Analysis 2, Kurs 12 Q

WS 2023/24

Dozent: H.-J. von Höhne

Homepage: page.mi.fu-berlin.de/hoehneze/WS2324/LWB/hopa-ana2_WS2324.html

Vorlesung: Mo 8:30 - 10:00 (+15 Min Pause), R1600 StEPS
Übung: Mo 10:30 - 12:00, R1600 StEPS, H.-J. von Höhne

Klausur:

Inhalt

-) Gleichmäßige Stetigkeit (Ergänz. zu Ana 1)
-) Integralrechnung
-) $\mathbb{R}^n$ als metrischer Raum
  -) offen, abgeschlossen, Stetigkeit
-) Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$
  -) Differenzierbarkeit: partiell + total
  -) Lokale Extrema

Literatur

-) Skript, © von Höhne
-) Forster, Analysis 1+2
-) Fritzsche, Grundkurs Analysis 1+2
-) Grieser, Analysis 1

§0 Gleichmäßige Stetigkeit

0.1 **Def**: Sei $D \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge

D offen $:\Leftrightarrow \forall x \in D\ \exists \varepsilon > 0 : \underbrace{U_\varepsilon(x) :=]x-\varepsilon, x+\varepsilon[}_{\varepsilon\text{-Umgebung von } x} \subset D$

D abgeschlossen $:\Leftrightarrow \mathbb{R} \setminus D$ ist offen

D Kompakt $:\Leftrightarrow$ D ist abgeschl. und beschränkt

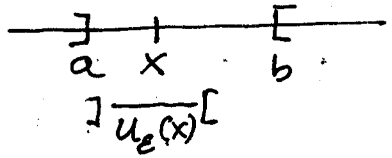
$\ulcorner \exists K > 0 : D \subset [-K, K]$ //

Beisp

1) $]a,b[$ ist offen, aber nicht abgeschl. für $a < b$

$\ulcorner$ offen: Sei $x \in]a,b[$, d.h. $a < x < b$

Gesucht $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \subset]a,b[$



Wähle $\varepsilon := \min\{x-a, b-x\} \Rightarrow U_\varepsilon(x) \subset]a,b[$

nicht abg.: Betrachte $\mathbb{R} \setminus]a,b[=]-\infty, a] \cup [b, \infty[$

Für $x = a$ und alle $\varepsilon > 0$ gilt: $U_\varepsilon(a) \not\subset]-\infty, a] \cup [b, \infty[$

$\Rightarrow \mathbb{R} \setminus]a,b[$ ist nicht offen

$\Rightarrow]a,b[$ nicht abgeschl. //

2) $\mathbb{R}_{\geq a} := [a, \infty[$ ist abg., aber nicht beschränkt

$\ulcorner$ abg.: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_{\geq a} = \mathbb{R}_{<a}$ ist offen, da für alle $x < a$ und $\varepsilon := a - x > 0$ gilt: $U_\varepsilon(x) \subset \mathbb{R}_{<a}$

nicht beschr.: ✓ //

3) Für $a \leq b$ ist $[a,b]$ abg. und beschr., also kompakt.

0.2 <u>Erinn 1</u> (aus Ana 1)

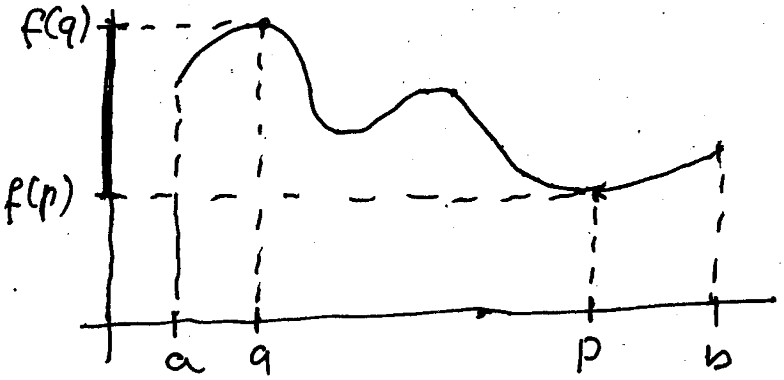
<u>Satz</u>: Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:

1) $\underset{(5.15)}{\text{Satz}}$ vom Min. und Max: es gibt $p,q\in[a,b]$ mit
$$f(p)\le f(x)\le f(q) \quad \text{für alle } a\le x\le b,$$
d.h. f hat in p ein Min. und in q ein Max.

2) f ist beschränkt (Folg. 1)

3) $\underset{(5.13)}{\text{Zwischenwertsatz}}$: $\forall y$ zwischen $f(a)$ und $f(b)$ $\exists c\in[a,b]: f(c)=y$

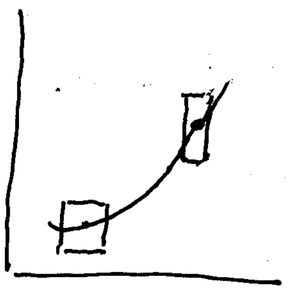
4) Folg 2 S67 $f([a,b])=[f(p),f(q)]$, d.h. stetige Bilder von kompakten Intervallen sind kompakte Intervalle



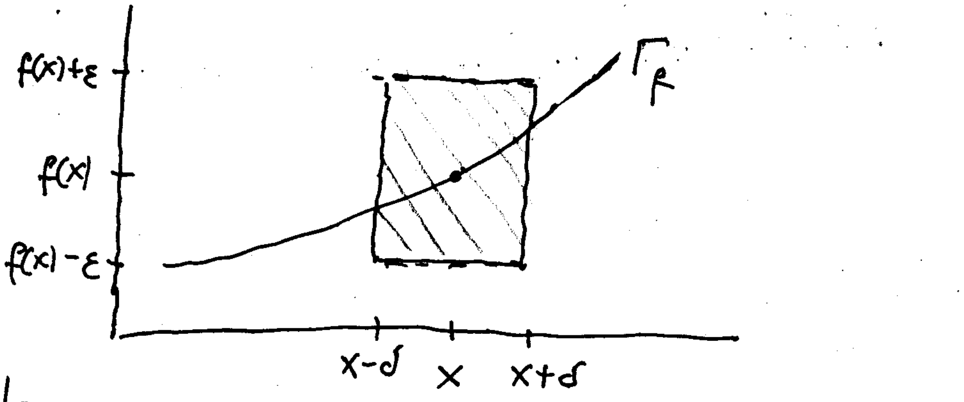
<u>Erinn 2</u> Sei $D\subset\mathbb{R}$ und $f:D\to\mathbb{R}$ Abb.

$f:D\to\mathbb{R}$ stetig $\underset{5.7}{\iff}$ $\forall x\in D$: ε-δ-Kriterium, d.h.

$$\underbrace{\forall x\in D\ \forall\varepsilon>0}_{\forall\varepsilon>0\ \forall x\in D}\ \exists\delta>0\ \underbrace{\forall y\in D:(|x-y|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon)}_{\substack{\Gamma_f\text{ schneidet den Rand des Rechtecks}\\ \text{höchstens an den vertikalen Seiten}}}$$



δ hängt i.A. von ε <u>und von x</u> ab



0.3 <u>Def</u>: $f: D \to \mathbb{R}$ <u>gleichmäßig stetig</u> $:\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x,y\in D: (|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon)$$

d.h. δ hängt nur von ε ab, aber <u>nicht von x</u>

<u>Bem</u>: 1) f gleichm. stetig $\Rightarrow$ f stetig

2) Begriff der "Gleichm. Stet." entsteht durch Vertauschung der Reihenfolge von Quantoren:

Def. "Stet."	Def. "Gleichm. Stet"
$\dots \forall x\in D\ \exists \delta>0 \dots$	$\dots \exists \delta>0\ \forall x\in D \dots$

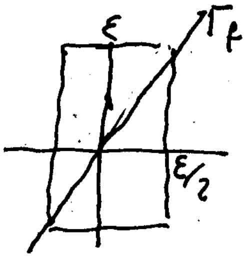
Alltagsbeisp: sei M = Menge aller Menschen

$\forall x\in M\ \exists \delta\in M$: δ ist Vater von x "Jeder Mensch hat einen Vater"

$\exists \delta\in M\ \forall x\in M$: δ ist Vater von x "Es gibt einen Vater aller Menschen"

0.4 <u>Beisp</u>

1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x$ ist glm. stetig



⌜ Für $\varepsilon>0$ setze $\delta := \varepsilon/2$

Seien $x,y\in\mathbb{R}$ mit $|x-y|<\delta$

$\Rightarrow |2x-2y| = 2|x-y| < 2\delta = 2\cdot\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

//

2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$, ist nicht glm. stetig

⌜ Erinn: $\neg(p\Rightarrow q) \Leftrightarrow p\wedge\neg q$

<u>zu zeigen</u>: $\exists\varepsilon>0\ \forall\delta>0\ \exists x,y\in D: |x-y|<\delta \wedge |x^2-y^2|\geq\varepsilon$

Ansatz $\varepsilon=1$. sei $\delta>0$ bel.

Gesucht $x \underset{\substack{\uparrow\\ \text{o.E.}}}{\leq} y$ mit $y-x<\delta$ und $y^2-x^2\geq 1$

Ansatz $y = x+\frac{\delta}{2}$ $\Rightarrow$ $y-x=\frac{\delta}{2}<\delta$

$$y^2-x^2 = x^2+2x\frac{\delta}{2}+\frac{\delta^2}{4}-x^2 = x\delta+\frac{\delta^2}{4}$$

Wollen haben: $x\delta+\frac{\delta^2}{4}\geq 1$. Das gilt sicher für $x=\frac{1}{\delta}$

Also: Für $\varepsilon=1$, $\delta>0$ bel., $x:=1/\delta$, $y:=x+\frac{\delta}{2}$ gilt:

$$|x-y|<\delta \wedge |x^2-y^2|\geq 1=\varepsilon$$

//

3) Für $b>0$ ist $f:[-b,b] \to \mathbb{R}$, $f(x)=x^2$, gleichm. stetig

Für $\varepsilon>0$ setze $\delta := \frac{\varepsilon}{2b} > 0$

Seien $x,y \in [-b,b]$ mit $|x-y|<\delta$.

$$\Rightarrow |x^2-y^2| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{3.Bin.F.}}}{=} |(x+y)\underbrace{(x-y)}_{<\delta}| < |x+y|\delta \underset{\substack{\uparrow \\ \Delta\text{-Ungl.}}}{\leq} (|x|+|y|)\delta$$

$$\leq 2b\delta = 2b\frac{\varepsilon}{2b} = \varepsilon$$ ✓

0.5 Satz: Sei $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig

$\Longrightarrow$ f ist gleichmäßig stetig.

Erinn Ana 1, 2.17: Satz v. Bolzano-Weierstraß

Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ hat eine konvergente Teilfolge.

Bew. v. Satz

Ann: f ist nicht gleichm. stetig

$$\Rightarrow \exists \varepsilon>0 \ \underset{(\delta = 1/n)}{\forall n\in\mathbb{N}} \ \exists x_n, y_n \in [a,b]:$$

$$|x_n-y_n| < 1/n \ \wedge \ |f(x_n)-f(y_n)| \geq \varepsilon \qquad (*)$$

$(x_n)_n$ Folge in $[a,b]$ ist beschränkt

$\underset{\text{Bo-Wei}}{\Longrightarrow}$ $(x_n)_n$ hat Teilfolge $(x_{n_k})_k$ mit

$$x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} p \quad \text{für ein } p\in[a,b]$$

$(*) \Rightarrow (x_n-y_n)_n$ ist 0-Folge $\Rightarrow y_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} p$

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ stetig} \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty}(f(x_{n_k})-f(y_{n_k})) = f(p)-f(p)=0 \\ \text{Nach } (*) \text{ gilt aber } |f(x_{n_k})-f(y_{n_k})| \geq \varepsilon \text{ für alle } k \end{array}\right\} \text{Wid.}$$

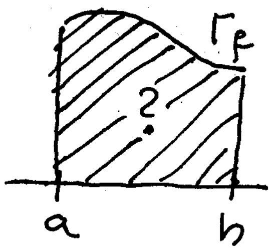
✓

Integralrechnung

Drei Probleme

I) Gegeben: $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$

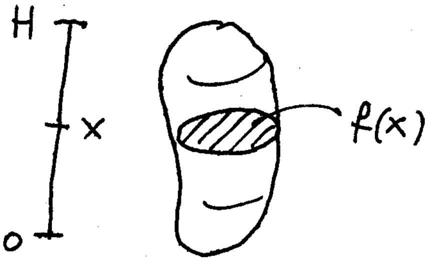
Gesucht: Flächeninhalt unter Graph von f



II) Gegeben: Körper der Höhe H

$f:[0,H] \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$

$f(x)$ = Flächeninhalt des Querschnitts in Höhe x



Gesucht: Volumen des Körpers

III) Gegeben: Autofahrt, a = Startzeit, b = Ankunftszeit

$f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x)$ = Geschwind. zum Zeitpunkt x

Gesucht: zurückgelegbe Strecke

Gemeinsame Lösungsidee

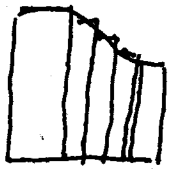
Zerlege $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

sodass $f|_{[x_{i-1},x_i]}$ wenig variiert

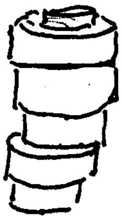
wähle $\overset{\in}{z_i}$

Dann: gesuchte Größe $\approx \sum_{i=1}^{n} f(z_i)(x_i - x_{i-1})$

I)



II)



III)

30 Min	50 km/h
2 Std	120 km/h
15 Min	80 km/h

$s = 50 \cdot \frac{1}{2} + 120 \cdot 2 + 80 \cdot \frac{1}{4}$

$= 25 + 240 + 20 = \underline{285}$ km

§1 Das Riemann-Integral (Bernhard Riemann 1826 – 1866)

Im Folg: $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkte Funktion, d.h.

$\exists m, M \in \mathbb{R} \ \forall x \in [a,b]: \ m \le f(x) \le M$

1.1 Def: Z Zerlegung von $[a,b]$ $:\Leftrightarrow$

$Z \subset [a,b]$ endl. mit $a, b \in Z$

Sei $Z = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ Zerlegung von $[a,b]$

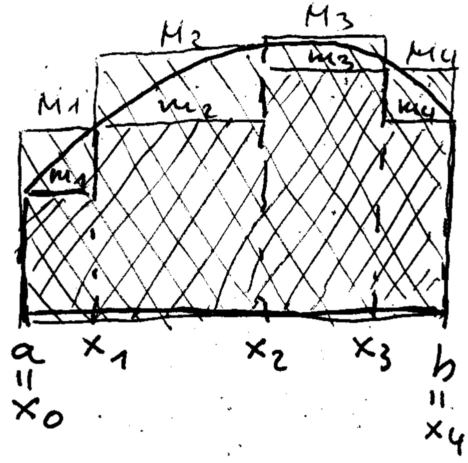
$U_Z(f) := \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$ Untersumme von f bzgl. Z

$O_Z(f) := \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$ Obersumme von f bzgl Z

wobei

$m_i := \inf\{f(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\} = \inf f([x_{i-1}, x_i])$

$M_i := \sup\{f(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\} = \sup f([x_{i-1}, x_i])$



grün $O_Z(f)$
rot $U_Z(f)$

Bemerk: $U_Z(f) \le O_Z(f)$

// $\forall i = 1,..,n: \ m_i \le M_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$ //

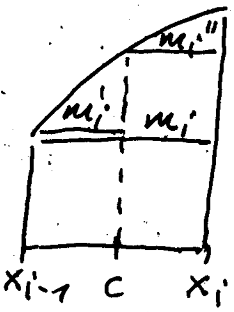
1.2 Lemma

1) Seien Z, Z' Zerleg. von $[a,b]$ und Z' eine Verfeinerung von Z, d.h. $Z \subset Z'$. Dann gilt:

$$U_Z(f) \le U_{Z'}(f) \quad \text{und} \quad O_{Z'}(f) \le O_Z(f)$$

2) Für alle Zerl. Z_1, Z_2 von $[a,b]$ gilt:

$$U_{Z_1}(f) \le O_{Z_2}(f)$$



Bew: 1) o.E. $Z' = Z \cup \{c\}$, $x_{i-1} < c < x_i$

$$\Rightarrow U_Z(f) = m_i(x_i - x_{i-1}) + \text{Rest}$$
$$= m_i(c - x_{i-1}) + m_i(x_i - c) + \text{Rest}$$

Aufg 1.3,4): $\emptyset \neq B \subset A \Rightarrow \inf A \le \inf B$

$$m_i = \inf f([x_{i-1}, x_i]) \le \begin{cases} \inf f([x_{i-1}, c]) =: m_i' \\ \inf f([c, x_i]) =: m_i'' \end{cases}$$

$$\Rightarrow U_Z(f) \le m_i'(c - x_{i-1}) + m_i''(x_i - c) + \text{Rest}$$
$$= U_{Z'}(f)$$

Analog für Obersummen.

2) $Z_1, Z_2 \subset Z := Z_1 \cup Z_2$

$$\Rightarrow \quad U_{Z_1}(f) \underset{1)}{\le} U_Z(f) \underset{1.1}{\le} O_Z(f) \underset{1)}{\le} O_{Z_2}(f).$$

✓

1.3 <u>Folg</u>: Folgende Größen sind endlich.

$\mathcal{U}(f) := \sup\{\mathcal{U}_Z(f) \mid Z \text{ Zerl. v. } [a,b]\}$ <u>Unterintegral</u> von f

$O(f) := \inf\{O_Z(f) \mid Z \text{ Zerl. v. } [a,b]\}$ <u>Oberintegral</u> von f

Es gilt:

$$\mathcal{U}(f) \le O(f)$$

$X := \{\mathcal{U}_Z(f) \mid Z \text{ Zerl. v. } [a,b]\} \subset \mathbb{R}$

$Y := \{O_Z(f) \mid Z \text{ '' } [a,b]\} \subset \mathbb{R}$

$Z = \{a,b\}$ Zerl. von $[a,b] \Rightarrow X, Y \neq \emptyset$

1.2, 2) $\Rightarrow X \le Y$, d.h. $x \le y$ für alle $x \in X$, $y \in Y$

$\xRightarrow[\mathbb{R} \text{ vollst.}]{} \quad X \le \sup X \le Y$ und weiter

$\mathcal{U}(f) = \sup X \le \inf Y = O(f)$

<u>Def</u>: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt.

f (Riemann-)<u>integrierbar</u> :$\Leftrightarrow$ $\mathcal{U}(f) = O(f)$

In diesem Fall:

$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^b f := \mathcal{U}(f) = O(f)$ (Riemann-) <u>Integral von f</u>

1.4 <u>Lemma</u> (Integrierbarkeits-Kriterium)

f integrierbar $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists Z$ Zerl. v. $[a,b] : O_Z(f) - \mathcal{U}_Z(f) < \varepsilon$

<u>Bew</u>: „$\Rightarrow$": $I := \mathcal{U}(f) = O(f)$. Sei $\varepsilon > 0$

$I - \frac{\varepsilon}{2} < \mathcal{U}(f) \xRightarrow{\text{Auf. 1.3}} \exists Z_1 : I - \varepsilon/2 < \mathcal{U}_{Z_1}(f) \le \mathcal{U}_Z(f)$

$I + \varepsilon/2 > O(f) \Rightarrow \exists Z_2 : I + \varepsilon/2 > O_{Z_2}(f) \ge O_Z(f)$

setze $Z := Z_1 \cup Z_2$ $\Uparrow_{1.2,1)}$

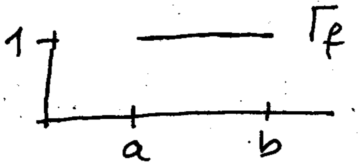
$\Rightarrow O_Z(f) - \mathcal{U}_Z(f) < (I + \varepsilon/2) - (I - \varepsilon/2) = \varepsilon$

„$\Leftarrow$": $\forall \varepsilon > 0 \ \exists Z : \underbrace{O_Z(f) - \mathcal{U}_Z(f)}_{\ge} < \varepsilon$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : \quad 0 \le O(f) - \mathcal{U}(f) < \varepsilon$

$\Rightarrow \quad \mathcal{U}(f) = O(f)$ ✓

1.5 Beisp.



1) $f:[a,b]\to\mathbb{R},\ f(x)=1$

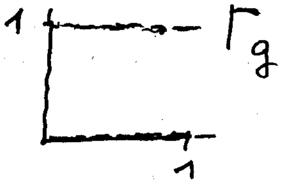
Für jede Zerl $Z=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\}$ gilt:

$$m_i = 1 = M_i \quad \text{für } i=1,\dots,n$$

$$\Rightarrow \mathcal{U}_Z(f) = \mathcal{O}_Z(f) = \sum_{i=1}^{n} 1(x_i-x_{i-1}) = b-a$$

$$\Rightarrow \mathcal{U}(f) = \mathcal{O}(f) = b-a$$

$\Rightarrow$ f integ.bar mit $\int_a^b f(x)dx = b-a$



2) $g:[0,1]\to\mathbb{R},\ g(x)=\begin{cases}1 & \text{falls } x\in\mathbb{Q}\\ 0 & \text{"}\quad x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$

Beh: g ist nicht integrierbar

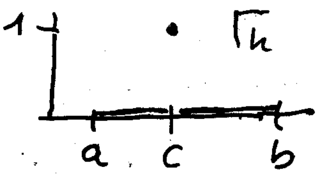
Für jede Zerl. $Z=\{0=x_0<x_1<\cdots<x_n=1\}$ gilt:

Jedes $[x_{i-1},x_i]$ enthält Elem. aus $\mathbb{Q}$ und aus $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

$\Rightarrow m_i=0$ und $M_i=1$ für $i=1,\dots,n$

$\Rightarrow \mathcal{U}_Z(g)=0$ und $\mathcal{O}_Z(g)=x_n-x_0=1$.

$\Rightarrow \mathcal{U}(g)=0 \neq 1 = \mathcal{O}(g)$.



