Übung zu Stetigkeit, Diffbarkeit, offen/abgeschl.

Erinn: 5.6 $f\; D \to \mathbb{R}$ stetig in $\bar{a} \in D :\Longleftrightarrow \lim\limits_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x}) = f(\bar{a})$

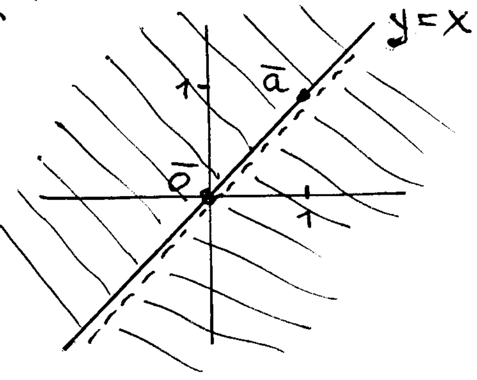
$\overset{}{\underset{5.5}{\Longleftrightarrow}} \forall (\bar{x}_k)_k$ Folge in D mit $\bar{x}_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \bar{a}$ gilt:

$f(\bar{x}_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(\bar{a})$

Also: Zum Nachweis von

f stetig in $\bar{a}$: Nimm belieb. Folge $(\bar{x}_k)_k$ in D mit $\bar{x}_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \bar{a}$ und zeige $f(\bar{x}_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(\bar{a})$

f nicht stetig in $\bar{a}$: Finde Folge $(\bar{x}_k)_k$ in D mit $\bar{x}_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \bar{a}$ und $f(\bar{x}_k) \not\xrightarrow[k\to\infty]{} f(\bar{a})$



Aufg. 1 Sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2 & \text{für } y \geq x \\ -(x^2+y^2) & \text{"} \quad y < x \end{cases}$$

Zeige: 1) f ist stetig in $\bar{0} = (0,0)$.

2) f ist nicht stetig in $\bar{a} = (1,1)$.

zu 1): $f(\bar{0}) = f(0,0) = 0^2+0^2 = 0$

Sei $((x_k, y_k))_k$ Folge in $\mathbb{R}^2$ mit $(x_k, y_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} (0,0)$

$\Rightarrow |f(x_k,y_k)| = |\pm(x_k^2+y_k^2)| = x_k^2+y_k^2 \xrightarrow[k\to\infty]{} 0^2+0^2 = 0$

$\Rightarrow f(x_k,y_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 = f(\bar{0})$

zu 2): $f(\bar{a}) = f(1,1) = 1^2+1^2 = 2$

Betrachte $((x_k,y_k))_k = ((1+1/k, 1))_k$

Dann gilt: $(x_k,y_k) = (1+1/k, 1) \xrightarrow[k\to\infty]{} (1,1) = \bar{a}$

und $f(x_k,y_k) = f(1+\frac{1}{k}, 1) =$

$= -((1+\frac{1}{k})^2+1^2) \xrightarrow[k\to\infty]{} -(1^2+1) = -2 \neq 2 = f(\bar{a})$

Also: $f(x_k,y_k) \not\xrightarrow[k\to\infty]{} f(\bar{a})$

Aufg. 2 Sei $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = \sqrt{x^4+y^4}$

Untersuche, ob f bei $\bar{0}=(0,0)$ total diff.bar ist.

Erinn. 7.6

$$f \text{ total diffbar bei } \bar{a} \iff \begin{cases} f \text{ partiell diffbar bei } \bar{a} \\ \lim\limits_{\bar{h}\to\bar{0}} \dfrac{\varphi(\bar{h})}{\|\bar{h}\|} = 0, \text{ wobei} \end{cases}$$

$$\varphi(\bar{h}) = f(\bar{a}+\bar{h}) - f(\bar{a}) - \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{a})h_1 - \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{a})h_2$$

1) Untersuche, ob f part. diffbar bei $\bar{0}=(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{0}) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{h^4+0^4}-0}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h^2}{h} = \lim_{h\to 0} h = \underline{0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{0}) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{0^4+h^4}-0}{h} = \cdots = \underline{0}$$

Also: f ist bei $\bar{0}$ part. diffbar

2) $$\varphi(\bar{h}) = f(\bar{0}+\bar{h}) - f(\bar{0}) - \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{0})h_1 - \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{0})h_2$$

$$= f(\bar{h}) - 0 - 0 - 0 = f(\bar{h}) = \sqrt{h_1^4+h_2^4}$$

$$\Rightarrow \frac{\varphi(\bar{h})}{\|\bar{h}\|} = \frac{\sqrt{h_1^4+h_2^4}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \sqrt{\frac{h_1^4+h_2^4}{h_1^2+h_2^2}} = \sqrt{h_1^2\underbrace{\frac{h_1^2}{h_1^2+h_2^2}}_{\leq 1} + h_2^2\underbrace{\frac{h_2^2}{h_1^2+h_2^2}}_{\leq 1}}$$

$$\leq \sqrt{h_1^2+h_2^2} = \|\bar{h}\| \xrightarrow[\bar{h}\to\bar{0}]{} \|\bar{0}\| = 0$$

$$\xRightarrow[\text{Sandwich prinzip}]{} \lim_{\bar{h}\to\bar{0}}\frac{\varphi(\bar{h})}{\|\bar{h}\|} = 0$$

Also: f ist total diffbar bei $\bar{0}=(0,0)$. ✓

Aufg. 3 Sei $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x-y| < 1\} \subset \mathbb{R}^2$

a) Ist D offen?

