\bar{a})}$ im Punkt $\bar{a}$

$$T_{\bar{a}} := \bar{a} + \operatorname{grad} f(\bar{a})^{\perp} = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \operatorname{grad} f(\bar{a}), \bar{x} - \bar{a} \rangle = 0\}$$

§ 9 Lokale Extrema

sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: D \to \mathbb{R}$ diffbar.

9.1 Satz: Hat f bei $\bar{a} \in D$ ein lokales Extremum, so gilt:

$\operatorname{grad} f(\bar{a}) = (0, \dots, 0)$, d.h. $\bar{a}$ ist stationärer Punkt von f.

Def: f C^2-Funktion $:\Longleftrightarrow$ alle $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ existieren und sind stetig.

$H_f(\bar{a}) := \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{a})\right] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Hesse-Matrix von f bei $\bar{a}$

9.3 Satz (Schwarz): f C^2-Funktion $\Rightarrow H_f(\bar{a})$ ist symmetrisch

Def: Sei $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch,

$q_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $q_A(\bar{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ zugehör. quadratische Form

q_A positiv definit $:\Longleftrightarrow \forall \bar{x} \neq \bar{0}: q_A(\bar{x}) > 0$

q_A negativ definit $:\Longleftrightarrow \forall \bar{x} \neq \bar{0}: q_A(\bar{x}) < 0$

q_A indefinit $:\Longleftrightarrow \exists \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n: q_A(\bar{x}) < 0 < q_A(\bar{y})$

9.6 Satz: Für $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ gilt:

$$q_A \begin{cases} \text{pos.def} \Longleftrightarrow \det A > 0 \wedge a > 0 \\ \text{neg.def.} \Longleftrightarrow \det A > 0 \wedge a < 0 \\ \text{indef.} \Longleftrightarrow \det A < 0 \quad (a \text{ egal}) \end{cases}$$

9.8 Satz: Für $f: D \to \mathbb{R}$ C^2-Fkt., $\bar{a} \in D$ stationär und $q = q_{H_f(\bar{a})}$ gilt:

1) q pos.def. $\Rightarrow f$ hat bei $\bar{a}$ ein lok. Minimum.
2) q neg.def. $\Rightarrow f$ " " $\bar{a}$ ein lok. Maximum.
3) q indefinit $\Rightarrow f$ " " $\bar{a}$ einen Sattelpunkt.