3) Sei $a<c<b$ und

$h:[a,b]\to\mathbb{R},\ h(x)=\begin{cases}1 & \text{falls } x=c\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$

Beh: h ist integ.bar mit $\int_a^b h(x)dx = 0$

Sei $\varepsilon>0$ und o.E. $\varepsilon/4 < c-a, b-c$

Betrachte $Z=\{\underset{x_0}{\overset{\shortparallel}{a}},\ \underset{x_1}{\overset{\shortparallel}{c-\frac{\varepsilon}{4}}},\ \underset{x_2}{\overset{\shortparallel}{c+\varepsilon/4}},\ \underset{x_3}{\overset{\shortparallel}{b}}\}$

$$\Rightarrow \mathcal{U}_Z(h) = 0(x_1-x_0)+0(x_2-x_1)+0(x_3-x_2)=0$$

$$\mathcal{O}_Z(h) = 0(x_1-x_0)+1\underbrace{(x_2-x_1)}_{\varepsilon/2}+0(x_3-x_2) = \varepsilon/2$$

$$\Rightarrow \mathcal{O}_Z(h)-\mathcal{U}_Z(h) = \varepsilon/2 < \varepsilon$$

$\underset{1.4}{\Rightarrow}$ h ist integ.bar und $\int_a^b h(x)dx = \mathcal{U}(h) = 0$

1.6 <u>Satz</u>: Folgende Klassen von Funktionen $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ sind integrierbar.

1) stetige Funktionen,

2) monotone Funktionen.

<u>Bew</u>: 1) Sei $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $\varepsilon > 0$

f stetig $\underset{0.5}{\Longrightarrow}$ f gleichm. stetig, d.h.

$$\exists \delta > 0 \; \forall x,y \in [a,b] : \left(|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \right)$$

Wähle $Z = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n\}$ Zerleg. von $[a,b]$ mit

$|x_i - x_{i-1}| < \delta$ für $i = 1, \dots, n$ $\left(\begin{array}{l} \text{etwa } x_i = a + i\frac{b-a}{n}, \\ \text{wobei } \frac{b-a}{n} < \delta \end{array} \right)$

$$\Rightarrow M_i - m_i \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \text{ für } i = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow O_Z(f) - U_Z(f) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})}_{b-a} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

2) Aufg. 2.3

Wiederholung

$f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt

$Z = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ Zerleg. von $[a,b]$

$$\mathcal{U}_Z(f) := \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\inf f([x_{i-1},x_i])}_{=:m_i} (x_i - x_{i-1})$$

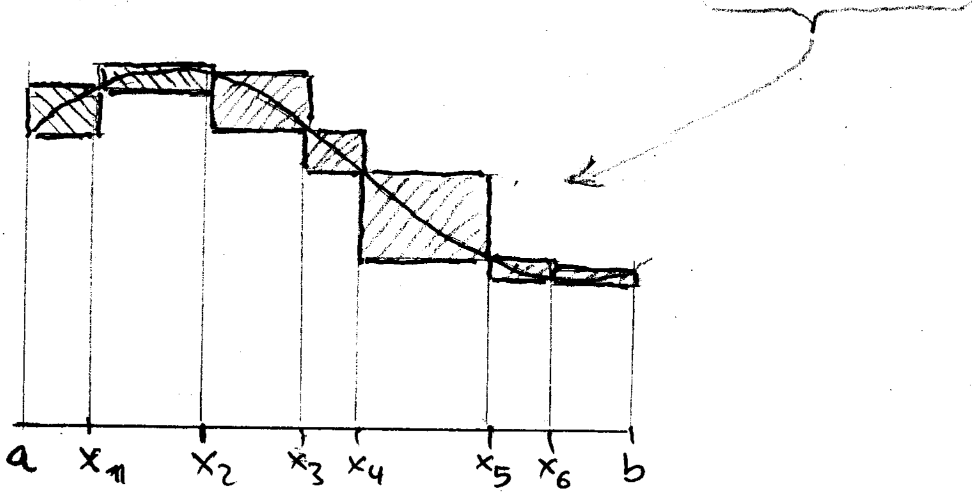
$$O_Z(f) := \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\sup f([x_{i-1},x_i])}_{=:M_i} (x_i - x_{i-1})$$

$\mathcal{U}(f) := \sup\{\mathcal{U}_Z(f) \mid Z \text{ Zerl.}\} \leq \inf\{O_Z(f) \mid Z \text{ Zerl.}\} =: O(f)$

Def: f integrierbar $:\Longleftrightarrow$ $\mathcal{U}(f) = O(f)$

In diesem Fall: $\int_a^b f(x)dx := \mathcal{U}(f)$

1.4 f integ.bar $\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \; \exists Z$ Zerl.: $O_Z(f) - \mathcal{U}_Z(f) < \varepsilon$



1.6 $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow$ f integrierbar

Sei $\varepsilon > 0$. f gleichm. stetig

$\Rightarrow \exists \delta > 0 \; \forall x,y \in [a,b]: \left(|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right)$

Sei Z Zerleg mit $x_i - x_{i-1} < \delta$ für $i = 1,\dots,n$

$\Rightarrow O_Z(f) - \mathcal{U}_Z(f) < \varepsilon$

1.7 Folg: sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig

$Z_n := \{x_i = a + i\frac{b-a}{n} \mid i=0,1,\dots,n\}$ äquidist. Zerleg.

$z_i \in [x_{i-1},x_i]$ für $i=1,\dots,n$

$$S_n(f) := \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{(b-a)/n} \quad \text{"Riemann-Summe"}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n(f) = \int_a^b f$$

Bew: $\forall i=1,\dots,n:\quad m_i \le f(z_i) \le M_i$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow \quad U_{Z_n}(f) \le S_n(f) \le O_{Z_n}(f) \\ &\text{Außerdem } U_{Z_n}(f) \le \int_a^b f \le O_{Z_n}(f) \end{aligned}\right\} (*)$$

Für $\varepsilon > 0$ sei $\delta > 0$ wie im Bew. von 1.6, 1)
und $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{b-a}{n_0} < \delta$

$$\Rightarrow \forall n \ge n_0: \quad O_{Z_n}(f) - U_{Z_n}(f) < \varepsilon$$

$$\underset{(*)}{\Rightarrow} \forall n \ge n_0: \quad \left| S_n(f) - \int_a^b f \right| < \varepsilon \qquad \checkmark$$

Beisp: $f:[0,b]\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

$z_i = x_i = 0 + i\frac{b}{n}$ für $i= 1,\dots,n$

$$\Rightarrow S_n(f) = \sum_{i=1}^{n}\left(i\frac{b}{n}\right)^2\frac{b}{n} = \sum_{i=1}^{n} i^2\frac{b^3}{n^3} = \frac{b^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$\underset{\text{AlgZth1}\,\cancel{\text{Ana1}}}{=} \frac{b^3}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= b^3\cdot\frac{(1+1/n)(2+1/n)}{6} \xrightarrow[n\to\infty]{} b^3\frac{2}{6} = \frac{1}{3}b^3$$

Also: $\int_0^b x^2 dx = \frac{1}{3}b^3$

1.8 **Satz** (Rechenregeln)

Seien $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrierbar. Dann gilt:

1) **Linearität**: $f+g$ und λf für $\lambda\in\mathbb{R}$ sind integ.bar mit

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g \quad , \quad \int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$$

2) **Monotonie**: $f\le g \Rightarrow \int_a^b f \le \int_a^b g$

3) $|f|:[a,b]\to\mathbb{R}$, $x\mapsto |f(x)|$, ist integ.bar mit

$$\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f| \qquad \text{"Dreiecksungleichung"}$$

4) $f(x)=g(x)$ für **fast alle** $x\in[a,b] \Rightarrow \int_a^b f = \int_a^b g$

5) Für $a<b<c$ und $h:[a,c]\to\mathbb{R}$ gilt:

h int.bar $\Longleftrightarrow h|_{[a,b]}$ und $h|_{[b,c]}$ int.bar

In diesem Fall:

$$\int_a^c h(x)dx = \int_a^b h(x)dx + \int_b^c h(x)dx \qquad \text{"Additivität bzgl. Integrationsbereich"}$$

Bew: mit ε-Kriterium 1.4

1) **für $f+g$**: Sei $\varepsilon>0$ und Z Zerl. von $[a,b]$ mit

$$O_Z(f)-U_Z(f) < \tfrac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad O_Z(g)-U_Z(g) < \tfrac{\varepsilon}{2}$$

zeigen:

$$A:=U_Z(f)+U_Z(g) \overset{(*)}{\le} U_Z(f+g) \le O_Z(f+g) \overset{(**)}{\le} O_Z(f)+O_Z(g) =: B$$

$\Big(\Rightarrow O_Z(f+g)-U_Z(f+g) \le B-A<\varepsilon$, d.h. $f+g$ integ.bar

Wegen $\int_a^b (f+g), \int_a^b f + \int_a^b g \in [A,B]$ folgt: $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$ $\Big)$

zu (*): Sei $Z=\{x_0<x_1<\cdots<x_n\}$ und $i\in\{1,\dots,n\}$

$\Rightarrow m_i(f):=\inf f([x_{i-1},x_i]) \le f(y)$ für alle $y\in[x_{i-1},x_i]$

$\Rightarrow m_i(f)+m_i(g) \le f(y)+g(y) = (f+g)(y)$ " " "

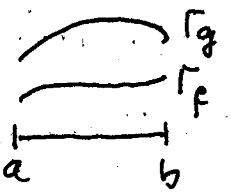
$\Rightarrow m_i(f)+m_i(g) \le \inf (f+g)([x_{i-1},x_i]) =: m_i(f+g)$

Mult. mit (x_i-x_{i-1}) und Aufsumm. liefert die Beh(*).

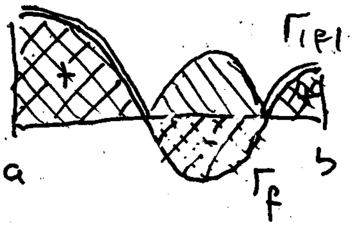
(**) analog.

2) – 5) ähnlich   2) $g = f + \underbrace{(g-f)}_{=:h \geq 0}$ $\underset{1)}{\Rightarrow}$ reicht z.z. $h \geq 0 \Rightarrow \int_a h \geq 0$

2)



3)



▨ ≤ ▨
blau   rot

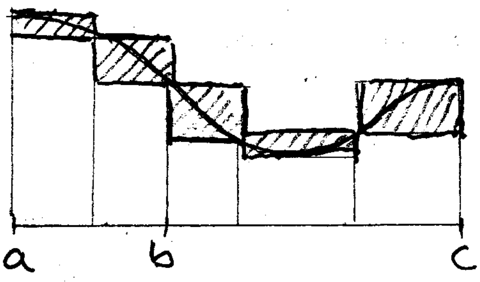
4) $\{x \in [a,b] \mid f(x) \neq g(x)\} = \{c_1, \dots, c_r\}$ endlich

Nach 1.5, 3) ist $\eta_{c_i}(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x = c_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ intbar mit $\int_a^b \eta_{c_i} = 0$

$$g = f + \sum_{i=1}^{r} \underbrace{(g(c_i) - f(c_i))}_{=:\lambda_i} \eta_{c_i}$$

$$\Rightarrow \int_a^b g \underset{1)}{=} \int_a^b f + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \underbrace{\int_a^b \eta_{c_i}}_{0} = \int_a^b f$$

5) Betrachte Zerlegungen Z von $[a,c]$ mit $b \in Z$



✓

<u>Def</u>: Für $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integ. bar setzt man

$$\int_a^a f := 0 \ , \quad \int_b^a f := -\int_a^b f$$

<u>Folg</u>: Ist $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ integrierbar, so gilt:

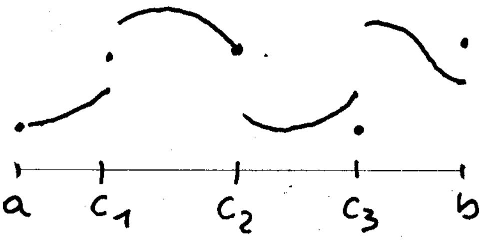
$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f \qquad \text{für alle } a, b, c \in [\alpha, \beta]$$

// z.B. für $c < a < b$

$$\int_c^b \underset{5)}{=} \int_c^a + \int_a^b \Rightarrow -\int_c^a = \int_a^b - \int_c^b \Rightarrow \int_a^c = \int_a^b + \int_b^c$$ ✓ //

1.9 **Def**: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ **stückweise stetig** $:\Leftrightarrow$

es gibt Punkte $a=c_0<c_1<\cdots<c_m=b$ und stetige Fkt. $f_i:[c_{i-1},c_i]\to\mathbb{R}$ für $i=1,\dots,m$ mit $f(x)=f_i(x)$ für alle $x\in]c_{i-1},c_i[$, $i=1,\dots,m$



Satz: Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stückweise stetig wie oben

$\Rightarrow$ f ist integrierbar mit

$$\int_a^b f=\sum_{i=1}^m\int_{c_{i-1}}^{c_i} f_i$$

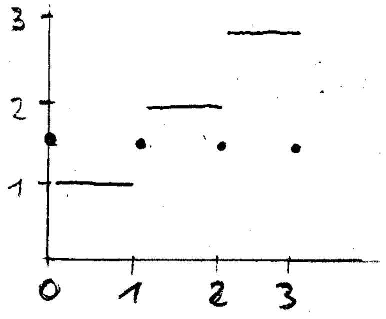
Bew: Für $i=1,\dots,m$:

$$\left.\begin{array}{l}f_i \text{ stetig, also int.bar}\\ f|_{[c_{i-1},c_i]}=f_i \text{ fast überall}\end{array}\right\}\text{1.8,4)}$$

$$\Rightarrow\quad\int_a^b f\underset{\substack{\uparrow\\ 1.8,5)}}{=}\sum_{i=1}^m\int_{c_{i-1}}^{c_i} f|_{[c_{i-1},c_i]}=\sum_{i=1}^m\int_{c_{i-1}}^{c_i} f_i\qquad\checkmark$$

Beisp $f:[0,3]\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{für } 0<x<1\\ 2 & \text{"} \quad 1<x<2\\ 3 & \text{"} \quad 2<x<3\\ 3/2 & \text{"} \quad x\in\{0,1,2,3\}\end{cases}$$



f ist stückweise stetig mit

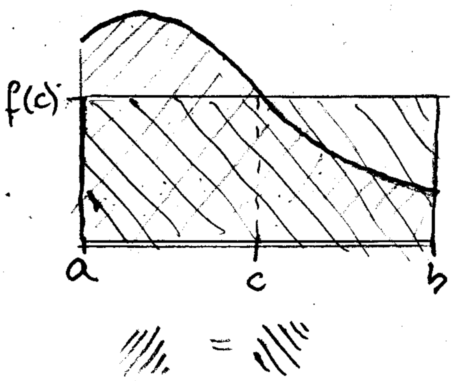
$$\int_0^3 f=\sum_{i=1}^3\underbrace{\int_{i-1}^i i}_{i}=1+2+3=6$$

1.10 Mittelwertsatz (der Integralrechnung)

Sei $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ stetig

$\Rightarrow$ es gibt ein $c\in[a,b]$ mit

$$\int_a^b f = f(c)\cdot(b-a)$$



Satz (Verallg. MWS)

Seien $f,g:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ stetig und $g\geq 0$

$\Rightarrow$ es gibt ein $c\in[a,b]$ mit

$$\int_a^b fg = f(c)\int_a^b g$$

Bew: "Verallg. MWS $\Rightarrow$ MWS"

$g=1$ const. $\Longrightarrow \int_a^b g = \int_a^b 1 \underset{\uparrow\ 1.5,1)}{=} b-a$

Verallg. MWS: $m := \min f([a,b])$, $M := \max f([a,b])$

$\Rightarrow m\leq f\leq M \underset{g\geq 0}{\Longrightarrow} mg\leq fg\leq Mg$

$\underset{1.8}{\Rightarrow} m\int_a^b g \underset{1)}{=} \int_a^b mg \underset{2)}{\leq} \int_a^b fg \underset{2)}{\leq} \int_a^b Mg \underset{1)}{=} M\int_a^b g$

$\Rightarrow \exists\mu\in[m,M]: \int_a^b fg = \mu\int_a^b g$

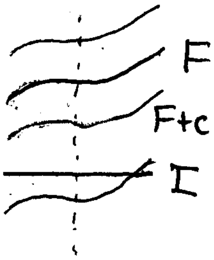
f stetig $\underset{\text{ZWS}}{\Longrightarrow} \exists c\in[a,b]: f(c)=\mu$ ✓

§2 Hauptsatz, Integralberechnung

Im Folg: $I \subset \mathbb{R}$ Intervall der Länge >0

2.1 **Def**: Sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine Funktion.
$F: I \to \mathbb{R}$ heißt **Stammfunktion von f** $:\Leftrightarrow$
F ist differenzierbar mit $F' = f$

Lemma: Sei $F: I \to \mathbb{R}$ Stammfkt. von $f: I \to \mathbb{R}$
Dann gilt für $G: I \to \mathbb{R}$:
G Stammfkt. von $f \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}: G = F + c$



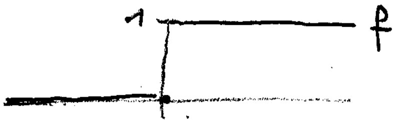
Bew

„$\Rightarrow$“: $$G' = f = F' \Rightarrow \left.\begin{matrix}(G-F)' = G' - F' = 0 \\ I \text{ Intervall}\end{matrix}\right\} \underset{\text{Ana 1, 6.13}}{\Longrightarrow} \exists c \in \mathbb{R}: G - F = c, \text{ d.h. } G = F + c$$

„$\Leftarrow$“: F diff.bar mit $F' = f$
$\Rightarrow G = F + c$ diff.bar mit $G' = F' + c' = f + 0 = f$ ✓

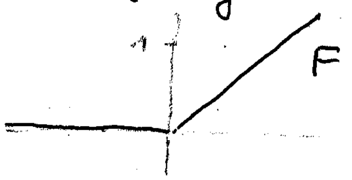
Bemerk: Nicht jede Funktion hat eine Stammfkt.

Beisp: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ 1 & \text{" } x > 0 \end{cases}$



Ann: f hat Stammfkt F, und o.E. $F(0) = 0$ (wegen Lemma)

$$\Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ x & \text{" } x > 0 \end{cases}$$

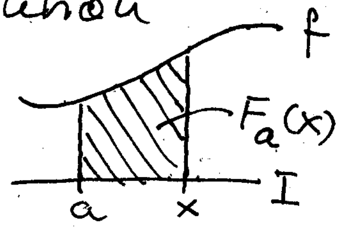


Aber F ist nicht diffbar in $x = 0$ Wid.

2.2 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:

1) Für jedes $a \in I$ ist die Integralfunktion



$$F_a : I \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

differenzierbar mit $F_a' = f$, d.h. F_a ist Stammfkt. von f.

2) Ist $F : I \to \mathbb{R}$ eine belieb. Stammfkt von f, so gilt für alle $a, b \in I$:

$$\int_a^b f \;=\; F(b) - F(a) \;=:\; F\Big|_a^b \quad \left(= [F]_a^b\right)$$

Bew: 1) Seien $a, x \in I$ fest.

zeigen: $\displaystyle\lim_{y \to x} \frac{F_a(y) - F_a(x)}{y - x} = f(x)$

$$\frac{F_a(y) - F_a(x)}{y - x} = \frac{1}{y-x}\left(\int_a^y f - \int_a^x f\right) \underset{\substack{\uparrow \\ 1.8,\,\text{Folg}}}{=} \frac{1}{y-x} \cdot \int_x^y f$$

$$\underset{1.10}{=} \frac{1}{y-x}\, f(c_y)\,(y-x) \quad \text{für ein } c_y \text{ zwisch. } x \text{ und } y$$

$$= f(c_y) \xrightarrow[y \to x]{} ?$$

$$\begin{tikzcd} y \arrow[d] \arrow[r, phantom, "\overset{\Longrightarrow}{\substack{c_y \text{ zwisch.} \\ x \text{ und } y}}"] & c_y \arrow[d] \arrow[r, phantom, "\overset{\Longrightarrow}{f \text{ stetig}}"] & f(c_y) \arrow[d] \\ x & x & f(x) \end{tikzcd}$$

2) Sei $F : I \to \mathbb{R}$ Stammfkt von f, $a, b \in I$, und $F_a : I \to \mathbb{R}$ wie in 1).

$$\underset{2.1}{\Longrightarrow} \quad \exists\, c \in \mathbb{R} : \; F = F_a + c$$

$$\Longrightarrow \quad F(b) - F(a) = (F_a(b) + c) - (F_a(a) + c)$$

$$= \int_a^b f + \cancel{c} - \underbrace{\int_a^a f}_{0} - \cancel{c} \;=\; \int_a^b f \qquad \checkmark$$

2.3 Bedeutung des Hauptsatzes (HS)

1) "Integration = Umkehrung von Differentiation"

für f stetig: $\left(\int_a^x f(t)dt\right)' \underset{HS 1)}{=\!=} f(x)$

für f diffbar, mit f' stetig: $\int_a^x f'(t)dt \underset{HS 2)}{=} f(x) - \underbrace{f(a)}_{const}$ (mehr kann man nicht erwarten)

2) HS 2) reduziert Berechnung von $\int_a^b f$ für f stetig auf zwei Schritte:

I) Finde eine Stammfkt. F von f

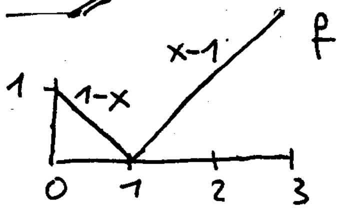
II) Berechne $F(b) - F(a)$

2.4 Beisp

1) $\int_1^2 \underbrace{(x^2-1)}_{f(x)}dx = \underbrace{\left(\frac{1}{3}x^3 - x\right)}_{F(x)}\Big|_1^2 = \underbrace{\left(\frac{8}{3}-2\right)}_{F(2)} - \underbrace{\left(\frac{1}{3}-1\right)}_{F(1)} = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$

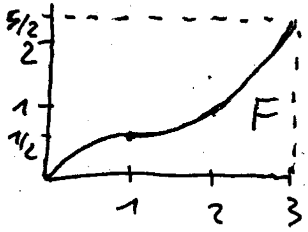
$\left(\frac{1}{3}x^3 - x\right)' = x^2 - 1 = \underline{f(x)}$!

2) $\int_0^3 \underbrace{|x-1|}_{f(x)}dx = ?$



f hat Stammfkt

$$F(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{2}x^2 & \text{für } 0 \le x \le 1 \\ \frac{1}{2}x^2 - x + \cancel{c}1 & \text{für } 1 < x \le 3 \end{cases}$$



$c = ? : 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 1 + c \Rightarrow c = \underline{1}$!

$\Rightarrow \int_0^3 f = F(x)\Big|_0^3 = F(3) - F(0) = \left(\frac{9}{2} - 3 + 1\right) - 0 = \underline{\underline{\frac{5}{2}}}$

Alternativ:

$$\int_0^3 f = \int_0^1 f + \int_1^3 f = \int_0^1 (1-x)dx + \int_1^3 (x-1)dx$$

$$= \left(x - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)\Big|_1^3 = \left(\frac{1}{2} - 0\right) + \left(\frac{3}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{5}{2}$$

2.5 **Def**: sei $f: I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann heißt

$\int f := \int f(x)dx :=$ Menge der Stammfunktionen von f

das unbestimmte Integral von f.