b) Ist D abgeschlossen?

c) Ist D beschränkt?

zu a): $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x-y| < 1\}$

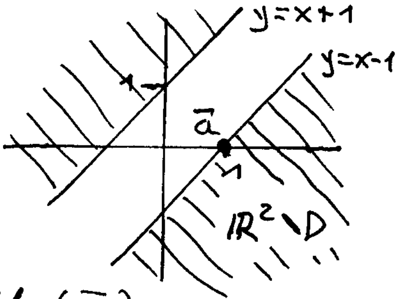
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) < 1\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) \in \mathbb{R}_{<1}\}$

wobei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = |x-y|$ stetig und $\mathbb{R}_{<1} \subset \mathbb{R}$ offen (Aufg 1.1)

$\Rightarrow D = f^{-1}(\mathbb{R}_{<1})$ stetiges Urbild einer offenen Menge, also offen (nach VL 6.2)

zu b): D abg. $:\Leftrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus D$ offen



$\mathbb{R}^2 \setminus D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x-y| \geq 1\}$

Für $\bar{a} := (1,0)$ gilt: $\bar{a} \in \mathbb{R}^2 \setminus D$ und

$\forall \varepsilon > 0$ $(\varepsilon < 2)$: $\mathcal{U}_\varepsilon(\bar{a}) \not\subset \mathbb{R}^2 \setminus D$, da $(1-\frac{\varepsilon}{2}, 0) \in \mathcal{U}_\varepsilon(\bar{a})$ und $(1-\frac{\varepsilon}{2}, 0) \notin \mathbb{R}^2 \setminus D$

$\Rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus D$ nicht offen

$\Rightarrow D$ nicht abgeschl.

Altern.: D abg. $\overset{6.5}{\Leftrightarrow} \forall (\bar{x}_k)_k$ konverg. Folge in D: $\lim\limits_{k\to\infty} \bar{x}_k \in D$

$(\bar{x}_k = (1-\frac{1}{k}, 0))_k$ ist konverg. Folge in D, aber $\lim\limits_{k\to\infty} \bar{x}_k = (1,0) \notin D$.

$\overset{6.5}{\Longrightarrow}$ D nicht abg.

zu c): $\forall x > 0$: $(x,x) \in D$ (da $|x-x| < 1$) und $\|(x,x)\| = \sqrt{x^2+x^2} = \sqrt{2}x > x$

$\Rightarrow D$ ist nicht beschränkt.

Aufg. 4 Sei $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = x^2 y - 2x^2 - y^2$$

Wo hat f lok. Extrema bzw. Sattelpunkte?

(I) Stationäre Punkte

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (2xy - 4x, x^2 - 2y)$$

$\bar{a} \in \mathbb{R}^2$ stat. Pkt. $\Longleftrightarrow \operatorname{grad} f(\bar{a}) = (0,0)$

$$\Longleftrightarrow \underbrace{2xy - 4x = 0}_{(*)} \wedge x^2 - 2y = 0 \Updownarrow (**)\ 2y = x^2$$

$(*)$: $0 = 2x(y-2) \Longleftrightarrow x = 0 \vee y = 2$

$x = 0 \underset{(**)}{\Longrightarrow} y = 0 \rightsquigarrow \underline{\bar{a}_1 = (0,0)}$ stat. Pkt.

$y = 2 \underset{(**)}{\Longrightarrow} x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

$\rightsquigarrow \underline{\bar{a}_2 = (2,2)}$ stat. Pkt.

$\rightsquigarrow \underline{\bar{a}_3 = (-2,2)}$ stat. Pkt.

(II) $H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 2y-4 & 2x \\ 2x & -2 \end{bmatrix}$

$\underline{\bar{a}_1}$: $H_f(0,0) = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ ← Diag. matr. mit neg. Diag.einträgen $\Longrightarrow q_{H_f(0,0)}$ neg. def.

$\Longrightarrow f$ hat bei $\bar{a}_1 = (0,0)$ ein lok. Max.

$\underline{\bar{a}_2}$: $H_f(2,2) = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$, $\det \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = -16 < 0$

$\Longrightarrow q_{H_f(2,2)}$ indef $\Rightarrow$ Sattelpkt bei $\bar{a}_2 = (2,2)$

$\underline{\bar{a}_3}$: $H_f(-2,2) = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$, $\det \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} = -16 < 0$

$\Longrightarrow q_{H_f(-2,2)}$ indef $\Rightarrow$ Sattelpkt bei $\bar{a}_3 = (-2,2)$

✓

Aufg 5 Berechne

$$\int_1^e x^2(1-\ln(x))\,dx$$

Mit part. Integration

$$\int_1^e \underbrace{x^2}_{f'}\underbrace{(1-\ln(x))}_{g}\,dx = \frac{1}{3}x^3(1-\ln(x))\Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{3}x^3\left(-\frac{1}{x}\right)dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3(1-\ln(x))\Big|_1^e + \underbrace{\frac{1}{3}\int_1^e x^2\,dx}_{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}x^3\big|_1^e}$$

$$= \frac{e^3}{3}(1-\underbrace{\ln(e)}_{=1}) - \frac{1}{3}(1-\underbrace{\ln(1)}_{=0}) + \frac{1}{9}e^3 - \frac{1}{9}$$

$$= 0 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9}e^3 - \frac{1}{9}$$

$$= \underline{\frac{1}{9}(e^3-4)}$$

✓