Statt $F \in \int f$ schreibt man oft

$\int f = F$ Lies: "F ist eine Stammfkt. von f"

Achtung! $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3$ und $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + 1$, aber $\frac{1}{3}x^3 \neq \frac{1}{3}x^3 + 1$

Bem ⊛: Im Gegensatz zu $\int f$ nennt man $\int_a^b f$ "bestimmtes Integral"

Wichtige Stammfunktionen

$f(x)$	$\int f(x)dx$
x^α, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$
$\frac{1}{x}$, $x \neq 0$	$\ln\lvert x\rvert$
$\sin x$, $\cos x$	$-\cos x$, $\sin x$
e^x	e^x
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$

zu $\ln|x|$ für $x<0$:

$x < 0 \Rightarrow |x| = -x > 0 \Rightarrow \ln(-x)' = (-1) \cdot \frac{1}{-x} = \underline{\underline{\frac{1}{x}}}$ ✓

Bem: Folgende Funktionen haben keine "elementare" Stammfunktion:

$\frac{\sin x}{x}$, e^{-x^2}, $\frac{1}{\ln x}$ (siehe: Behrends, Ana 2, 6.6)

⊛ **MERKE**: | $\int f$ ist eine Menge von Funktionen

$\int_a^b f$ ist eine Zahl

Integrationsmethoden

2.6 Linearität: Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ stetig, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \int (\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$$

und $\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$ für alle $a, b \in I$

⌜ sei $\int f = F$ und $\int g = G$

$$\Rightarrow (\alpha F + \beta G)' = \alpha F' + \beta G' = \alpha f + \beta g$$

d.h. $\int (\alpha f + \beta g) = \alpha F + \beta G$

Für bestimmte Integrale siehe 1.8, 1) ⌟

Def: $f : I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar $:\Leftrightarrow$

f ist diff.bar und f' stetig

2.7 Satz (Partielle Integration)

Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ stetig diff.bar. Dann gilt:

$$\int f'g = fg - \int fg'$$

und $\int_a^b f'g = fg\Big|_a^b - \int_a^b fg'$ für alle $a, b \in I$

Bew: $fg : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)g(x)$ ist diffbar mit

$(fg)' = f'g + fg'$ (Produktregel)

$$\Rightarrow fg = \int (f'g + fg') \underset{2.6}{=} \int f'g + \int fg'$$

und $fg\Big|_a^b \underset{HS\,2)}{=} \int_a^b (f'g + fg') = \int_a^b f'g + \int_a^b fg'$

$$\Rightarrow \int_a^b f'g = fg\Big|_a^b - \int_a^b fg' \qquad ✓$$

2.8 Beisp

1) $\int \underset{g}{x}\, \underset{f'}{\sin x}\, dx = \underset{f}{(-\cos x)}\, \underset{g}{x} - \int -\cos x\, dx = -x\cos x + \underbrace{\int \cos x\, dx}_{\sin x}$

$$\int_0^\pi x \sin x\, dx = (-x\cos x + \sin x)\Big|_0^\pi = -\pi \underbrace{\cos\pi}_{-1} + \underbrace{\sin\pi}_{0} + 0 - 0 = \underline{\underline{\pi}}$$

2) $\int \underset{g}{(x^2+3x)}\, \underset{f'}{e^{2x}}\, dx = \underset{g}{(x^2+3x)} \underbrace{\tfrac{1}{2}e^{2x}}_{f} - \underbrace{\int \underset{v}{(2x+3)}\, \underbrace{\tfrac{1}{2}e^{2x}}_{u'}\, dx}_{(2x+3)\frac{1}{4}e^{2x} - \underbrace{\int \frac{1}{2}e^{2x}dx}_{\frac{1}{4}e^{2x}}}$

$$= (2x^2+6x-2x-3+1)\frac{1}{4}e^{2x}$$

$$= \frac{1}{2}(x^2+2x-1)\, e^{2x}$$

MERKE: Bei ∫ Polyn·trigonFkt oder ∫ Polyn·exp-Fkt arbeite Polynom ab.

3) $\int \underset{f'}{e^x}\, \underset{g}{\sin x}\, dx = e^x \sin x - \underbrace{\int \underset{u'}{e^x}\, \underset{v}{\cos x}\, dx}_{e^x \cos x + \int e^x \sin x\, dx}$

$$\Rightarrow \cancel{2}\int e^x \sin x\, dx = \frac{1}{2} e^x(\sin x - \cos x)$$

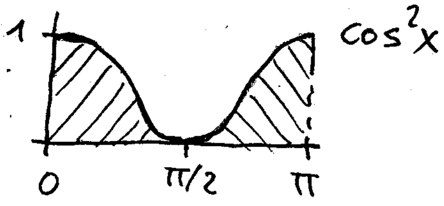
4) $\int \cos^2 x\, dx = \int \underset{f'}{\cos x}\, \underset{g}{\cos x}\, dx = \sin x \cos x - \int \sin x(-\sin x)dx$

$$= \sin x \cos x + \underbrace{\int \sin^2 x\, dx}_{\int(1-\cos^2 x)dx = \underbrace{\int 1}_{x} - \int \cos^2 x\, dx}$$

$$\Rightarrow \int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x)$$

und $\int_0^\pi \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x)\Big|_0^\pi$

$$= \frac{1}{2}(\pi + 0 - 0 - 0) = \pi/2$$



5) $\int \ln x\, dx = \int \underset{f'}{1} \cdot \underset{g}{\ln x}\, dx = x \ln x - \underbrace{\int \underbrace{x \cdot \frac{1}{x}}_{1} dx}_{x} = x(\ln x - 1)$

2.9 Satz (Substitutionsregel)

Sei $f: I \to \mathbb{R}$ stetig und
$\varphi: [a,b] \to I$ stetig diff.bar

Dann gilt:

$$\int (f\circ\varphi)\,\varphi' = \left(\int f\right)\circ\varphi$$

$$\int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx$$

Bew: sei $F: I \to \mathbb{R}$ Stammfkt. von f, d.h. $\int f = F$

$$\Rightarrow (F\circ\varphi)' \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Kettenreg.}}}{=} (F'\circ\varphi)\,\varphi' = (f\circ\varphi)\,\varphi',$$

$\Rightarrow$ $F\circ\varphi$ ist Stammfkt von $(f\circ\varphi)\,\varphi'$

d.h. $\int (f\circ\varphi)\,\varphi' = F\circ\varphi$

$$\Rightarrow \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt \underset{HS}{=} (F\circ\varphi)(t)\Big|_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$$

$$\underset{HS}{=} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx \qquad \checkmark$$

Bem:

1) Merkhilfe: $\boxed{\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ dx &= \varphi'(t)\,dt \end{aligned}}$ $\quad \frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$ Leibniz-notation

2) Anwend. gegeben neu

Methode I: $$\int_a^b f(\underbrace{\varphi(x)}_{u})\,\underbrace{\varphi'(x)\,dx}_{du} = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,du$$

Methode II: $$\int_a^b f(\underset{\varphi(t)}{\underset{\shortparallel}{x}})\,\underbrace{dx}_{\varphi'(t)dt} = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

2.10 Beisp

1) $\int_4^9 \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = ?$

Meth. I: $$\int_4^9 \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = \int_4^9 \cos\sqrt{x}\;\frac{2}{2\sqrt{x}}\,dx$$

$$\underset{\substack{u=\sqrt{x}\\ du=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx}}{=} 2\int_{u(4)=2}^{u(9)=3} \cos u\,du$$

$$= 2\sin u\Big|_2^3$$

$$= 2(\sin 3 - \sin 2)$$

$f = \cos$

$u = \varphi(x) = \sqrt{x}$

$\frac{du}{dx} = \varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$

Meth. II: $$\int_{4\leftarrow x}^9 \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx \underset{\substack{x=t^2\\ dx=2t\,dt}}{=} \int_{2\leftarrow t}^3 \frac{\cos t}{\cancel{t}}\,2\cancel{t}\,dt$$

$$= 2\int_2^3 \cos t\,dt = 2\sin t\Big|_2^3$$

$$= 2(\sin 3 - \sin 2)$$

$\sqrt{x}$ stört

$x = \varphi(t) = t^2$

$\frac{dx}{dt} = \varphi'(t) = 2t$

$dx = 2t\,dt$

2) $$\int 4x e^{x^2+3}\,dx \underset{\substack{u=x^2+3\\ du=2x\,dx}}{=} \int 2e^u\,du = 2e^u \underset{\substack{\uparrow\\ u=x^2+3}}{=} 2e^{x^2+3}$$

3) $$\int \sin^2(5x)\cos(5x)\,dx \underset{\substack{u=\sin(5x)\\ du=5\cos(5x)\,dx}}{=} \frac{1}{5}\int u^2\,du = \frac{1}{15}u^3 \underset{\substack{\uparrow\\ u=\sin(5x)}}{=} \frac{1}{15}\sin^3(5x)$$

4) $$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx \underset{\substack{u=\cos x\\ du=-\sin x\,dx}}{=} -\int \frac{1}{u}\,du = -\ln(u) = \underline{-\ln(\cos x)}$$

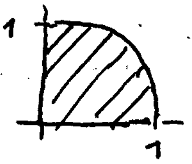
5) <u>Lineare Substitution</u>: Sei F Stammfkt. von f und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$

$$\int f(\alpha x+\beta)\,dx \underset{\substack{u=\alpha x+\beta \\ du=\alpha\,dx}}{=} \frac{1}{\alpha}\underbrace{\int f(u)\,du}_{F(u)} = \frac{1}{\alpha}F(\alpha x+\beta)$$

6) $$\int_3^5 x(x-2)^{10}dx \underset{\substack{x=t+2 \\ dx=dt}}{=} \int_{3-2}^{5-2}(t+2)t^{10}dt = \int_1^3 (t^{11}+2t^{10})\,dt$$

$$= \left(\frac{1}{12}t^{12}+\frac{2}{11}t^{11}\right)\Big|_1^3 = \frac{3^{12}}{12}+\frac{2\cdot 3^{11}}{11}-\frac{1}{12}-\frac{2}{11}$$

7) $$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = ?$$



$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx \underset{\substack{x=\sin t \\ dx=\cos t\,dt}}{=} \int_0^{\pi/2} \underbrace{\sqrt{1-\sin^2 t}}_{\cos t}\cos t\,dt$$

$$= \int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt \underset{\substack{\uparrow \\ 2.8,4)}}{=} \frac{1}{2}(t+\sin t\cos t)\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+0-0-0\right) = \frac{\pi}{4}$$

8) $\int \ln x\,dx$ (alternativ zu 2.8,5))

$$\int \ln x\,dx \underset{\substack{x=e^t \\ dx=e^t dt}}{=} \int \underbrace{\ln(e^t)}_{\substack{t \\ \nwarrow g}} \underset{\substack{\uparrow \\ f'}}{e^t}\,dt \underset{P.I.}{=} te^t - \underbrace{\int e^t dt}_{e^t}$$

$$= (t-1)e^t \underset{\substack{\uparrow \\ t=\ln x}}{=} (\ln x - 1)x$$

Rationale Funktionen sind Funkt. der Form

$\frac{p(x)}{q(x)}$, wobei $p(x), q(x)$ Polynome

zwei Beispiele mit $\operatorname{grad} p(x) < \operatorname{grad} q(x) = 2$

9) $$\int \frac{2x+3}{x^2+4}\,dx = \underbrace{\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int \frac{3}{x^2+4}\,dx}_{I_2}$$

$$I_1 \underset{\substack{u = x^2+4 \\ du = 2x\,dx}}{=} \int \frac{1}{u}\,du = \ln(x^2+4)$$

$$I_2 = \frac{3}{4}\int \frac{1}{1+\frac{1}{4}x^2}\,dx = \frac{3}{4}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{1}{1+u^2}\,du$$

$$u = \frac{x}{2}$$
$$du = \frac{1}{2}\,dx$$

$$= \frac{3}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \int \frac{2x+3}{x^2+4}\,dx = \ln(x^2+4) + \frac{3}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)$$

10) $$\int \frac{2x+5}{x^2-3x+2}\,dx = ?$$

Finde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\frac{2x+5}{x^2-3x+2} = \frac{2x+5}{(x-1)(x-2)} = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x-2}$$ (Partialbruchzerlegung)

$$2x+5 = \alpha(x-2) + \beta(x-1) = (\alpha+\beta)x + (-2\alpha-\beta)$$

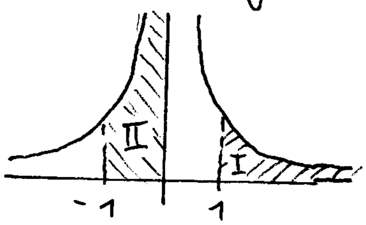
$$\underset{\text{Koeff. vergl.}}{\Longleftrightarrow} \left| \begin{array}{l} \alpha + \beta = 2 \\ -2\alpha - \beta = 5 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} +\alpha = -7 \\ \beta = 9 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \int \frac{2x+5}{x^2-3x+2}\,dx = \int \left(\frac{-7}{x-1} + \frac{9}{x-2}\right) dx$$

$$= -7\ln(x-1) + 9\ln(x-2)$$

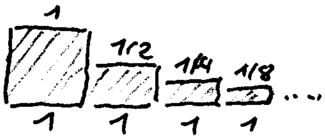
§ 3 Uneigentliche Integrale

$f(x) = \frac{1}{x^2}\,,\ x \neq 0$



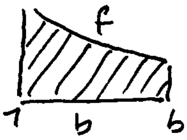
Frage: Haben I bzw II endl. Flächeninhalt?

⫽ unbeschr & endl. Inhalt?



$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2$!

Idee:



$1 < b < +\infty$

$\int_1^b f \xrightarrow[b \to \infty]{} ?$

!

Wie bei Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \xrightarrow[n \to \infty]{} ?$

3.1 Ein uneigentl. Integral $\int_a^\beta f$ mit kritischem Randpkt. β ist gegeben durch Fkt $f: [a, \beta[\to \mathbb{R}$, $a < \beta \leq +\infty$, mit

1) $f|_{[a,b]}$ integbar für alle $b \in [a, \beta[$

2) $\beta = +\infty$ oder f nicht beschränkt (bei β)

Bem: -) f stetig $\Rightarrow$ 1) ist erfüllt

-) $\beta < +\infty \Rightarrow \forall b < \beta: f|_{]b,\beta[}$ nicht beschr., d.h. β ist "Singularität" von f

Def: $\int_a^\beta f$ konvergiert $:\Leftrightarrow \lim\limits_{b \nearrow \beta} \int_a^b f$ existiert (in $\mathbb{R}$)

In diesem Fall: $\int_a^\beta f := \lim\limits_{b \nearrow \beta} \int_a^b f$ Wert des uneig. Int.

Anderenfalls heißt $\int_a^\beta f$ divergent.

$\int_a^\beta f$ bestimmt divergent $:\Leftrightarrow \lim\limits_{b \nearrow \beta} \int_a^b f = \underset{(-\infty)}{+\infty}$

Analog: uneigentl. Int. $\int_\alpha^b f$ mit krit. Randpkt. $\alpha \geq -\infty$

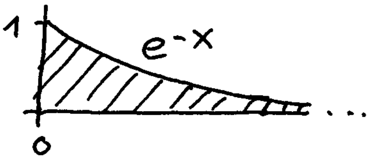
Für $\int_\alpha^\beta f$ mit α und β kritisch spaltet man auf:

$$\int_\alpha^\beta f = \int_\alpha^c f + \int_c^\beta f \quad \text{für ein } c \in]\alpha, \beta[$$

$\int_\alpha^\beta f$ konv. $:\Leftrightarrow$ beide konv. (unabh. von c)

3.2 Beisp

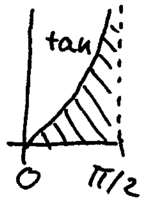
1) $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$



$$\int_0^b e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^b = -e^{-b} + \underbrace{e^0}_{1} = 1 - e^{-b} \xrightarrow[b\to\infty]{} 1-0=1$$

Also: $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$ konverg. mit Wert $\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$

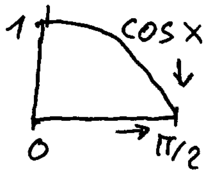
2) $\int_0^{\pi/2 \leftarrow \text{krit.}} \tan x\,dx$

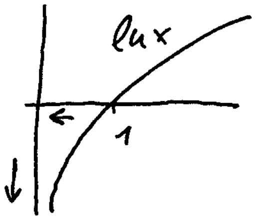


$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \xrightarrow[x\nearrow\frac{\pi}{2}]{} +\infty$$

$$\int_0^b \tan x\,dx \underset{\substack{\uparrow\\ 2.10,4)}}{=} -\ln(\cos x)\Big|_0^b = -\ln(\cos b) + \underbrace{\ln(\overset{1}{\cos 0})}_{0}$$

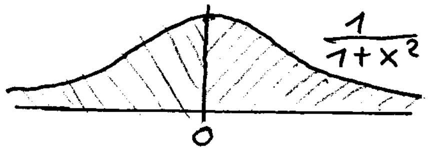
$$\lim_{b\nearrow\frac{\pi}{2}} -\ln(\cos b) = \lim_{y\searrow 0} -\ln(y) = -(-\infty) = +\infty$$



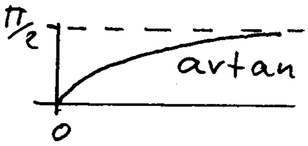


Alo: $\int_0^{\pi/2} \tan x\,dx$ divergiert bestimmt mit $\int_0^{\pi/2} \tan x\,dx = +\infty$

3) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$



$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$: $\int_0^b \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x\Big|_0^b$



$$= \arctan b - 0 \xrightarrow[b\to\infty]{} \frac{\pi}{2}$$

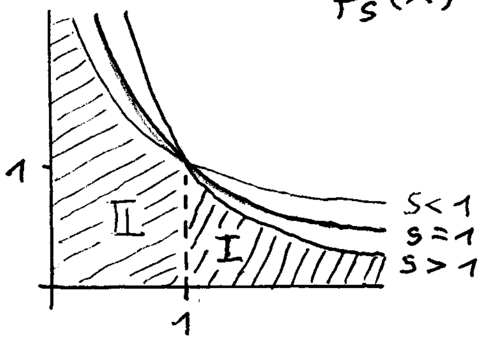
Also: $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$

Analog: $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ konverg. mit Wert $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi$

4) Sei $s > 0$ und $f_s :]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$f_s(x) = \frac{1}{x^s}$$



$$\int_{\text{Krit} \to 0}^{\text{krit} \to \infty} \frac{1}{x^s}\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{x^s}\,dx$$

<u>Bek</u>: I) $\int_1^\infty \frac{1}{x^s}dx = \frac{1}{s-1}$ für $s>1$, und $+\infty$ sonst.

II) $\int_0^1 \frac{1}{x^s}dx = \frac{1}{1-s}$ für $s<1$, und $+\infty$ sonst.

<u>$s=1$</u>: $\int_1^b \frac{1}{x}dx = \ln b - \underbrace{\ln 1}_{0} \xrightarrow[b\to\infty]{} +\infty \Rightarrow \int_1^\infty \frac{1}{x}dx = +\infty$

$\int_a^1 \frac{1}{x}dx = \underbrace{\ln 1}_{0} - \ln a \xrightarrow[a \searrow 0]{} \underbrace{-(-\infty)}_{+\infty} \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{x}dx = +\infty$

<u>$s>1$</u>: $\int_1^b \frac{1}{x^s}dx = \frac{1}{1-s}\,x^{1-s}\Big|_1^b = \frac{1}{1-s}\left(\frac{1}{b}\right)^{\underset{>0}{\uparrow}s-1} - \frac{1}{1-s} \xrightarrow[b\to\infty]{} -\frac{1}{1-s} = \frac{1}{s-1}$

$\Rightarrow \int_1^\infty \frac{1}{x^s}dx = \frac{1}{s-1}$

$\left.\begin{array}{l} \forall x \in]0,1] : \frac{1}{x^s} \geq \frac{1}{x} \\ \int_0^1 \frac{1}{x}dx = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{x^s}dx = +\infty$

<u>$s<1$</u>: $\left.\begin{array}{l} \forall x \in [1,\infty[: \frac{1}{x^s} \geq \frac{1}{x} \\ \int_1^\infty \frac{1}{x}dx = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \int_1^\infty \frac{1}{x^s}dx = +\infty$

$\int_a^1 \frac{1}{x^s}dx = \frac{1}{1-s}\,x^{1-s}\Big|_a^1 = \frac{1}{1-s} - \frac{1}{1-s}\,a^{\underset{>0}{\uparrow}1-s} \xrightarrow[a\searrow 0]{} \frac{1}{1-s} - 0$

$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{x^s}dx = \frac{1}{1-s}$

3.3 <u>Satz</u> (Majoranten-Kriterium)

Seien $f, g : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $|f| \leq g$

Dann gilt:

$$\int_a^b g \text{ konv.} \Rightarrow \int_a^b f \text{ konv.}$$

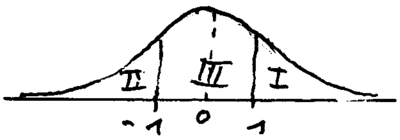
⌈⌈ Siehe z.B. Fritzsche, Analysis 1, 4.4
Ähnl. wie Majo-Krit. für Reihen: Ana 1, 3.7 ⌋⌋

<u>Beisp</u>

1) <u>Beh</u>: $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x+x^2}\,dx$ konverg.

⌈⌈ $\forall x \geq 1 : \left|\frac{\cos x}{x+x^2}\right| = \frac{|\cos x|}{x+x^2} \leq \frac{1}{x+x^2} \leq \frac{1}{x^2}$
Nach 3.2, 4): $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ konverg. $\Big\} \underset{\text{Satz}}{\Longrightarrow}$ Beh ⌋⌋

2) <u>Beh</u>: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ konverg.



⌈⌈ I) $\forall x \geq 1 : x^2 \geq x$, also $e^{-x^2} \leq e^{-x}$
Nach 3.2, 1): $\int_1^\infty e^{-x}\,dx$ konv. $\Big\} \underset{\text{Satz}}{\Longrightarrow} \int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$ konv.

II) Analog: $\int_{-\infty}^{-1} e^{-x^2}\,dx$ konv.

III) $\int_{-1}^{1} e^{-x^2}\,dx$ ist endlich ⌋⌋

<u>Bem</u>: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$

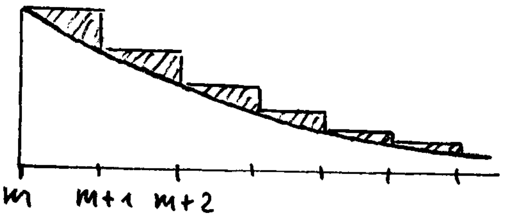
3.4 Satz (Integralkriterium): Sei $m \in \mathbb{N}_0$ und $f : [m, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ monoton fallend mit $f \geqslant 0$.

Dann gilt:

$$\sum_{k=m}^{\infty} f(k) \text{ konverg.} \iff \int_m^{\infty} f(x)\,dx \text{ konverg.}$$

In diesem Fall:

$$0 \leq \sum_{k=m}^{\infty} f(k) - \int_m^{\infty} f(x)\,dx \leq f(m)$$



Bew: $\forall k \geq m: \; f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f \leq f(k)$

$$\Rightarrow \forall n \geq m: \sum_{k=m+1}^{n+1} f(k) = \sum_{k=m}^{n} f(k+1) \leq \int_m^{n+1} f \leq \sum_{k=m}^{n} f(k) \qquad (*)$$

„⇒": Sei $S := \sum_{k=m}^{\infty} f(k)$ und $F(b) := \int_m^b f(x)\,dx$ für $b \geq m$

$$\left.\begin{array}{l} f \geqslant 0 \Rightarrow F \text{ mon. steigend} \\ (*) \Rightarrow \forall b \geq m: F(b) \leq S \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow$ es exist. $\int_m^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to \infty} F(b) \; (= \sup F([m, \infty[))$

und $\int_m^{\infty} f(x)\,dx \leq S = \sum_{k=m}^{\infty} f(k)$

„⇐": Sei $I := \int_m^{\infty} f(x)\,dx$ und $(s_n := \sum_{k=m}^{n} f(k))_{n \geq m}$ Folge

$$\left.\begin{array}{l} f \geqslant 0 \Rightarrow (s_n)_{n \geq m} \text{ mon. steig.} \\ (*) \Rightarrow \forall n \geq m: \; s_n \leq I + f(m) \end{array}\right\}$$

$\xRightarrow[\text{2.13}]{}$ Ana1 2.13 $\sum_{k=m}^{\infty} f(k)$ Konverg und $\sum_{k=m}^{\infty} f(k) \leq \int_m^{\infty} f(x)\,dx + f(m)$

✓

Beisp Für $s > 0$ gilt:)

1) **Beh**: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ konverg. $\iff s > 1$

// $f(x) = \frac{1}{x^s}, x \geq 1$, ist mon. fall. und ≥ 0

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{k^s}}_{f(k)} \text{ konv. } \underset{3.4}{\iff} \int_1^{\infty} \underbrace{\frac{1}{x^s}}_{f(x)} dx \text{ konv. } \underset{3.2,4)}{\iff} s > 1$$ //

2) **Beh**: $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$ ist divergent

// **zeigen**: $\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$ ist div. $\left(\underset{3.4}{\Longrightarrow} \text{Beh} \right)$

$$\int_2^b \frac{1}{x \ln x} dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Aufg 4.4, b)}}}{=} \ln(\ln b) - \ln(\ln 2) \xrightarrow[b \to \infty]{} +\infty$$ //

3.5 **Folg**: Sei $\varepsilon > 0$ und

$f : [1, \infty[\to \mathbb{R}$ mon. fall., ≥ 0 mit $\int_1^{\infty} f$ konverg.

Weiter sei $m \in \mathbb{N}$ mit $f(m) < \varepsilon$ und

$$A := \sum_{k=1}^{m-1} f(k) + \int_m^{\infty} f(x) dx$$

Dann gilt:

$$A \leq \sum_{k=1}^{\infty} f(k) < A + \varepsilon$$

// Nach 3.4 gilt: $0 \leq \sum_{k=m}^{\infty} f(k) - \int_m^{\infty} f \leq f(m)$.

Nun addiere A. //

Beisp: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = ?$ bis auf $\varepsilon = 0.01$

$\frac{1}{m^2} < 0.01 \iff m > 10$. Wähle $\underline{m = 11}$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k^2} &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{10^2} \approx 1.550 \\ \int_{11}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx &= \lim_{b \to \infty} -\frac{1}{x} \Big|_{11}^{b} = +\frac{1}{11} \approx 0.091 \end{aligned} \right\} + = A \approx 1.641$$

$$\Rightarrow \quad 1.641 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 1.651$$

Genauer Wert: $\frac{\pi^2}{6} \approx 1.6449$

§ 4 Anwendung der Integralrechn.

(Längen, Volumen, Flächen)

4.1 Kurven im $\mathbb{R}^n$

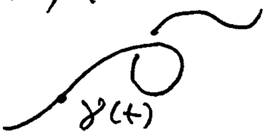
Def: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall der Länge > 0.

1) Eine *C^1-Kurve* ist eine Abb. $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$,

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$$

mit $\gamma_i : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig diff.bar für $i = 1, \dots, n$

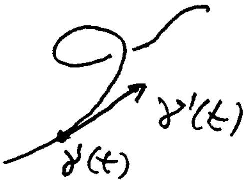
2) $\gamma(I) := \{\gamma(t) \mid t \in I\}$ heißt *Bahn* von γ



3) Für jedes $t \in I$ heißt

$$\gamma'(t) := (\gamma_1'(t), \dots, \gamma_n'(t))$$

Ableitung oder *Tangentenvektor* *von* γ *in* t

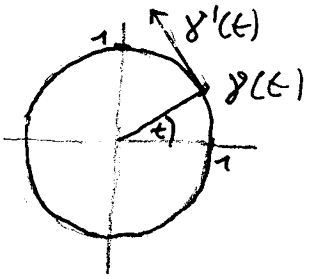


4.2 Beisp

1) $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$

$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$

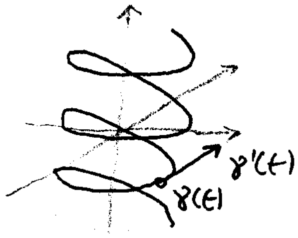


Bahn = Einheitskreis

2) $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$

$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$



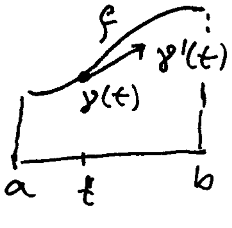
Bahn = Spirale

3) $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stet. diff.bar

$\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$\gamma(t) = (t, f(t))$

$\gamma'(t) = (1, f'(t))$



Bahn = Graph von f

Bem: Physikalische Interpret. von $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$

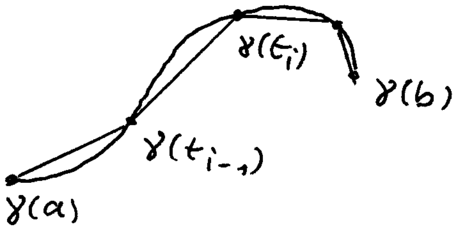
$\gamma(t)$ = Position eines Teilchens zum Zeitpkt t

$\gamma'(t)$ = Geschwind. des " " " t

Erinn: Für $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$: $\|\bar{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ Norm von $\bar{x}$

4.3 Sei $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ C^1-Kurve

$\{a = t_0 < t_1 < \dots < t_r = b\}$ Zerl. v. $[a,b]$



Länge des Polygonzugs

$$= \sum_{i=1}^{r} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \Big\| \underbrace{\frac{\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}}_{\approx \gamma'(t_i)} \Big\| \cdot \underbrace{(t_i - t_{i-1})}_{\Delta t_i}$$

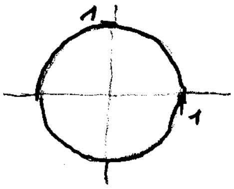
Def: $L(\gamma) := \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$ Länge von γ

4.4 Beisp

1) $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

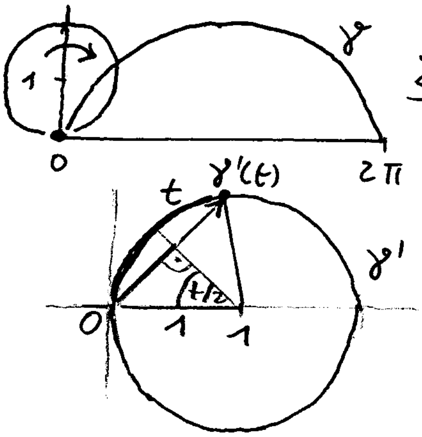
$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$

$\|\gamma'(t)\| = \|(-\sin t, \cos t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$



$\Rightarrow L(\gamma) = \int_0^{2\pi} 1 \, dt = \underline{\underline{2\pi}}$ Kreisumfang v. Einheitskreis

2) $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$



$\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$

$\gamma'(t) = (1 - \cos t, \sin t)$

$\|\gamma'(t)\| = 2 \cdot \sin(t/2)$

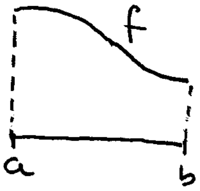
$\Rightarrow L(\gamma) = \int_0^{2\pi} 2 \sin(t/2) \, dt$

$= -4 \cos(t/2) \Big|_0^{2\pi} = 4 - (-4) = \underline{\underline{8}}$

3) $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig diff.bar

$\gamma(t) = (t, f(t))$

$\|\gamma'(t)\| = \|(1, f'(t))\| = \sqrt{1 + f'(t)^2}$



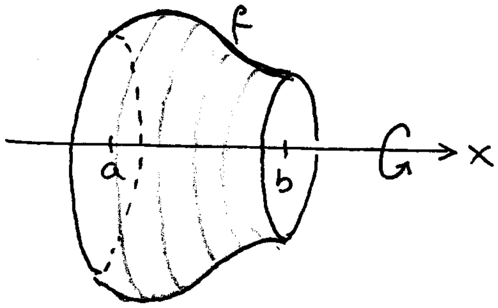
$\Rightarrow L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} \, dt$ Länge des Graphen von f

4.5 Rotationskörper und -flächen

Sei $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \geq 0$, stetig diff.bar

Zugeh. Rotationskörper bei Drehung um x-Achse

$$K := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} a \leq x \leq b \\ y^2+z^2 \leq f(x)^2 \end{array} \right\}$$



zugeh. Mantelfläche

$$M := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} a \leq x \leq b \\ y^2+z^2 = f(x)^2 \end{array} \right\}$$

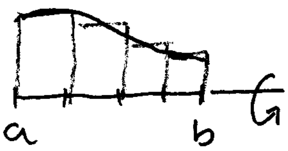
Dann gilt:

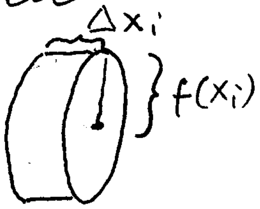
$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$ Volumen von K

$$F = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1+f'(x)^2}\, dx$$ Inhalt von M

zu V: Approx. durch Zylinderscheiben

$$V \approx \sum_{i=1}^{r} V_i$$

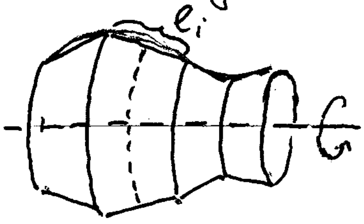


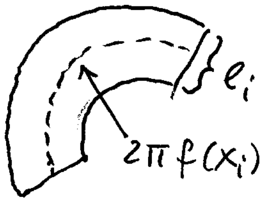


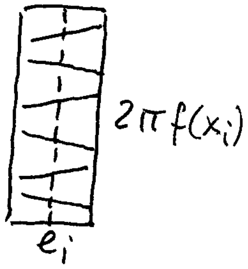
$$V_i = \underbrace{\pi f(x_i)^2}_{\text{Grundfl.}} \cdot \underbrace{\Delta x_i}_{\text{Höhe}}$$

zu F: Approx durch Kegelstumpfmäntel

$$F \approx \sum_{i=1}^{r} F_i$$



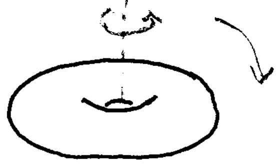




$$l_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \underbrace{\Delta y_i}_{f'(x_i)\Delta x_i}{}^2} = \sqrt{1+f'(x_i)^2}\, \Delta x_i$$

$$F_i = \underbrace{2\pi f(x_i)}_{\text{Länge}} \cdot \underbrace{l_i}_{\text{Breite}} = 2\pi f(x_i) \sqrt{1+f'(x_i)^2}\, \Delta x_i$$

4.6 Beisp Torus

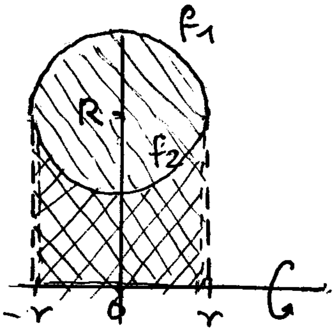


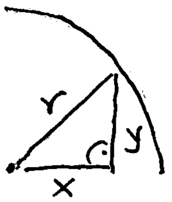
Volumen, Oberfläche?

$f_{1,2}: [-r,r] \longrightarrow \mathbb{R}$

$f_1(x) = R + \sqrt{r^2-x^2}$

$f_2(x) = R - \sqrt{r^2-x^2}$





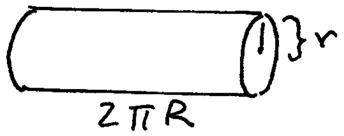
$$V = V_1 - V_2$$

$$= \pi \int_{-r}^{r} \underbrace{(f_1(x)^2 - f_2(x)^2)}_{(f_1+f_2)(f_1-f_2)}\,dx = \pi \int_{-r}^{r} 2R\, 2\sqrt{r^2-x^2}\,dx$$

$$= 4\pi R \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2}\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{symm}}}{=} 8\pi R \int_{0}^{r} \sqrt{r^2-x^2}\,dx$$

$$\underset{\substack{x=rt \\ dx=rdt}}{=} 8\pi R \int_{0}^{1} \underbrace{\sqrt{r^2-r^2t^2}}_{r\sqrt{1-t^2}}\, r\,dt = 8\pi R r^2 \underbrace{\int_{0}^{1} \sqrt{1-t^2}\,dt}_{\pi/4 \text{ nach } 2.10,7)}$$

$$= \underline{\underline{2\pi^2 R r^2}} = \underbrace{2\pi R}_{\text{Länge}} \cdot \underbrace{\pi r^2}_{\text{Querschitt}}$$



zu F: $f_{1,2}(x) = R \pm \sqrt{r^2-x^2}$, $f'_{1,2}(x) = \pm \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{r^2-x^2}}$

$$\Rightarrow \sqrt{1+f'_{1,2}(x)^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}} = \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

$$\Rightarrow F = F_1 + F_2$$

$$= 2\pi \int_{-r}^{r} \underbrace{(f_1(x)+f_2(x))}_{2R} \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx = 4\pi R \int_{-r}^{r} \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx$$

$$\underset{\substack{x=rt \\ dx=rdt}}{=} 4\pi R \int_{-1}^{1} \frac{r}{\cancel{r}\sqrt{1-t^2}}\, \cancel{r}\,dt = 4\pi R r \underbrace{\arcsin t \Big|_{-1}^{1}}_{\pi/2-(-\pi/2)=\pi}$$

$$= \underline{\underline{4\pi^2 R r}} = 2\pi R \cdot 2\pi r$$

Mehrdimensionale Analysis

Ana 1: $\mathbb{R} \supset D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

Ana 2: $\mathbb{R}^n \supset D \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$

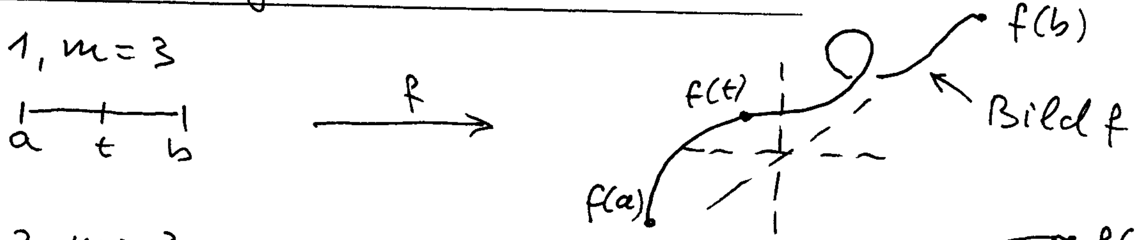
Beisp

1) $f: [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(t) = (\cos t, \sin t)$
2) $V: \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}$, $V(r,h) = \pi r^2 h$ Vol. von 

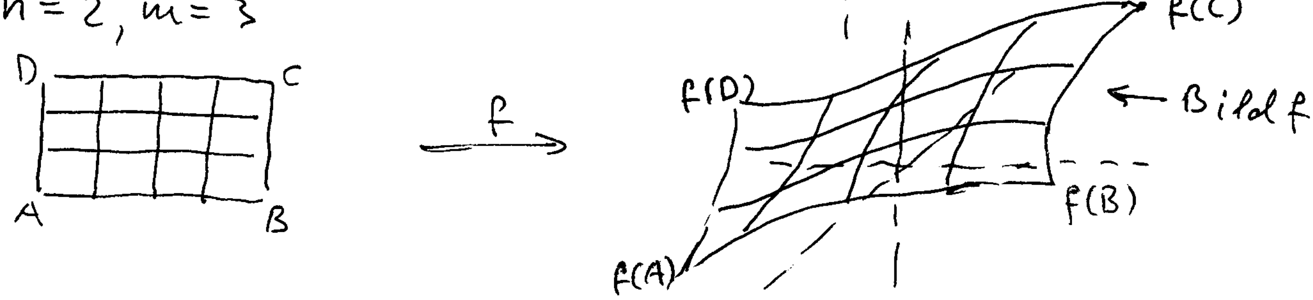
3) $T: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$, $T(x,y,z,t)$ = Temperatur am Ort (x,y,z) zum Zeitpkt. t
4) $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (xe^y, y^2 - 3xy)$

Darstellung von $\mathbb{R}^n \supset D \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$

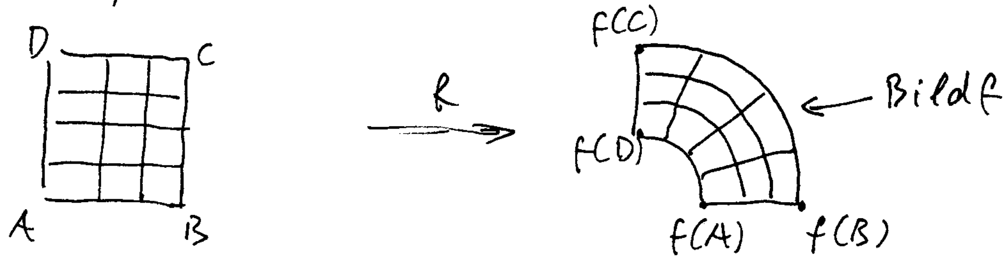
$n = 1$, $m = 3$



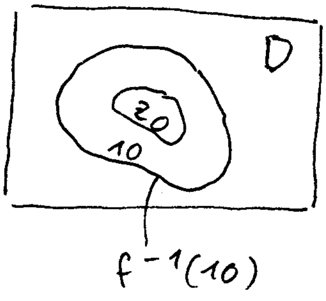
$n = 2$, $m = 3$



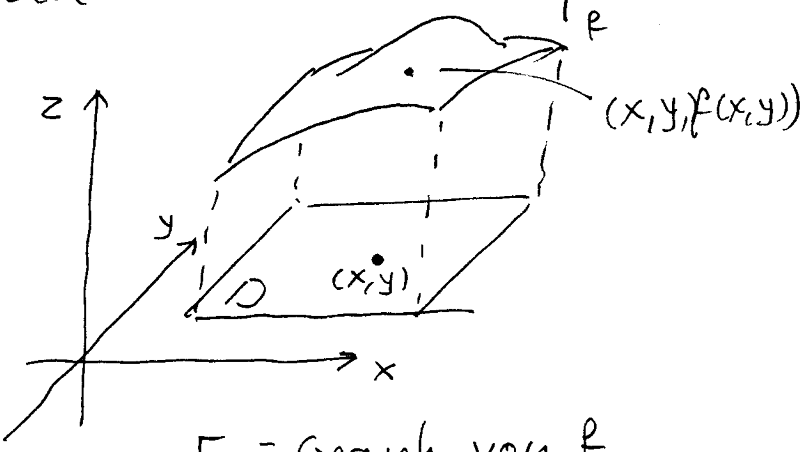
$n = 2$, $m = 2$



$n = 2$, $m = 1$: Skalarfeld



Höhenlinie



Γ_f = Graph von f

§5 Grenzwerte, Stetigkeit

Im Folgenden

$$\mathbb{R}^n := \{\bar{x} = (x_1,\dots,x_n) \mid x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}\}$$

$\mathbb{R}^n$ ist $\mathbb{R}$-Vektorraum via

$$\left.\begin{array}{l}\bar{x}+\bar{y} := (x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)\\ \lambda\bar{x} := (\lambda x_1,\dots,\lambda x_n)\end{array}\right\}\ \text{für alle } \bar{x},\bar{y}\in\mathbb{R}^n,\ \lambda\in\mathbb{R}$$

$\bar{e}_1,\dots,\bar{e}_n$ Standardbasis: $\bar{e}_i = (0,\dots,0,\underset{\substack{\uparrow\\ i\text{-te Stelle}}}{1},0,\dots,0)$

5.1 Für $\bar{x},\bar{y}\in\mathbb{R}^n$ heißt:

$$\langle\bar{x},\bar{y}\rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad \text{(Standard-) Skalarprodukt}$$

$$\|\bar{x}\| := \sqrt{\langle\bar{x},\bar{x}\rangle} = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)^{1/2} \qquad \text{Norm von } \bar{x}$$

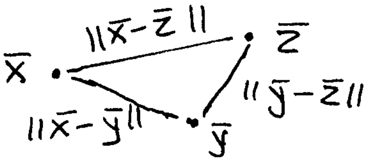
$$\|\bar{x}-\bar{y}\| = \Big(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\Big)^{1/2} \qquad \text{Abstand von } \bar{x} \text{ zu } \bar{y}$$

Eigenschaften: $\forall\, \bar{x},\bar{y},\bar{z}\in\mathbb{R}^n,\ \lambda\in\mathbb{R}$:

1) $\langle\bar{x},\bar{y}\rangle \le \|\bar{x}\|\cdot\|\bar{y}\|$ Cauchy-Schwarz-Ungleichung

2) i) $\|\bar{x}\| \ge 0$, und $\|\bar{x}\| = 0 \iff \bar{x} = 0$
   ii) $\|\lambda\bar{x}\| = |\lambda|\,\|\bar{x}\|$
   iii) $\|\bar{x}+\bar{y}\| \le \|\bar{x}\|+\|\bar{y}\|$ Dreiecks-Ungleichung

3) i) $\|\bar{x}-\bar{y}\| \ge 0$, und $\|\bar{x}-\bar{y}\| = 0 \iff \bar{x}=\bar{y}$
   ii) $\|\bar{x}-\bar{y}\| = \|\bar{y}-\bar{x}\|$
   iii) $\|\bar{x}-\bar{z}\| \le \|\bar{x}-\bar{y}\|+\|\bar{y}-\bar{z}\|$



// 1) siehe Lin.Alg 2, 31.2 oder Fritzsche, Analysis 2, 1.1.5

2) i), ii) ✓
   iii)
$$\|\bar{x}+\bar{y}\|^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2$$
$$= \underset{\|}{\sum_i x_i^2} + 2\underset{\overset{1)}{\wedge\!\!/\!/}}{\sum_i x_i y_i} + \underset{\|}{\sum_i y_i^2}$$
$$\le \|\bar{x}\|^2 + 2\|\bar{x}\|\,\|y\| + \|\bar{y}\|^2 = (\|\bar{x}\|+\|\bar{y}\|)^2$$

3) i), ii) folgen aus 2) i), ii) $(\lambda=-1)$
   iii) $\|\bar{x}-\bar{z}\| = \|\underline{\bar{x}-\bar{y}}+\underline{\bar{y}-\bar{z}}\| \underset{2)\,iii)}{\le} \|\bar{x}-\bar{y}\|+\|\bar{y}-\bar{z}\|$ //

Bem

1) Für $n=1$ ist $\bar{x}=(x_1)=x_1$ und $\|\bar{x}\|=\sqrt{x_1^2}=|x_1|$
d.h. $\|-\|$ ist Verallgemeinerung von Betragsfkt. auf $\mathbb{R}$
und 2) " " " Ana 1, 1.5

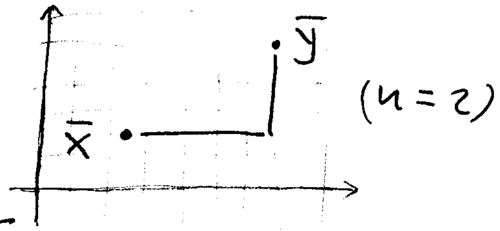
2) Ein Metrischer Raum ist ein Paar (M,d),
wobei M Menge und $d: M\times M \to \mathbb{R}$ Abb. mit
i) $d(x,y)\geq 0$, und $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$,
ii) $d(x,y)=d(y,x)$, iii) $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$

3) besagt: $(\mathbb{R}^n, \|?-?\|)$ ist metr. Raum

Anderes Beisp: $M=\mathbb{R}^n$

$$d(\bar{x},\bar{y})=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$$

Taxifahrer-Metrik



5.2 Def: Für $\bar{a}\in\mathbb{R}^n$ und $\varepsilon>0$ heißt

$$U_\varepsilon(\bar{a}):=\{\bar{x}\in\mathbb{R}^n \mid \|\bar{x}-\bar{a}\|<\varepsilon\}$$ ε-Umgebung von $\bar{a}$

Beisp

$n=1$:

$n=2$
$(n=3)$

randloser Kreis (Kugel)
mit Mittelpunkt $\bar{a}$
und Radius ε

Ziel: Übertrage grundlegende Begriffe
"Konverg. Folge, Grenzwerte, Stetigkeit"
von $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ auf $(\mathbb{R}^n, \|-\|)$

5.3 **Def**: Sei $(\bar{x}_k)_k$ Folge in $\mathbb{R}^n$ und $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$. (vgl. Ana1, 2.2)

$(\bar{x}_k)_k$ *konvergiert gegen* $\bar{a}$ $:\Longleftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists k_0 \in \mathbb{N} \ \forall k \geq k_0 : \|\bar{x}_k - \bar{a}\| \underset{\displaystyle \bar{x}_k \in \mathcal{U}_\varepsilon(\bar{a})}{\underset{\Updownarrow}{< \varepsilon}}$$

d.h. jede ε-Umgeb. von $\bar{a}$ enthält fast alle Folgenglieder

Notation: $\lim\limits_{k \to \infty} \bar{x}_k = \bar{a}$, $\bar{x}_k \xrightarrow[k \to \infty]{} \bar{a}$

Bem: 1) Grenzwert ist eindeutig (falls existiert)

2) $\bar{x}_k \xrightarrow[k \to \infty]{} \bar{a} \Longleftrightarrow (\|\bar{x}_k - \bar{a}\|)_k$ ist 0-Folge in $\mathbb{R}$

5.4 **Satz**: Sei $(\bar{x}_k)_k$ Folge in $\mathbb{R}^n$, $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ und $\bar{x}_k = (x_{k1}, \ldots, x_{kn}) \in \mathbb{R}^n$ für $k \in \mathbb{N}$

Dann gilt:

$$\bar{x}_k \xrightarrow[k \to \infty]{} \bar{a} \Longleftrightarrow x_{ki} \xrightarrow[k \to \infty]{} a_i \text{ für } i = 1, \ldots, n$$

d.h. $$\lim_{k \to \infty} \bar{x}_k = \left(\lim_{k \to \infty} x_{k1}, \ldots, \lim_{k \to \infty} x_{kn}\right)$$

Bew:

„$\Leftarrow$": Sei $x_{ki} \xrightarrow[k \to \infty]{} a_i$ für $i = 1, \ldots, n$

$$\underset{\substack{\text{Ana1, 2.6} \\ \text{und } \sqrt{\ } \text{ stetig}}}{\Longrightarrow} \quad \|\bar{x}_k - \bar{a}\| = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_{ki} - a_i)^2\right)^{1/2} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$$

$$\underset{\text{Bem 2, 5.3}}{\Longrightarrow} \quad \bar{x}_k \xrightarrow[k \to \infty]{} \bar{a}$$

„$\Rightarrow$": $\forall i = 1, \ldots, n: \ 0 \leq |x_{ki} - a_i| \leq \|\bar{x}_k - \bar{a}\|$

Sandwich-Lemma Ana1, 2.7 liefert Beh. ✓

5.5 **Def 1**: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ (vgl. Ana 1, 5.1, 5.2)

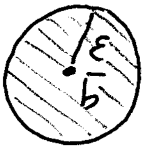
$\bar{D} := \{\bar{a} \in \mathbb{R}^n \mid \forall \delta > 0 : D \cap U_\delta(\bar{a}) \neq \emptyset\}$

§6 $= \{\bar{a} \in \mathbb{R}^n \mid$ es gibt Folge $(\bar{x}_k)_k$ in D mit $\bar{x}_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \bar{a}\}$

heißt **Abschluss von D in** $\mathbb{R}^n$

Bem: $D \subset \bar{D}$

Beisp: 1) $\overline{U_\varepsilon(\bar{b})} = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\bar{x} - \bar{b}\| \leq \varepsilon\}$



"mit Rand"

2) $\overline{\mathbb{R}^n \setminus \{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_r\}} = \mathbb{R}^n$

Def 2: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^m$ Abb, $\bar{a} \in \bar{D}$ und $\bar{b} \in \mathbb{R}^m$.

f **hat bei** $\bar{a}$ **den Grenzwert** $\bar{b}$:$\Longleftrightarrow$

Für **jede** Folge $(\bar{x}_k)_k$ in D mit $\bar{x}_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \bar{a}$ gilt:

$$f(\bar{x}_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} \bar{b}$$

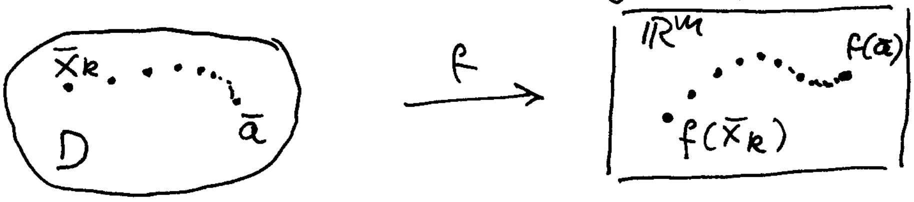
Notation: $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x}) = \bar{b}$

⊗ Beisp: siehe S. 40 unten

5.6 **Def**: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ und $f : D \to \mathbb{R}^m$ Abb.

f **stetig in** $\bar{a} \in D$:$\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x}) = f(\bar{a})$

f **stetig** :$\Longleftrightarrow$ f stetig in jedem $\bar{a} \in D$



(vgl. Ana 1 5.7)

Beisp und Bem

1) $id : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist stetig

2) Konstante Abb. sind stetig

3) $D \subset \mathbb{R}^n$, $E \subset \mathbb{R}^m$, $f : D \to E$, $g : E \to \mathbb{R}^\ell$ stetig

$\Longrightarrow g\circ f : D \to \mathbb{R}^\ell$ stetig

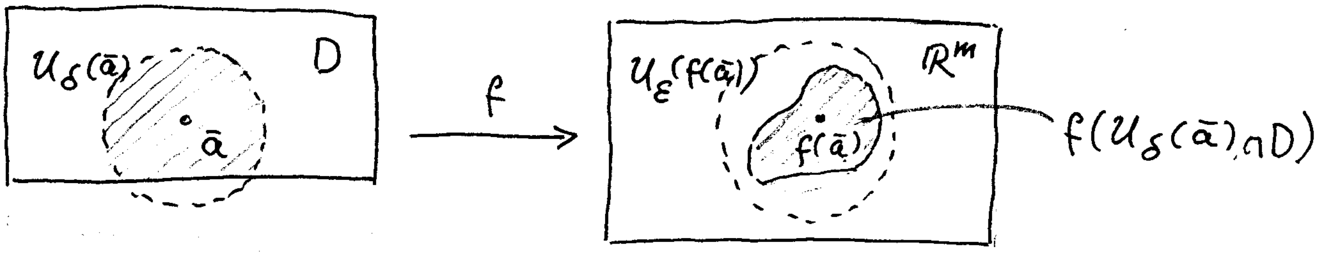
// sei $\bar{a} \in D$, $\bar{x}_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \bar{a} \underset{f\text{ stet.}}{\Longrightarrow} f(x_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(\bar{a}) \underset{g\text{ stet.}}{\Longrightarrow} g(f(\bar{x}_k)) \xrightarrow[k\to\infty]{} g(f(\bar{a}))$ //

4) $f : D \to \mathbb{R}^m$ stetig, $D' \subset D \Rightarrow f|_{D'}$ stetig

5.7 **Satz** (ε-δ-Kriterium): Sei $D \subset \mathbb{R}^n$.

$f: D \to \mathbb{R}^m$ ist stetig in $\bar{a} \in D$ $\iff$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \underbrace{\forall \bar{x} \in D \cap \mathcal{U}_\delta(\bar{a}) : f(\bar{x}) \in \mathcal{U}_\varepsilon(f(\bar{a}))}_{f(D \cap \mathcal{U}_\delta(\bar{a})) \subset \mathcal{U}_\varepsilon(f(\bar{a}))}$$



Bew: „⇐": Sei $(\bar{x}_k)_k$ Folge in D mit $\bar{x}_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \bar{a}$.

zu zeigen: $f(\bar{x}_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(\bar{a})$

Sei $\varepsilon > 0$, und $\delta > 0$ mit $f(\mathcal{U}_\delta(\bar{a}) \cap D) \subset \mathcal{U}_\varepsilon(f(\bar{a}))$ (*)

$$\bar{x}_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \bar{a} \implies \exists k_0 \in \mathbb{N}\ \forall k \geq k_0 : \bar{x}_k \in \mathcal{U}_\delta(\bar{a}) \cap D$$

$$\underset{(*)}{\implies} \forall k \geq k_0 : f(\bar{x}_k) \in \mathcal{U}_\varepsilon(f(\bar{a}))$$

$$\implies f(\bar{x}_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(\bar{a})$$

„⇒": Zeigen Kontrapos (von $p \Rightarrow q$): $\neg q \Rightarrow \neg p$

$$\neg q : \exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists \bar{x} \in \mathcal{U}_\delta(\bar{a}) \cap D : f(\bar{x}) \notin \mathcal{U}_\varepsilon(f(\bar{a}))$$

$$\underset{\delta = 1/k}{\implies} \forall k \in \mathbb{N}\ \exists \bar{x}_k \in \mathcal{U}_{1/k}(\bar{a}) \cap D : f(\bar{x}_k) \notin \mathcal{U}_\varepsilon(f(\bar{a}))$$

$\implies (\bar{x}_k)_k$ ist Folge in D mit $\bar{x}_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \bar{a}$ und $f(\bar{x}_k) \not\xrightarrow[k\to\infty]{} f(\bar{a})$

$\implies$ f nicht stetig in $\bar{a}$

✓

⊗ **Beisp. zu 5.5**

$f: \mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\} \to \mathbb{R}^2$, $f(\bar{x}) = \frac{1}{\|\bar{x}\|}\bar{x}$, $\bar{0} \in \overline{\mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\}}$

Beh: $\lim\limits_{\bar{x} \to \bar{0}} f(\bar{x})$ existiert nicht

// $\bar{x}_k := (\frac{1}{k}, 0) \xrightarrow[k\to\infty]{} \bar{0}$ mit $f(\frac{1}{k}, 0) = \frac{1}{1/k}(\frac{1}{k}, 0) = (1,0) \xrightarrow[k\to\infty]{} (1,0)$

#

$\bar{x}_k' := (0, 1/k) \xrightarrow[k\to\infty]{} \bar{0}$ mit $f(0, 1/k) = \frac{1}{1/k}(0, \frac{1}{k}) = (0,1) \xrightarrow[k\to\infty]{} (0,1)$ //

Frage: Wie sieht man die Stetigkeit von

$$f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y,z) = \left(\frac{xe^y+z}{2-\sin(xz)}, \sqrt{x^2+z^2}\right) \ ?$$

5.8 Satz: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{a} \in \bar{D}$, $f: D \to \mathbb{R}^m$ und $f_1,\dots,f_m : D \to \mathbb{R}$ die Komponentenfunktionen von f, d.h. $f(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}),\dots,f_m(\bar{x}))$ für alle $\bar{x} \in D$.

Dann gilt:

1) $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x}) = (\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{a}} f_1(\bar{x}), \dots, \lim\limits_{\bar{x}\to\bar{a}} f_m(\bar{x})$

2) Falls $\bar{a} \in D$:

f stetig in $\bar{a} \iff \forall i=1,\dots,m:\ f_i$ stetig in $\bar{a}$

Bew: 1) $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x}) = \bar{b}$

$\iff \forall (\bar{x}_k)_k$ Folge in D mit $\bar{x}_k \longrightarrow \bar{a}$ gilt:

$$f(\bar{x}_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} \bar{b} = (b_1,\dots,b_m)$$

Folge in $\mathbb{R}^m$

$$\Big\Updownarrow \ 5.4$$

$$\forall i=1,\dots,m:\ f_i(\bar{x}_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} b_i$$

$\underset{\substack{\text{Vertausch}\\ \forall(\bar{x}_k)\ \forall i}}{\iff} \quad \forall i=1,\dots,m:\ \lim\limits_{\bar{x}\to\bar{a}} f_i(\bar{x}) = b_i$

2) f stetig in $\bar{a} \in D \underset{\text{def}}{\iff} \lim\limits_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x}) = f(\bar{a})$

$\underset{1)}{\iff} \forall i=1,\dots,m:\ \lim\limits_{\bar{x}\to\bar{a}} f_i(\bar{x}) = f_i(\bar{a})$

d.h. f_i stetig in $\bar{a}$ ✓

Folg: Die Projektionen $\mathrm{pr}_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $\bar{x} \longmapsto x_i$ sind stetig für $i=1,\dots,n$

// pr_i = i-te Kompon. von $\mathrm{id}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\bar{x} \longmapsto (x_1,\dots,x_n)$

und id ist stetig. //

5.9 **Satz**: Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig.

$\Rightarrow f+g,\ f-g,\ f\cdot g,\ f/g : D \to \mathbb{R}$ sind stetig

↳ falls $g(\bar{x}) \neq 0$ für alle $\bar{x} \in D$

Bew: Sei $\bar{a} \in D$ und $(\bar{x}_k)_k$ Folge in D mit $\bar{x}_k \to \bar{a}$

$\xRightarrow[f,g \text{ stet.}]{} \quad f(\bar{x}_k) \to f(\bar{a})$ und $g(\bar{x}_k) \to g(\bar{a})$

$\xRightarrow[\text{Ana 1, 2.6 (Grenzwertsätze)}]{} \quad f(\bar{x}_k) * g(\bar{x}_k) \longrightarrow f(\bar{a}) * g(\bar{a})$

wobei $* = +, -, \cdot$ oder $/$ ✓

Fazit: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$ Fkt. mit

$f(\bar{x})$ = Formel gebildet aus
Kompon. $x_1, \dots, x_n$ von $\bar{x}$,
Grundrechenarten $+, -, \cdot, /$,
(Kompos. von) einstell. stet. Fkt. (z.B. exp, sin, $\sqrt{\ }$, ...)

$\Rightarrow$ f ist stetig.

Beisp: $f(x,y,z) = \dfrac{x e^y + z}{2 - \sin(yz)}$

⌜ $f = (pr_1 \cdot (\exp \circ pr_2) + pr_3) / (2 - \sin \circ (pr_2 \cdot pr_3))$ ⌟

⚠ Formel muss für alle $\bar{x} \in D$ gleich sein.
Bei Stückelung muss man f an den "Nahtstellen" extra untersuchen!

5.10 Beisp

1) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{"} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

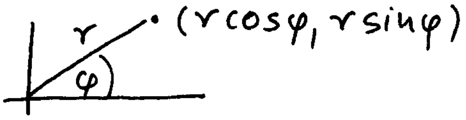
Beh: f ist nicht stetig in $\bar{o}$

$(1/k, 1/k) \xrightarrow[k\to\infty]{} (0,0) = \bar{o}$

$$f(1/k, 1/k) = \frac{1/k \cdot 1/k}{1/k^2 + 1/k^2} = \frac{1/k^2}{2 \cdot 1/k^2} = \frac{1}{2} \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{1}{2} \neq 0 = f(\bar{o})$$

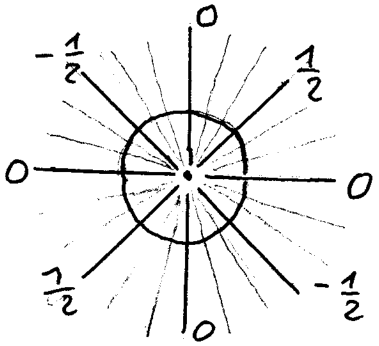
d.h. $f(1/k, 1/k) \not\to f(\bar{o})$

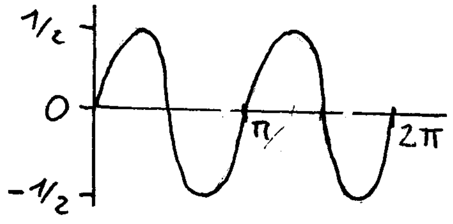
f in Polarkoordinaten



$$f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \frac{\cancel{r}\cos\varphi \cdot \cancel{r}\sin\varphi}{\cancel{r^2}\cos^2\varphi + \cancel{r^2}\sin^2\varphi}$$
$$= \cos\varphi \cdot \sin\varphi = \frac{1}{2}\sin(2\varphi)$$

d.h. f ist konstant auf "Strahlen" um $\bar{o}$



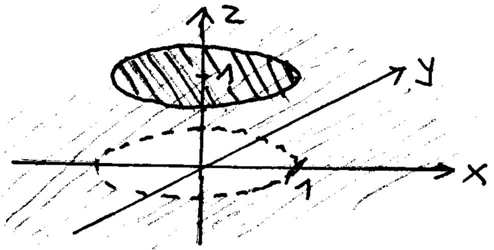


$\forall \delta > 0 : f(U_\delta(\bar{o})) = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

2) $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$g(\bar{x}) = \begin{cases} 1 & \text{für } \|\bar{x}\| \leq 1 \\ 0 & \text{"} \quad \|\bar{x}\| > 1 \end{cases}$

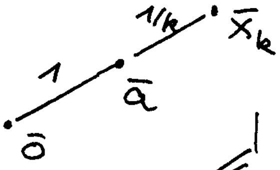
Graph $\Gamma_g = \{(\bar{x}, g(\bar{x})) \mid \bar{x} \in \mathbb{R}^2\}$



Beh: $\forall \bar{a} \in \mathbb{R}^2$ mit $\|\bar{a}\| = 1$: g nicht stetig in $\bar{a}$

Sei $\bar{a} \in \mathbb{R}^2$ mit $\|\bar{a}\| = 1$

Dann konvergiert $(\bar{x}_k := (1+\frac{1}{k})\bar{a})_k$ gegen $\bar{a}$, aber $(g(\bar{x}_k) = 0)_k$ nicht gegen $g(\bar{a}) = 1$.



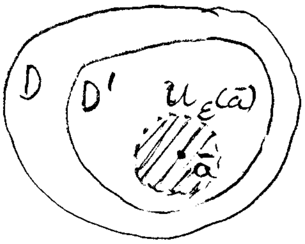
Bleibt z.z. 1) f stetig in jedem $\bar{a} \neq \bar{o}$

2) g " " " $\bar{a}$ mit $\|\bar{a}\| \neq 1$

5.11 Satz: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$, $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ Funktion und

$$D' \subset D \text{ mit } \begin{cases} D' \subset \mathbb{R}^n \text{ \underline{offen} (siehe §6)} \\ f|_{D'}: D' \longrightarrow \mathbb{R} \text{ stetig} \end{cases}$$

Dann ist f stetig in allen $\bar{a} \in D'$.



Bew: Sei $\bar{a} \in D'$.

$D' \subset \mathbb{R}^n$ offen $\underset{\text{Def 6.1}}{\Longrightarrow}$ $\exists\, \varepsilon > 0: U_\varepsilon(\bar{a}) \subset D'$

zu zeigen: f stetig in $\bar{a}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Sei } (\bar{x}_k)_k \text{ Folge in } D \text{ mit } \bar{x}_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \bar{a} \\ \Longrightarrow \exists\, k_0 \in \mathbb{N}\ \forall k \geq k_0: \bar{x}_k \in U_\varepsilon(\bar{a}), \text{ also } \bar{x}_k \in D' \end{array}\right\}$$

$\underset{f|_{D'} \text{ stetig}}{\Longrightarrow}$ $(f(\bar{x}_k))_{k \geq k_0}$ konvergiert gegen $f(\bar{a})$

$\Longrightarrow$ $(f(\bar{x}_k))_k$ konvergiert gegen $f(\bar{a})$ ✓

Beisp (Fortsetz. v. 5.10)

1) $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{"} \quad (x,y) = (0,0) = \bar{0} \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} D' := \mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\} \text{ offen (siehe §6)} \\ f|_{D'}: f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ stetig (5.9)} \end{array}\right\} \underset{\text{Satz}}{\Longrightarrow} f \text{ stetig in allen } \bar{a} \neq \bar{0}$$

2) $g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{für } \|(x,y)\| \leq 1 \\ 0 & \text{"} \quad \|(x,y)\| > 1 \end{cases}$

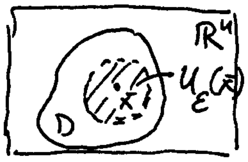
$$\left.\begin{array}{l} D_1' := \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\bar{x}\| < 1\} \text{ offen (§6)} \\ g|_{D_1'} = 1 \text{ konst., also stetig} \end{array}\right\} \underset{\text{Satz}}{\Longrightarrow} \begin{array}{l} g \text{ stetig in allen} \\ \bar{a} \text{ mit } \|\bar{a}\| < 1 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} D_2' := \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\bar{x}\| > 1\} \text{ offen (§6)} \\ g|_{D_2'} = 0 \text{ konst., also stetig} \end{array}\right\} \underset{\text{Satz}}{\Longrightarrow} \begin{array}{l} g \text{ stetig in allen} \\ \bar{a} \text{ mit } \|\bar{a}\| > 1 \end{array}$$

Also: g stetig in allen $\bar{a} \in \mathbb{R}^2$ mit $\|\bar{a}\| \neq 1$.

§ 6 Offene und abgeschlossene Mengen

6.1 **Def**: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$.



D **offen** :⟺ $\forall \bar{x} \in D \; \underbrace{\exists \varepsilon > 0 : \mathcal{U}_\varepsilon(\bar{x}) \subset D}_{\text{"}\bar{x}\text{ ist innerer Punkt von } D\text{"}}$

D **abgeschlossen** :⟺ $\mathbb{R}^n \setminus D$ offen

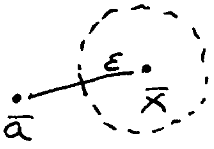
Beisp

1) $\forall \bar{a} \in \mathbb{R}^n : \{\bar{a}\}$ ist abgeschl.

// **zeigen**: $\mathbb{R}^n \setminus \{\bar{a}\}$ ist offen

Sei $\bar{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{a}\}$ und $\varepsilon := \frac{1}{2} \| \bar{x} - \bar{a} \|$

$\Rightarrow \bar{a} \notin \mathcal{U}_\varepsilon(\bar{x})$, d.h. $\mathcal{U}_\varepsilon(\bar{x}) \subset \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{a}\}$ //



2) $\emptyset$ und $\mathbb{R}^n$ sind offen und abgeschl.

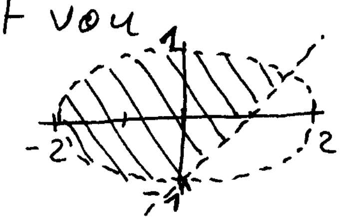
Aufg 7.1: Endl. $\cap$ und belieb $\cup$ v. offenen Mengen sind offen.
De Morgan: " $\cup$ " " $\cap$ " abg. " " abg.

3) **in $\mathbb{R}$**: $\mathbb{R}_{<a}$, $\mathbb{R}_{>a}$, $]a,b[$ sind offen
(siehe 0.1)
oder **Aufg 1.1** $\mathbb{R}_{\leq a}$, $\mathbb{R}_{\geq a}$, $[a,b]$ sind abgeschl.

// z.B. $x \in]a,b[$, $\varepsilon := \min\{|x-a|, |b-x|\} \Rightarrow \mathcal{U}_\varepsilon(x) \subset]a,b[$ //

Frage: Wie sieht man die Offenheit von

$$\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{matrix} x^2 + 4y^2 < 4 \\ y > x - 1 \end{matrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2 \text{ ?}$$



6.2 **Satz**: Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig, $E \subset \mathbb{R}^m$ und
$f^{-1}(E) := \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\bar{x}) \in E\}$ das **Urbild** von E bzgl. f.
Dann gilt:

1) E offen $\Rightarrow f^{-1}(E)$ offen

2) E abgeschl. $\Rightarrow f^{-1}(E)$ abgeschl.

Bem: Allgemein gilt:

$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ stetig $\Leftrightarrow \forall E \subset \mathbb{R}^m$ offen (abg.) : $f^{-1}(E)$ offen (abg.)

Bew: 1) Sei $\bar{x} \in f^{-1}(E)$. <u>Gesucht</u>: $\delta > 0$ mit $\mathcal{U}_\delta(\bar{x}) \subset f^{-1}(E)$

$\bar{x} \in f^{-1}(E) \Rightarrow f(\bar{x}) \in E$

E offen $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : \mathcal{U}_\varepsilon(f(\bar{x})) \subset E$

f stetig $\underset{5.7}{\Rightarrow} \exists \delta > 0 : f(\mathcal{U}_\delta(\bar{x})) \subset \mathcal{U}_\varepsilon(f(\bar{x})) \subset E$

d.h. $\mathcal{U}_\delta(\bar{x}) \subset f^{-1}(E)$

2) E abg. $\Rightarrow \mathbb{R}^m \setminus E$ offen

$$\left.\begin{array}{l} \underset{1)}{\Rightarrow} \underbrace{f^{-1}(\mathbb{R}^m \setminus E)} \text{ offen} \\ \text{Nachrechn.: } = \mathbb{R}^n \setminus f^{-1}(E) \end{array}\right\} \Rightarrow f^{-1}(E) \text{ abg.} \quad ✓$$

<u>MERKE</u>: Stetige Urbilder offener Mengen sind offen.
(abgeschl) (abg.)

6.3 <u>Beisp.</u>

1) $D := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} x^2 + 4y^2 < 4 \\ y > x - 1 \end{array} \right\} = D_1 \cap D_2$, wobei

$D_1 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{x^2 + 4y^2}_{=: f(x,y)} < 4 \} = f^{-1}(\underbrace{\mathbb{R}_{<4}}_{\text{offen}})$

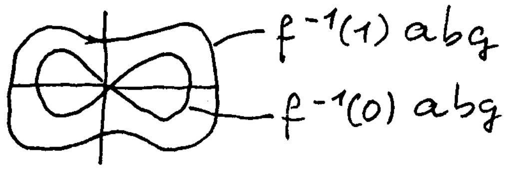
$D_2 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{y - x}_{=: g(x,y)} > -1 \} = g^{-1}(\underbrace{\mathbb{R}_{>-1}}_{\text{offen}})$

f, g stetig $\underset{6.2}{\Rightarrow} D_1, D_2$ offen $\underset{6.1,2)}{\Rightarrow} D = D_1 \cap D_2$ offen

2) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig und $a \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow f^{-1}(a) := \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\bar{x}) = a \}$ ist abgeschl.
<u>Niveaumenge</u> von f zum Wert a

z.B $f(x,y) = x^4 - x^2 + y^2$



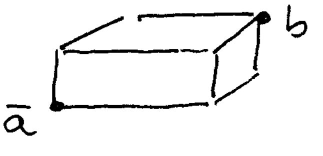
3) $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g(\bar{x}) = \| \bar{x} - \bar{a} \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2}$ stetig

$\Rightarrow \mathcal{U}_\varepsilon(\bar{a}) = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid g(\bar{x}) < \varepsilon \} = g^{-1}(\mathbb{R}_{<\varepsilon})$ ist offen

$S_r(\bar{a}) := \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid g(\bar{x}) = r \} = g^{-1}(r)$ ist abgeschl.
<u>Sphäre</u> mit Radius $r > 0$ um $\bar{a}$

4) $Q_{[\bar{a},\bar{b}]} := \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid \forall i = 1, \ldots, n : a_i \leq x_i \leq b_i \}$ <u>abgeschl.</u> Quader

$$Q_{[\bar{a},\bar{b}]} = \bigcap_{i=1}^{n} \underbrace{pr_i^{-1}}_{\text{stet.}}(\underbrace{[a_i, b_i]}_{\text{abg.}})$$



6.4 **Def**: sei $D \subset \mathbb{R}^n$.

$D \supset D^\circ := \{\bar{x} \in D \mid \exists \varepsilon > 0 : \mathcal{U}_\varepsilon(\bar{x}) \subset D\}$ das Innere von D

$D \subset \bar{D} := \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid \forall \varepsilon > 0 : \mathcal{U}_\varepsilon(\bar{x}) \cap D \neq \emptyset\}$ Abschluss v. D

$\overset{!}{=} \{\lim\limits_{k\to\infty} \bar{x}_k \mid (\bar{x}_k)_k$ konverg. Folge in $D\}$

$\partial D := \bar{D} \setminus D^\circ$ Rand von D

$= \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid \forall \varepsilon > 0 : \mathcal{U}_\varepsilon(\bar{x}) \cap D \neq \emptyset \neq \mathcal{U}_\varepsilon(\bar{x}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus D)\}$

$= \partial(\mathbb{R}^n \setminus D)$

zu !: „$\subset$": $\bar{x} \in \bar{D} \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}\ \exists\, \bar{x}_k \in \mathcal{U}_{\frac{1}{k}}(\bar{x}) \cap D \neq \emptyset$

$\Rightarrow (\bar{x}_k)_k$ Folge in D mit $\bar{x}_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \bar{x}$

„$\supset$": sei $\bar{x} = \lim\limits_{k\to\infty} \bar{x}_k$, wobei $(\bar{x}_k)_k$ konverg Folge in D

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : \mathcal{U}_\varepsilon(\bar{x})$ enthält fast alle $\bar{x}_k$,

insbes. $\mathcal{U}_\varepsilon(\bar{x}) \cap D \neq \emptyset$ //

Beisp

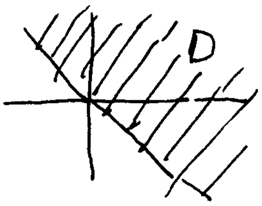
1)

$\mathbb{R}^n$	D	D°	$\bar{D}$	∂D
$\mathbb{R}$	$[a,b[$	$]a,b[$	$[a,b]$	$\{a,b\}$
$\mathbb{R}$	$\mathbb{Q}$	$\emptyset$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}^2$				

2) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y \geq 0\} = \bar{D}$

$D^\circ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y > 0\}$

$\partial D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y = 0\}$



Bem: $D^\circ = \bigcup\limits_{\substack{\mathcal{U} \subset D \\ \mathcal{U} \text{ offen}}} \mathcal{U}$ größte offene Menge, die in D liegt

$\bar{D} = \bigcap\limits_{\substack{D \subset A \\ A \text{ abg.}}} A$ kleinste abg. Menge, die D umfasst.

6.5 Satz: Für $D \subset \mathbb{R}^n$ gilt:

1) $\mathbb{R}^n \setminus \bar{D} = (\mathbb{R}^n \setminus D)^\circ$ das Äußere von D

2) $\mathbb{R}^n = \underbrace{D^\circ \cup \partial D}_{\bar{D}} \cup (\mathbb{R}^n \setminus D)^\circ$ disjunkte Zerleg.

3) D offen $\iff$ $D = D^\circ$

4) D abg. $\iff$ $D = \bar{D}$

$\iff$ D enthält mit jeder (in $\mathbb{R}^n$) konverg. Folge auch ihren Grenzwert.

Bew.: 1) $\bar{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{D} \iff \exists\, \varepsilon > 0 : \mathcal{U}_\varepsilon(\bar{x}) \cap D = \emptyset \iff \bar{x} \in (\mathbb{R}^n \setminus D)^\circ$

$$\Updownarrow$$

$$\mathcal{U}_\varepsilon(\bar{x}) \subset \mathbb{R}^n \setminus D$$

2) folgt aus 1).

3) Nach Def. gilt: D offen $\iff$ $D \subset D^\circ$

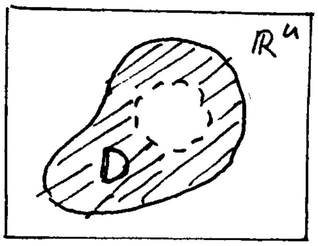
4) D abg. $\iff$ $\mathbb{R}^n \setminus D$ offen

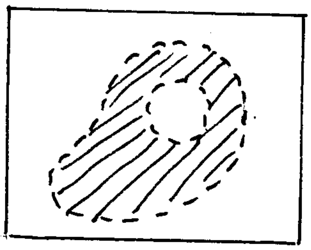
$\underset{3)}{\iff}$ $\mathbb{R}^n \setminus D = (\mathbb{R}^n \setminus D)^\circ \underset{1)}{=} \mathbb{R}^n \setminus \bar{D}$

$\iff$ $D = \bar{D}$

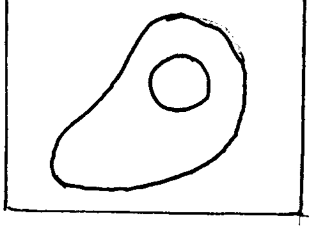
$\iff$ $D \supset \bar{D} \underset{6.4!}{=} \{\lim_{k\to\infty} \bar{x}_k \mid (\bar{x}_k)_k \text{ konv. Folge in } D\}$

✓

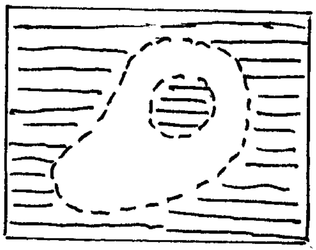




Inneres v. D



Rand v. D



Äußeres v. D

6.6 **Def**: Sei $K \subset \mathbb{R}^n$

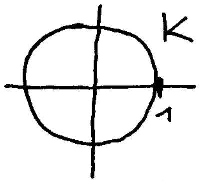
K **beschränkt** $:\Longleftrightarrow \exists M > 0 \; \forall \bar{x} \in K : \|\bar{x}\| \leq M$

K **kompakt** $:\Longleftrightarrow$ K ist abg. und beschränkt

Beisp

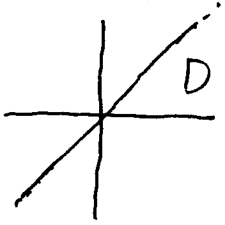
$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$

ist abg. und beschr., also kompakt



$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\}$

ist abg., aber nicht beschr., also nicht kompakt.



6.7 **Satz** (Heine-Borel): $K \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt $\Longleftrightarrow$

Jede Folge $(\bar{x}_k)_k$ in K hat eine in K konverg. Teilfolge, d.h. $\exists k_1 < k_2 < k_3 < \cdots \in \mathbb{N}$ mit $\bar{x}_{k_i} \xrightarrow[i \to \infty]{} \bar{x} \in K$.

[Siehe Fritzsche, GK Ana 1, 2.3.26]

6.8 **Satz**: Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $f: K \to \mathbb{R}^m$ stetig

$\Longrightarrow f(K) \subset \mathbb{R}^m$ kompakt.

Bew: Sei $(\bar{y}_k)_k$ Folge in $f(K)$ und

$(\bar{x}_k)_k$ Folge in K mit $\bar{y}_k = f(\bar{x}_k)$ für alle k

K komp. $\Longrightarrow$ ex. Teilfolg. $(\bar{x}_{k_i})_i$ mit $\bar{x}_{k_i} \xrightarrow[i \to \infty]{} \bar{x} \in K$

f stetig $\Longrightarrow \bar{y}_{k_i} = f(x_{k_i}) \xrightarrow[i \to \infty]{} f(\bar{x}) \in f(K)$ ✓

Beisp: $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetige Kurve

$\Longrightarrow$ Bahn $\gamma([a,b])$ kompakt

6.9 **Folg**: Sei $\emptyset \neq K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $f: K \to \mathbb{R}$ stetig.

$\Longrightarrow \exists \bar{p}, \bar{q} \in K \; \forall \bar{x} \in K : f(\bar{p}) \leq f(\bar{x}) \leq f(\bar{q})$

d.h. f hat in $\bar{p}$ ein Min und in $\bar{q}$ ein Max.

Bew (für Max): $f(K) \subset \mathbb{R}$ kompakt

$f(K)$ beschr. $\Longrightarrow s := \sup f(K) < +\infty$

Wähle Folge $(s_k)_k$ in $f(K)$ mit $s_k \xrightarrow[k \to \infty]{} s$

$f(K) \subset \mathbb{R}$ abg. $\Longrightarrow s \in f(K)$, d.h. $\exists \bar{q} \in K : s = f(\bar{q})$ ✓

§7 Partielle und Totale Differenzierbarkeit

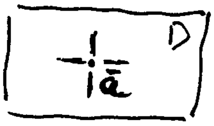
$\mathbb{R}^n \supset D \xrightarrow{f=(f_1,\dots,f_m)} \mathbb{R}^m$

$\bar a \in D$

Differenzierbarkeit / Ableitung von f bei $\bar a$?

n=1 : f Kurve diffbar $\underset{4.1}{\Longleftrightarrow}$ $f_1,\dots,f_m$ diff.bar

n>1 : Zunächst $\boxed{m=1}$

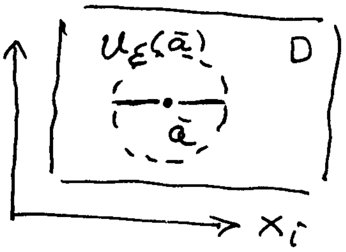


$\xrightarrow{f} \mathbb{R}$ Skalarfeld

1. Idee: Betrachte partielle Funktionen

$$f(\underbrace{a_1,\dots,a_{i-1}}_{\text{fest}}, \underset{\text{var.}}{\underset{\uparrow}{x_i}}, \underbrace{a_{i+1},\dots,a_n}_{\text{fest}})$$

7.1 Partielle Ableitungen



Sei $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen

$\bar a \in D$, $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(\bar a) \subset D$

$i \in \{1,\dots,n\}$, $\bar e_i = (0,\dots,\underset{\substack{\uparrow \\ \text{i-te Stelle}}}{1},\dots 0) \in \mathbb{R}^n$

Betrachte

$$g:]-\varepsilon,\varepsilon[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto f(\bar a + t\bar e_i) = f(a_1,\dots,a_{i-1},a_i+t,a_{i+1},\dots,a_n)$$

Def: f **bei $\bar a$** **partiell nach** x_i **diffbar** :$\Longleftrightarrow$

$g(t) = f(\bar a + t e_i)$ diffbar bei $t=0$

d.h. folg. Grenzwert existiert

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar a) := \lim_{h\to 0} \frac{f(\bar a + h\bar e_i) - f(\bar a)}{h} = g'(0) \in \mathbb{R}$$

Ist f bei allen $\bar a \in D$ part. nach x_i diff.bar, so heißt

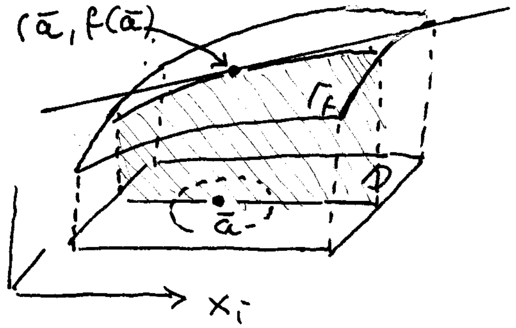
$\frac{\partial f}{\partial x_i}: D \to \mathbb{R}$, $\bar a \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar a)$ i-te **part. Ableit. von f**

f **partiell diff.bar** :$\Longleftrightarrow$ alle part. Ableit. von f existieren

Interpretation

$\Gamma_f := \{(\bar x, f(\bar x)) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \bar x \in D\}$ Graph v. f

$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar a)$ = Anstieg von f bei $\bar a$ in Richtung $\bar e_i$



(Seite 50 leer)

7.2 Berechnung

1) $f(x,y,z) = x^2 + \sin(xy) - y^3 z$, $D = \mathbb{R}^3$

$\frac{\partial f}{\partial y}(\pi,2,3) = ?$

$f(\pi,y,3) = \pi^2 + \sin(\pi y) - 3y^3$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(\pi,y,3) = 0 + \pi\cos(\pi y) - 9y^2$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(\pi,2,3) = \pi \underbrace{\cos(2\pi)}_{=1} - 9\cdot 4 = \pi - 36$

Allgemein

$\frac{\partial f}{\partial y}(\underset{\uparrow \text{fest}}{x}, y, \underset{\uparrow \text{fest}}{z}) = 0 + x\cos(xy) - 3y^2 z$ $\nearrow$ $(x,y,z) = (\pi,2,3)$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,\underbrace{y,z}_{\text{fest}}) = 2x + y\cos(xy) - 0$

$\frac{\partial f}{\partial z}(\underbrace{x,y}_{\text{fest}},z) = 0 + 0 - y^3 = -y^3$

MERKE: Zur Berech. v. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})$ behandle $x_j, j \neq i$, als Konst. und "leite $f(\bar{x})$ nach x_i ab" wie in Ana 1, d.h. mit Ableit.regeln, wenn diffbar nach x_i.
Sonst betrachte: $\lim_{h\to 0} \frac{f(\bar{x}+h\bar{e}_i) - f(\bar{x})}{h}$

2) $f(x,y) = e^{x^2+y^2} - 2x^3\sqrt{y}$, $D = \mathbb{R}\times\mathbb{R}_{\geq 0}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x e^{x^2+y^2} - 6x^2\sqrt{y}$

Für $y>0$: $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y e^{x^2+y^2} - \cancel{2}x^3 \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{y}}$

Für $y = 0 \neq x$: $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ existiert nicht, da $\sqrt{y}$ nicht diff.bar bei $y = 0$.

3) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{"} \ (x,y) = (0,0). \end{cases}$ $D = \mathbb{R}^2$ (siehe 5.10,1)

Für $(x,y) \neq (0,0)$: ($\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ offene Menge!)

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y(x^2+y^2) - xy2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$

Für $(x,y) = (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0$$

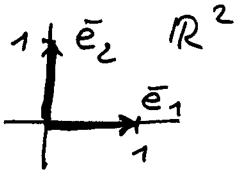
Also: f partiell diff.bar

Wissen (5.10, 1)): f nicht stetig in $(0,0)$

<u>Fazit</u>: f part.diff.bar $\not\Rightarrow$ f stetig.

7.3 <u>Erinn</u>: Lineare Abbildungen

1) $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n \in \mathbb{R}^n$ Standardbas.vekt.



$$\Rightarrow \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n: \ \bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{e}_i$$

2) Abb. $L: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ <u>linear</u> $:\Longleftrightarrow \forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$:

$$L(\bar{x}+\bar{y}) = L(\bar{x}) + L(\bar{y}) \ , \ L(\alpha\bar{x}) = \alpha L(\bar{x})$$

<u>Satz</u>: sei $L: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ linear.

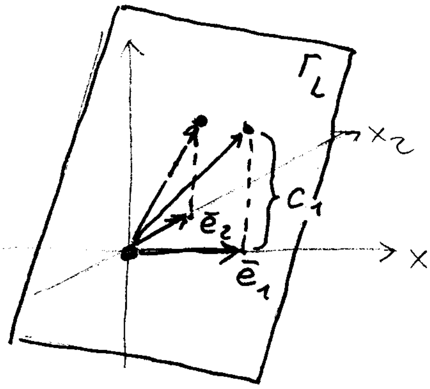
$\Rightarrow$ $\exists$ eindeutig bestimmte $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ mit

$$L(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \quad \text{für alle } \bar{x} \in \mathbb{R}^n$$

$\mathrm{Mat}(L) := [c_1, \dots, c_n]$ <u>Matrix</u> von L

$$\ulcorner \ L(\bar{x}) \underset{1)}{=} L\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i \bar{e}_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} x_i \underbrace{L(\bar{e}_i)}_{=:c_i} \quad //$$

$n = 2$



$\Gamma_L \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ Ebene durch $(\bar{0}, 0), (\bar{e}_1, c_1), (\bar{e}_2, c_2)$

7.4 Totale Differenzierbarkeit

Erinn: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ diffbar in $a\in\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$

$$\exists c\in\mathbb{R}: \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \overset{!}{=} c = \lim_{h\to 0}\frac{ch}{h}$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-\boxed{ch}}{h} = 0 \leftarrow \text{lineare Abb.} \quad \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ h\mapsto ch$$

Def: sei $f:D\to\mathbb{R}$, $D\subset\mathbb{R}^n$ offen

f (total) differenzierbar bei $\bar a\in D$ $:\Leftrightarrow$

es gibt eine lineare Abb. $L_{\bar a}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ mit

$$\lim_{\bar h\to\bar 0}\frac{f(\bar a+\bar h)-f(\bar a)-L_{\bar a}(\bar h)}{\|\bar h\|} = 0$$

$L_{\bar a} = df_{\bar a}$ heißt (totale) Ableitung von f bei $\bar a$

Interpret.: "f ist bei $\bar a$ durch affin. lin. Abb. $f(\bar a)+L_{\bar a}$ approximierbar"?

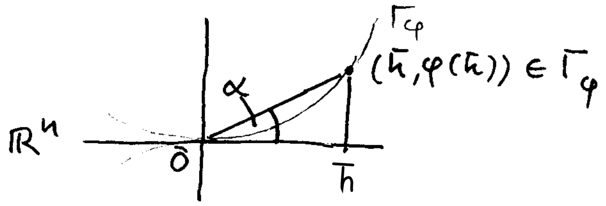
$f(\bar a+\bar h) = f(\bar a)+L_{\bar a}(\bar h)+\varphi(\bar h)$, wobei $\frac{\varphi(\bar h)}{\|\bar h\|}\xrightarrow[\bar h\to\bar 0]{}0$

$\Leftarrow$ $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

$\varphi(\bar h) := f(\bar a+\bar h)-f(\bar a)-L_{\bar a}(\bar h)$ Fehler fkt.

$\Rightarrow \varphi(\bar 0)=0$ und $\varphi(\bar h)\xrightarrow[\bar h\to\bar 0]{}0$ (da $|\varphi(\bar h)|\le\frac{|\varphi(\bar h)|}{\|\bar h\|}$ für $\|\bar h\|\le 1$)

Was bedeutet $\frac{\varphi(\bar h)}{\|\bar h\|}\xrightarrow[\bar h\to\bar 0]{}0$?

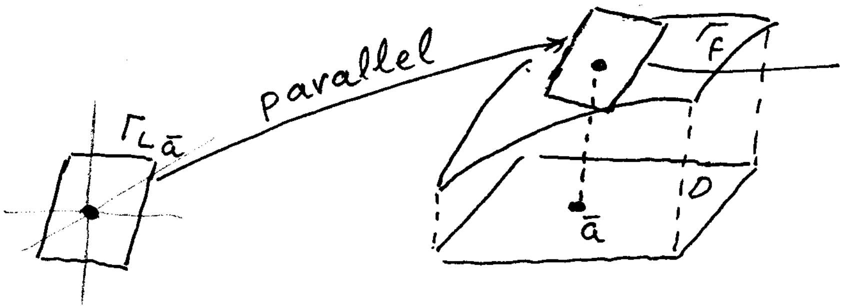


$$\tan\alpha(\bar h) = \frac{\varphi(\bar h)}{\|\bar h\|}\xrightarrow[\bar h\to\bar 0]{}0$$

↑ Einfallswinkel

$$\Rightarrow \alpha(\bar h)\xrightarrow[\bar h\to\bar 0]{}0$$

$\Rightarrow$ Γ_f schmiegt sich im Punkt $(\bar a,f(\bar a))$ an $\Gamma_{f(\bar a)+L_{\bar a}(?-\bar a)}$



tangential an Γ_f im Punkt $(\bar a,f(\bar a))$

7.5 **Satz**: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ diff.bar bei $\bar a \in D \underset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^n$

Dann gilt:

1) f ist stetig in $\bar a$.
2) f ist bei $\bar a$ part. diff.bar (nach allen x_i) und für die Ableitung $L_{\bar a}$ von f bei $\bar a$ gilt:

$$L_{\bar a}(\bar h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar a) h_i \quad \text{für alle } \bar h \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{d.h. } \operatorname{Mat}(L_{\bar a}) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar a)\right]$$

$$=: J_f(\bar a) \quad \underline{\text{Jacobi-Matrix}}$$

Bew: 1) **zeigen**: $\lim\limits_{\bar h \to \bar 0} f(\bar a + \bar h) = f(\bar a)$

$$f(\bar a + \bar h) = f(\bar a) + L_{\bar a}(\bar h) + \varphi(\bar h) \xrightarrow[\bar h \to \bar 0]{} f(\bar a) + \underbrace{L_{\bar a}(\bar 0)}_{0} + 0 = f(\bar a)$$

2) **zeigen**: $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar a) \overset{!}{=} c_i := L_{\bar a}(\bar e_i)$

$$\frac{f(\bar a + h\bar e_i) - f(\bar a)}{h} = \frac{1}{h}\Big(\underbrace{L_{\bar a}(h\bar e_i)}_{h c_i} + \varphi(h\bar e_i)\Big)$$

$$= c_i \pm \frac{\varphi(h\bar e_i)}{\|h\bar e_i\|} \xrightarrow[h \to 0]{} c_i \pm 0 = c_i \quad ✓$$

7.6 **Folg** (Diff.barkeitskrit.) Für $f : D \to \mathbb{R}$ sind äquiv.

i) f ist (total) diff.bar bei $\bar a \in D$
ii) f ist part. diff.bar bei $\bar a \in D$, und es gilt:

$$\lim_{\bar h \to \bar 0} \frac{1}{\|\bar h\|}\left(f(\bar a + \bar h) - f(\bar a) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar a) h_i\right) = 0$$

„$\Rightarrow$": 7.5 . „$\Leftarrow$": 7.4 mit $L_{\bar a}(\bar h) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar a) h_i$ //

Beisp: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & , (x,y) \neq \bar 0 \\ 0 & , (x,y) = \bar 0 \end{cases}$$

Beh: f ist bei $\bar 0$ part. diff.bar aber nicht (total) diff.bar

„**part. diff.b. bei $\bar 0$**": $\frac{\partial f}{\partial x}(\bar 0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(\bar 0)$ (vgl. 7.2, 3))

nicht tot. diffb. bei $\bar 0$:

$$\frac{1}{\|\bar h\|}\left(f(\bar 0 + \bar h) - \overset{=0}{f(\bar 0)} - \overset{=0}{\frac{\partial f}{\partial x}(\bar 0)} h_1 - \overset{=0}{\frac{\partial f}{\partial y}(\bar 0)} h_2\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \cdot \frac{h_1 h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \frac{h_1 h_2}{h_1^2+h_2^2} \cancel{\xrightarrow[\bar h \to \bar 0]{}} 0 \text{ nach 5.10,1)} //$$

7.7 Def: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen.

$f : D \to \mathbb{R}$ $\underline{C^1\text{-Funktion}}$ $:\Longleftrightarrow$

alle $\frac{\partial f}{\partial x_i} : D \to \mathbb{R}$ existieren und sind stetig

Satz: $f : D \to \mathbb{R}$ C^1-Funktion $\Rightarrow$ f (total) diff.bar

Bew: sei $\bar{a} \in D$ und $\delta > 0$ mit $\mathcal{U}_\delta(\bar{a}) \subset D$

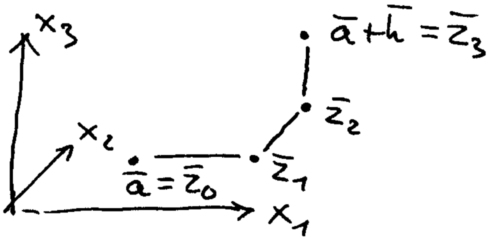
zeigen: $f(\bar{a}+\bar{h}) - f(\bar{a}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{a}) h_i + \varphi(\bar{h})$, wobei $\frac{\varphi(\bar{h})}{\|\bar{h}\|} \xrightarrow[\bar{h}\to\bar{0}]{} 0$

Sei $\bar{h} \in \mathcal{U}_\delta(\bar{0})$

Betrachte Pkte $\bar{z}_0, \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n \in \mathcal{U}_\delta(\bar{a})$

$\bar{z}_0 := \bar{a}$

$\bar{z}_i := \bar{z}_{i-1} + h_i \bar{e}_i$ für $i > 0$



$$\forall i : f(\bar{z}_i) - f(\bar{z}_{i-1}) \underset{\substack{\text{Ana1}\\ \text{MWS, 6.12}}}{=} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underbrace{\bar{z}_{i-1} + t_i \bar{e}_i}_{=:\,\bar{y}_i \,\in\, Q_{[\bar{a},\,\bar{a}+\bar{h}]}}) h_i \text{ für ein } t_i \text{ zw. } 0 \text{ und } h_i$$

$$\Rightarrow f(\underset{\bar{z}_n}{\underbrace{\bar{a}+\bar{h}}}) - f(\underset{\bar{z}_0}{\underbrace{\bar{a}}}) = \sum_{i=1}^{n} \left(f(\bar{z}_i) - f(\bar{z}_{i-1}) \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{y}_i) h_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{a}) h_i + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{y}_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{a}) \right) h_i}_{\varphi(\bar{h})}$$

zuzeigen: $\frac{\varphi(\bar{h})}{\|\bar{h}\|} \xrightarrow[\bar{h}\to\bar{0}]{} 0$

$$|\varphi(\bar{h})| = \left| \sum_{i=1}^{n} d_i h_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |d_i| |h_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |d_i| \|\bar{h}\|$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{|\varphi(\bar{h})|}{\|\bar{h}\|} \leq \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{y}_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{a}) \right| \xrightarrow{\bar{h} \to \bar{0}} 0$$

$$\begin{array}{c}\bar{h}\\ \downarrow\\ \bar{0}\end{array} \Rightarrow \begin{array}{c}\bar{y}_i\\ \downarrow\\ \bar{a}\end{array} \xRightarrow[\frac{\partial f}{\partial x_i}\text{ stetig}]{} \begin{array}{c}\downarrow\\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{a})\end{array} \longrightarrow \Uparrow$$

✓

7.8 Zusammenfassung

$$\begin{tikzcd}
 & \text{Diffbarkeitskrit} \arrow[d, Leftrightarrow, "7.6"] & \\
f\ C^1\text{-Fkt} \arrow[r, Rightarrow, "7.7"'] & \forall \bar{a}: \boxed{f \text{ diffbar bei } \bar{a}} \arrow[r, Rightarrow, "7.5"'] \arrow[d, Rightarrow, "7.5"] & f \text{ part. diffbar bei } \bar{a} \\
\text{hinreich. Beding} \arrow[u] & f \text{ stetig in } \bar{a} & \text{notwend. Beding.} \arrow[u] \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Beisp

1) $f(x,y) = xe^y + \cos(xy)$, $D = \mathbb{R}^2$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= e^y - y\sin(xy) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= xe^y - x\sin(xy) \end{aligned}\right\} \text{stetig}$$

$\Longrightarrow$ f C^1 Fkt., also diff.bar (nach 7.7)

2) $f(x,y) = |xy|$, $D = \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1,h) - f(1,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h| - 0}{h} \text{ existiert nicht}$$

$\Longrightarrow$ f bei (1,0) nicht part. diffbar

$\underset{7.5}{\Longrightarrow}$ f bei (1,0) nicht diffbar.

3) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad D = \mathbb{R}^2$$

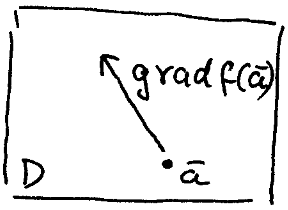
Wissen (5.10,1)): f nicht stetig in (0,0)

$\underset{7.5)}{\Longrightarrow}$ f nicht diffbar bei (0,0)

§ 8 Der Gradient

Im Folg: $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\bar{a} \in D$

$f: D \to \mathbb{R}$ diff.bar bei $\bar{a}$



<u>Def</u>: $\operatorname{grad} f(\bar{a}) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{a})\right) \in \mathbb{R}^n$

heißt <u>Gradient</u> von f bei $\bar{a}$

<u>Ziel</u>: $\left.\begin{matrix}\operatorname{grad} f(\bar{a}) \\ \text{Skalarprod.}\end{matrix}\right\} \Longrightarrow$ "geom. Info" über f bei $\bar{a}$

8.1 <u>Satz</u> (Kettenregel spezial)

Sei $\gamma: I \longrightarrow D \subset \mathbb{R}^n$ Kurve, diff.bar in $a \in \underset{\text{Intervall}}{I} \subset \mathbb{R}$

$f: D \to \mathbb{R}$ diff.bar bei $\gamma(a)$

$\Rightarrow f \circ \gamma: I \to \mathbb{R}$ ist diff.bar in a mit

$$(f \circ \gamma)'(a) = \langle \operatorname{grad} f(\gamma(a)), \gamma'(a) \rangle$$

<u>Bew</u>: folgt aus allgem. Kettenregel (später)

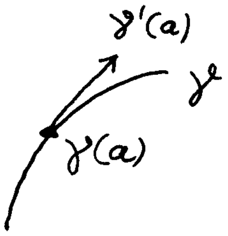
Idee: $f(\gamma(a+h)) \approx f(\underbrace{\gamma(a)}_{\bar{a}} + \underbrace{\gamma'(a)h}_{\bar{h}})$

$$\approx f(\bar{a}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{a})\, h_i$$

$$= f(\bar{a}) + \langle \operatorname{grad} f(\bar{a}), \bar{h} \rangle$$

$$= f(\gamma(a)) + \langle \operatorname{grad} f(\gamma(a)), \gamma'(a) h \rangle$$

✓



<u>Beisp</u>

$f(x,y) = \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$

$\gamma(t) = (-1,-1) + t(2,1)$

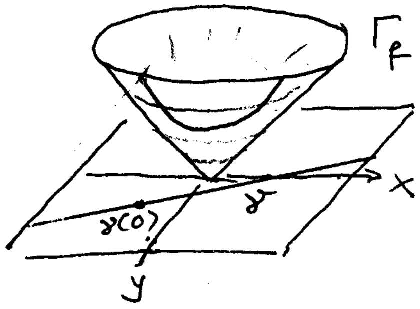
$= (2t-1, t-1)$

$\gamma'(t) = (2,1)$ const.

$\operatorname{grad} f(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

$(f \circ \gamma)'(0) = ?$

$\gamma(0) = (-1,-1), \quad \gamma'(0) = (2,1)$



$$(f \circ \gamma)'(0) \underset{\text{Satz}}{=} \langle \operatorname{grad} f(\underbrace{\gamma(0)}_{(-1,-1)}), \underbrace{\gamma'(0)}_{(2,1)} \rangle$$

$$= \left\langle \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right), (2,1) \right\rangle = \underline{\frac{-3}{\sqrt{2}}}$$

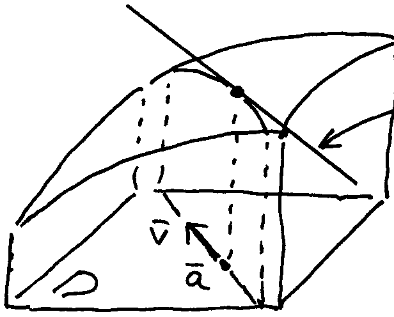
8.2 <u>Def</u>: Sei $\bar{a} \in D$ und $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\bar{v}\| = 1$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(\bar{a}) := \lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{a}+h\bar{v}) - f(\bar{a})}{h} \quad \left(\begin{array}{c}\text{falls Grenzwert} \\ \text{existiert}\end{array}\right)$$

heißt <u>Ableitung</u> von f bei $\bar{a}$ <u>in Richtung</u> $\bar{v}$

Spez. Fall

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{e}_i}(\bar{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{a})$$



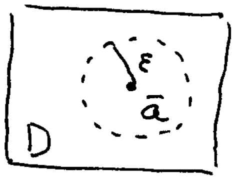
Anstieg $\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(\bar{a})$

8.3 <u>Satz</u>: Sei $f: D \to \mathbb{R}$ diff.bar bei $\bar{a} \in D$. Dann gilt:

1) Alle Richtungsabl. von f bei $\bar{a}$ existieren, und
$$\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(\bar{a}) = \langle \operatorname{grad} f(\bar{a}), \bar{v} \rangle \quad \text{für } \bar{v} \in \mathbb{R}^n, \|\bar{v}\| = 1.$$

2) Ist $\operatorname{grad} f(\bar{a}) \neq \bar{0}$, so zeigt $\operatorname{grad} f(\bar{a})$ in Richtung des größten Anstiegs von f bei $\bar{a}$, und dieser ist $\|\operatorname{grad} f(\bar{a})\|$.

<u>Bew</u>: 1) $\gamma:]-\varepsilon, \varepsilon[\to D$ ist diffbar mit
$\gamma(t) = \bar{a} + t\bar{v}$ $\quad \gamma(0) = \bar{a}$, $\gamma'(0) = \bar{v}$



$$\xRightarrow[8.1]{} (f \circ \gamma)'(0) = \langle \operatorname{grad} f(\bar{a}), \bar{v} \rangle$$
$$\overset{\|}{\lim_{h \to 0}} \frac{f(\overset{\bar{a}+h\bar{v}}{\gamma(h)}) - f(\overset{\bar{a}}{\gamma(0)})}{h} = \frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(\bar{a})$$

2) $$\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(\bar{a}) \underset{1)}{=} \underset{\substack{\neq \\ 0}}{\|\operatorname{grad} f(\bar{a})\|} \underbrace{\|\bar{v}\|}_{1} \underbrace{\cos \varphi}_{\leq 1}, \text{ wobei } \varphi = \sphericalangle(\operatorname{grad} f(\bar{a}), \bar{v})$$
$$= 1 \iff \varphi = 0 \qquad \checkmark$$

<u>Beisp</u>: $f(x, y) = \sqrt{x^2+y^2}$

$\bar{a} = (2, -1)$, $\bar{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\operatorname{grad} f(\bar{a}) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}\right)$ Vielfaches von $\bar{a} = (2, -1)$

$\|\operatorname{grad} f(\bar{a})\| = 1$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(\bar{a}) = \langle \operatorname{grad} f(\bar{a}), \bar{v} \rangle = \langle \tfrac{1}{\sqrt{5}}(2, -1), \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1, 1) \rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

Wiederholung

Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ diff.bar bei $\bar{a} \in D \underset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^n$

$\operatorname{grad} f(\bar{a}) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{a}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{a})\right) \in \mathbb{R}^n$ Gradient von f bei $\bar{a}$

8.1 Spez. Kettenregel: Sei $I \xrightarrow[\text{diff.bare Kurve}]{\gamma} D \xrightarrow[\text{diffbar}]{f} \mathbb{R}$

$\Rightarrow f \circ \gamma$ diffbar mit $(f \circ \gamma)'(a) = \langle \operatorname{grad} f(\gamma(a)), \gamma'(a) \rangle$

8.3:

1) $\forall \bar{v} \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\bar{v}\| = 1$:

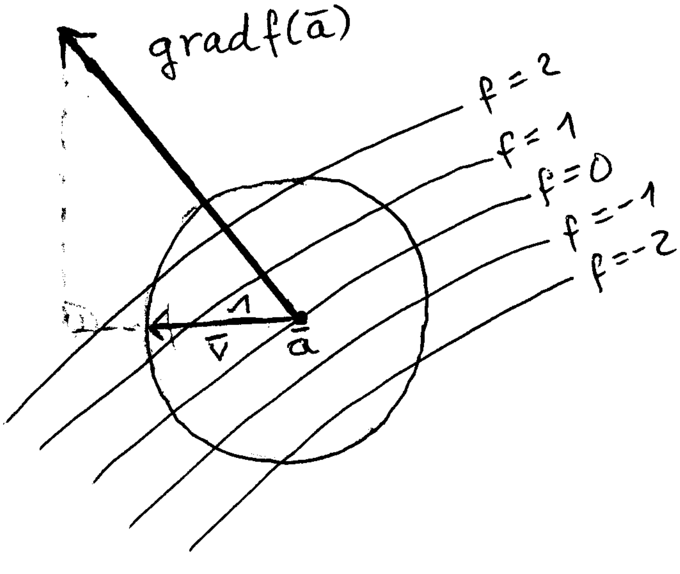
$\langle \operatorname{grad} f(\bar{a}), \bar{v} \rangle$ = Anstieg von f bei $\bar{a}$ in Richtung $\bar{v}$

2) Falls $\operatorname{grad} f(\bar{a}) \neq \bar{0}$:

grad $f(\bar{a})$ zeigt in Richtung des größten Anstiegs von f bei $\bar{a}$.

$\|\operatorname{grad} f(\bar{a})\|$ = größter Anstieg von f bei $\bar{a}$

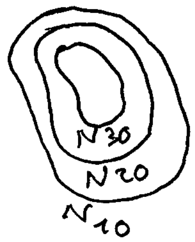
$D \subset \mathbb{R}^2$



8.4 Sei $f: D \to \mathbb{R}$ wie oben, $c \in \mathbb{R}$

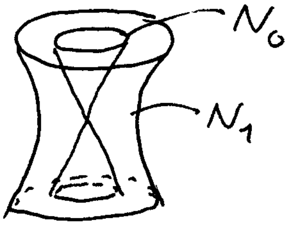
$N_c := f^{-1}(c) = \{\bar{x} \in D \mid f(\bar{x}) = c\}$ Niveaumenge

$D \subset \mathbb{R}^2$



$D \subset \mathbb{R}^3$

$f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$



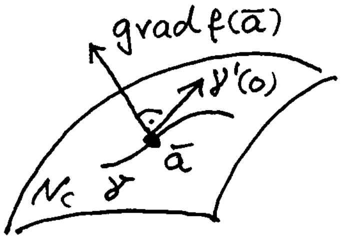
Satz: Sei $f: D \to \mathbb{R}$ diffbar bei $\bar{a} \in N_c$

$\gamma:]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow N_c$ diffbare Kurve in N_c mit $\gamma(0) = \bar{a}$

$\Rightarrow \langle \operatorname{grad} f(\bar{a}), \gamma'(0) \rangle = 0$

Bew: $f \circ \gamma = c$ const $\Rightarrow 0 = (f \circ \gamma)'(0) \underset{8.1}{=} \langle \operatorname{grad} f(\bar{a}), \gamma'(0) \rangle$ ✓

Interpretation:



γ belieb. diff.bare Kurve in N_c mit $\gamma(0) = \bar{a}$

$\operatorname{grad} f(\bar{a})$ "steht senkrecht" auf N_c im Punkt $\bar{a}$

8.5 **Def:** Sei $f: D \to \mathbb{R}$ diffbar bei $\bar{a}$ mit $\operatorname{grad} f(\bar{a}) \neq \bar{o}$.

$$T_{\bar{a}} := \{\bar{a} + \bar{h} \mid \bar{h} \in \mathbb{R}^n, \langle \operatorname{grad} f(\bar{a}), \bar{h} \rangle = 0\}$$
$$= \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \operatorname{grad} f(\bar{a}), \bar{x} - \bar{a} \rangle = 0\}$$

heißt Tangentialraum an $N_{f(\bar{a})}$ im Punkt $\bar{a}$.

Bem: $T_{\bar{a}}$ zeigt den Verlauf von $N_{f(\bar{a})}$ nahe bei $\bar{a}$.

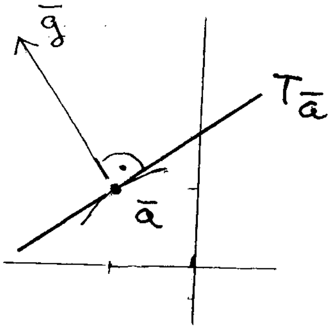
Beisp

$f(x,y) = x^2 - xy + 2y^2$, $\bar{a} = (-1,1) \Rightarrow f(-1,1) = 1+1+2 = 4$, d.h. $\bar{a} \in N_4$

$\operatorname{grad} f(x,y) = (2x - y, -x + 4y)$

$\Rightarrow \operatorname{grad} f(-1,1) = (-3, 5) =: \bar{g}$

$$(x,y) \in T_{\bar{a}} \Leftrightarrow 0 = \langle \bar{g}, (x,y) - \bar{a} \rangle$$
$$= \langle (-3,5), (x+1, y-1) \rangle$$
$$= -3x - 3 + 5y - 5$$
$$= -3x + 5y - 8$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{3}{5}x + \frac{8}{5}$$



Also: $T_{\bar{a}} = \{(x, \frac{3}{5}x + \frac{8}{5}) \mid x \in \mathbb{R}\} = (-1,1) + \mathbb{R}(1, 3/5)$

§ 9 Lokale Extrema

Erinn: Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 2-mal diff.bar, $a\in\mathbb{R}$

$$\underset{\text{hinreich. Bed.}}{f'(a)=0 \wedge f''(a)\neq 0} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} f \text{ hat bei } a \\ \text{lok. Extrem.}\end{array}} \Longrightarrow \underset{\text{notwend. Bed.}}{f'(a)=0}$$

Ziel: Verallgem. für Funkt. in mehreren Variablen

Im Folgenden: $D\subset\mathbb{R}^n$ offen

9.1 Def: Sei $f:D\to\mathbb{R}$ diff bar.

1) f hat bei $\bar{a}\in D$ ein lok. Max. (bzw. lok. Min.) $:\Longleftrightarrow$
$\exists\,\delta>0\ \forall\,\bar{x}\in U_\delta(\bar{a})\cap D:\ f(\bar{x})\leq f(\bar{a})\ (\text{bzw.} \geq f(\bar{a}))$

2) $\bar{a}\in D$ stationärer Punkt von f $:\Longleftrightarrow$ $\operatorname{grad} f(\bar{a})=\bar{0}$

Satz: Sei $f:D\to\mathbb{R}$ diff bar, und f habe bei $\bar{a}\in D$ ein lok. Max oder lok. Min.

$\Longrightarrow$ $\bar{a}$ ist stationärer Punkt von f, d.h.

$$\operatorname{grad} f(\bar{a})=\bar{0}$$

Bew: $\forall\, i=1,\dots,n$: $\begin{array}{l}]-\delta,\delta[\ \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto f(\bar{a}+t\bar{e}_i)\end{array}$ hat lok. Extrem. bei $t=0$

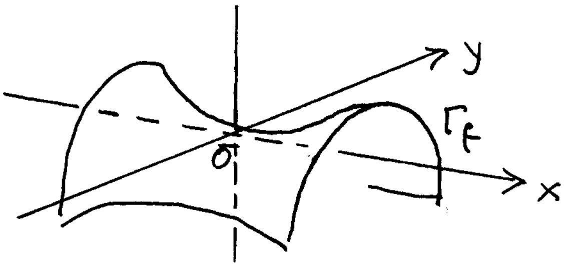
$\underset{\text{Ana 1, 7.5}}{\Longrightarrow}$ $\forall\, i=1,\dots,n$: $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{a})=0$ ✓

Bem: $\operatorname{grad} f(\bar{a})=\bar{0}$ $\not\Longrightarrow$ lok. Extrem. bei $\bar{a}$

z.B. $f(x,y)=x^2-y^2$

$\operatorname{grad} f(x,y)=(2x,-2y)$

$\Rightarrow \operatorname{grad} f(0,0)=(0,0)$



Frage: Was entspricht der 2. Ableit. im Mehrdimensionalen?

9.2 **Def**: Sei $f: D \to \mathbb{R}$ part. diffbar

f **C^2-Funktion** $:\iff$ alle 2-ten part. Ableit.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} := \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right), \quad i,j = 1, \dots, n$$

existieren und sind stetig.

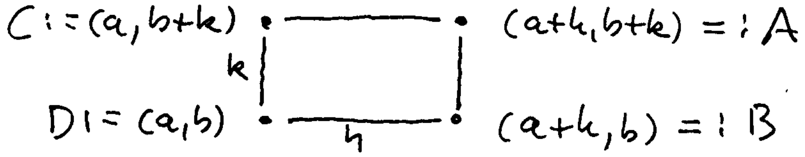
Bew; f C^2-Fkt $\Rightarrow f$ C^1-Fkt

⌈ alle $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sind C^1-Fkt, also diffbar (7.7), also stetig (7.5) //

9.3 **Satz** (Schwarz): Sei $f: D \to \mathbb{R}$ C^2-Funktion.

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \quad \text{für alle } i,j = 1, \dots, n$$

Bew: o. E. $n = 2$, $x := x_i$, $y := x_j$. Sei $(a,b) \in D$



$$F(h,k) := f(A) - f(B) - f(C) + f(D)$$

zeigen: $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) = \lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \frac{1}{hk} F(h,k)$

⌈ $\boxed{\vdots}\,\boxed{\vdots}$: $F(h,k) = (f(A) - f(B)) - (f(C) - f(D))$

$= g(a+h) - g(a)$, wobei $g(x) = f(x, b+k) - f(x,b)$
diffbare Fkt. in Var. x

$\overset{\text{(Ana 1)}}{\underset{\text{MWS}}{=}}$ (7.7) $g'(\alpha) h$ für ein α zwischen a und $a+h$

$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha, b+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(\alpha, b)\right) h$, $\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha, y)$ diffbare Fkt in Var y

$\underset{\text{MWS}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\alpha, \beta) kh$ für ein β zw. b und $b+k$

$\Rightarrow \frac{1}{hk} F(h,k) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\alpha, \beta) \xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)$, da $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ stetig //

Analog: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = \lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \frac{1}{hk} F(h,k)$

⌈ $\substack{\boxed{\cdots}\\ \boxed{\cdots}}$: $F(h,k) = (f(A) - f(C)) - (f(B) - f(D)) = \dots$ // ✓

9.4 Def: Sei $f: D \to \mathbb{R}$ C^2-Fkt. und $\bar{a} \in D$.

$$H_f(\bar{a}) := \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{a}) \right] \in \mathbb{R}^{n \times n}$$ heißt Hesse-Matrix von f bei $\bar{a}$

Bem: Nach 9.3 ist $H_f(\bar{a})$ symmetrisch.

Beisp: $f(x,y) = x^2y^3 + 3xy$

$\operatorname{grad} f(x,y) = (2xy^3 + 3y,\ 3x^2y^2 + 3x)$

$$H_f(x,y) = \begin{array}{c} \curvearrowright \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \curvearrowright \end{array} \begin{bmatrix} 2y^3 & 6xy^2+3 \\ 6xy^2+3 & 6x^2y \end{bmatrix} \begin{array}{c} \curvearrowleft \partial/\partial x \\ \curvearrowleft \partial/\partial y \end{array}$$

für $\bar{a} = (2,1)$: $H_f(2,1) = \begin{bmatrix} 2 & 15 \\ 15 & 24 \end{bmatrix}$

Frage: Was entspricht der Bed.: $f''(a) > 0$ bzw < 0 ?

9.5 sei $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch, d.h. $\forall i,j: a_{ij} = a_{ji}$

$q_A: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ quadratische Form zu A

$$q_A(\bar{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

Beisp:

$$A = \begin{array}{c|cc} & x & y \\ \hline x & 3 & 2 \\ y & 2 & -1 \end{array}$$

$q_A(x,y) = 3x^2 + 2xy + 2yx - 1y^2$
$= 3x^2 + 4xy - y^2$

Def: Sei $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $q_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zugeh. quad. Form.

q_A positiv definit $:\Longleftrightarrow \forall \bar{x} \neq \bar{o}: q_A(\bar{x}) > 0$

q_A negativ definit $:\Longleftrightarrow \forall \bar{x} \neq \bar{o}: q_A(\bar{x}) < 0$

q_A indefinit $:\Longleftrightarrow \exists \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n: q_A(\bar{x}) < 0 < q_A(\bar{y})$

Beisp: $q_A(x,y) = 3x^2 + 4xy - y^2$ ist indefinit,
da $q_A(1,0) = 3 > 0$ und $q_A(0,1) = -1 < 0$.

9.6 **Satz**: Für $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt:

1) q_A pos. def. $\iff \det A > 0 \ \wedge \ a > 0$
2) q_A neg. def. $\iff \det A > 0 \ \wedge \ a < 0$
3) q_A indef. $\iff \det A < 0$ (a egal)

Bew: $q(x,y) := q_A(x,y) = ax^2 + 2bxy + dy^2$

$$\Rightarrow a\,q(x,y) = (ax+by)^2 + \underbrace{(ad-b^2)}_{\det A}\, y^2 \qquad (*)$$

1) „⇒": $0 < q(1,0) = a$

$$\Rightarrow 0 < a\,q(b,-a) \underset{(*)}{=} 0^2 + \det A \cdot a^2 \quad \Rightarrow \det A > 0$$

„⇐": Für $y \neq 0$: $a > 0 \Rightarrow q(x,y) = \underbrace{\frac{1}{a}(ax+by)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{\det A}{a}\, y^2}_{>0} > 0$

Für $y = 0 \neq x$: $q(x,0) = ax^2 > 0$

2) Ähnlich

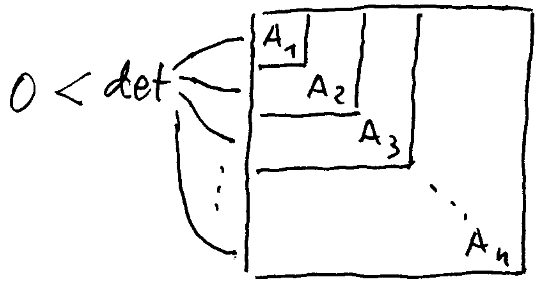
3) Fall $a \neq 0$: q indef $\iff$ aq indef.

$$\underset{(*)}{\iff} \underbrace{(ax+by)^2}_{\geq 0} + \det A \underbrace{y^2}_{\geq 0} \text{ indef} \iff \det A < 0$$

Fall $a = 0$: $q(x,y) = 2bxy + \underbrace{dy^2}_{\text{Vorzeich. v. d}}$ indef $\iff b \neq 0$ $\iff \det A = 0 \cdot d - b^2 < 0$ ✓

Verallg. (Hurwitz-Krit.): Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symm. gilt:

q_A pos. def $\iff$ alle Hauptunterdeterminanten von A sind positiv



z.B. $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $3 > 0$, $3\cdot 2 - 1 = 5 > 0$, $\det A = 3\cdot 1 + (-1) = 2 > 0$

$\Rightarrow$ A pos. def

q_A neg. def. $\iff \forall i = 1, \dots, n : (-1)^i \det A_i > 0$

Wiederholung

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ diffbar, $\bar{a} \in D \subset \mathbb{R}^n$ offen

9.1: f habe bei $\bar{a} \in D$ ein lokales Extremum

$\Rightarrow \operatorname{grad} f(\bar{a}) = (0, \dots, 0)$ "$\bar{a}$ stationärer Pkt."

Def: f C^2-Funktion $:\Longleftrightarrow$ alle $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ existieren und sind stetig

$H_f(\bar{a}) := \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{a})\right] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Hesse-Matrix

9.3 Schwarz: $H_f(\bar{a})$ ist symmetrisch

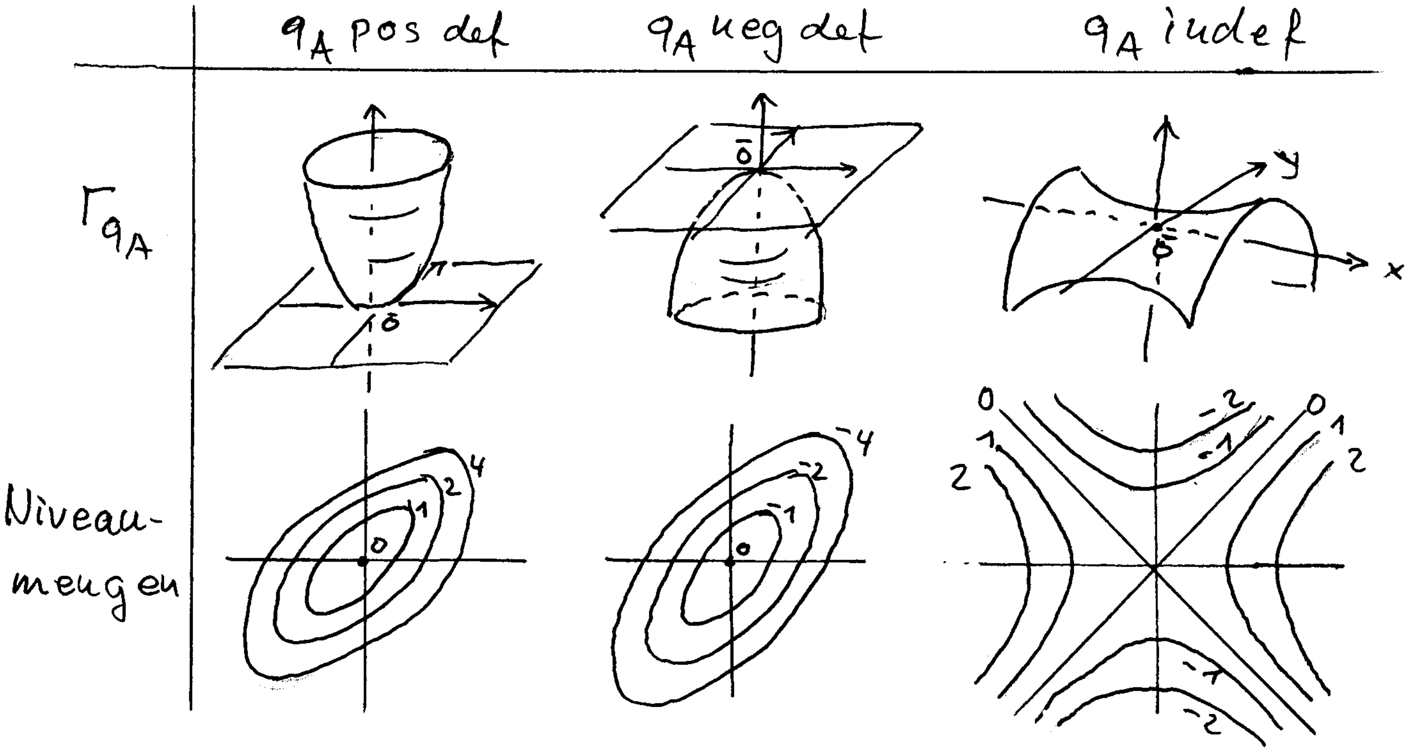
Def: Sei $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symm.

$q_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $q_A(\bar{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ zugeh. quad. Form

q_A pos. def. (neg. def) $:\Longleftrightarrow$ $\forall\, \bar{0} \neq \bar{x} \in \mathbb{R}^n$: $q_A(\bar{x}) > 0$ $(q_A(\bar{x}) < 0)$

q_A indef. $:\Longleftrightarrow$ $\exists\, \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$: $q_A(\bar{x}) < 0 < q_A(\bar{y})$

Sei $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$



Erinn: Sei f diffbar bei $\bar{a}$

$$\Rightarrow f(\bar{a}+\bar{h}) = f(\bar{a}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{a}) h_i + \varphi(\bar{h})$$

$$= f(\bar{a}) + \langle \operatorname{grad} f(\bar{a}), \bar{h} \rangle + \varphi(\bar{h})$$

wobei $\frac{\varphi(\bar{h})}{\|\bar{h}\|} \xrightarrow[\bar{h} \to \bar{0}]{} 0$

d.h. die Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$g(\bar{a}+\bar{h}) = f(\bar{a}) + \langle \operatorname{grad} f(\bar{a}), \bar{h} \rangle$$

ist die (affin) lineare Approximation von f bei $\bar{a}$.

9.7 Satz (Taylor-Formel 2. Ordnung)

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ C^2-Fkt, $\bar a \in D$ und $H := H_f(\bar a)$

$$\Rightarrow f(\bar a+\bar h) = f(\bar a) + \langle \operatorname{grad} f(\bar a), \bar h\rangle + \tfrac{1}{2} q_H(\bar h) + R_2(\bar h),$$

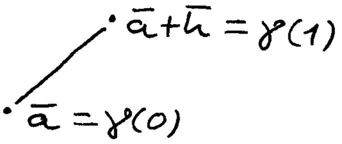
wobei $\dfrac{R_2(\bar h)}{\|\bar h\|^2} \xrightarrow[\bar h \to \bar 0]{} 0$

Erinn: Ana1, 7.4: Sei $\psi : I \to \mathbb{R}$ 2-mal diffbar, $p \in I$

$\Rightarrow \psi(x) = \psi(p) + \psi'(p)(x-p) + \frac{1}{2}\psi''(\xi)(x-p)^2$ für ein ξ zw. p und x

Bew: Betrachte $\gamma : [0,1] \to D$, $\gamma(t) = \bar a + t\bar h$

$\gamma'(t) = \bar h$



1) $\psi := f\circ\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\psi(t) = f(\bar a + t\bar h)$

$$\Rightarrow \psi'(t) \underset{8.1}{=} \langle \operatorname{grad} f(\gamma(t)), \bar h\rangle = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_j}(\gamma(t))} h_j$$

$\frac{\partial f}{\partial x_j}$ C^1-Fkt, γ diffb. $\Rightarrow$ diffbar

$$\Rightarrow \psi''(t) \underset{8.1}{=} \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\gamma(t)) h_i \Big) h_j = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\gamma(t)) h_i h_j$$

$$= q_{H_f(\gamma(t))}(\bar h)$$

Insbes. ψ 2-mal diffbar.

2) $f(\bar a+\bar h) = \psi(1)$

$$\underset{\text{7.4, Ana1}}{=} \psi(0) + \psi'(0)(1-0) + \tfrac{1}{2}\psi''(\xi)(1-0)^2 \text{ für ein } \xi \in [0,1]$$

für $p=0, x=1$
$$= \psi(0) + \psi'(0) + \tfrac{1}{2}\psi''(0) + \underbrace{\tfrac{1}{2}\big(\psi''(\xi) - \psi''(0)\big)}$$

$$\underset{1)}{=} f(\bar a) + \langle \operatorname{grad} f(\bar a), \bar h\rangle + \tfrac{1}{2} q_H(\bar h) + {=:}\, R_2(\bar h)$$

3) bleibt zu zeigen: $\lim\limits_{\bar h \to \bar 0} \dfrac{R_2(\bar h)}{\|\bar h\|^2} = 0$

$$\frac{|R_2(\bar h)|}{\|\bar h\|^2} \le \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \underbrace{\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar a + \xi\bar h) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar a) \right|} \cdot \boxed{\frac{|h_i||h_j|}{\|\bar h\|^2}}^{\le 1}$$

$$\begin{tikzcd}
\bar h \arrow[d] & \Rightarrow & \bar a + \xi \bar h \arrow[d] & \xRightarrow[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\text{ stetig}]{} & {} \arrow[d] \\
\bar 0 & & \bar a & & 0
\end{tikzcd}$$

✓

9.8 **Satz**: Sei $f: D \to \mathbb{R}$ C^2-Funktion,
$\bar a \in D$ stationärer Pkt. von f, d.h. $\operatorname{grad} f(\bar a) = \bar 0$,
$q = q_{H_f(\bar a)}$ quadrat. Form zu $H_f(\bar a)$

Dann gilt:

($f(\bar x) > f(\bar a)$ für $\bar a \neq \bar x \in U_\delta(\bar a)$)

1) q pos. def. $\Rightarrow$ f hat bei $\bar a$ ein striktes lok. Minimum
2) q neg. def. $\Rightarrow$ f " " $\bar a$ " striktes lok Maximum
3) q indef. $\Rightarrow$ f " " $\bar a$ kein lok. Extremum, d.h. $\bar a$ ist Sattelpkt.

Bew:

1) Vorbem: $S := \{\bar x \in \mathbb{R}^n \mid \|\bar x\| = 1\}$ kompakt, $q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig

$\xRightarrow[6.9]{}$ $\mu := \min\{q(\bar x) \mid \bar x \in S\}$ existiert, und $\mu > 0$, da q pos. def.

Nach 9.7 gilt:

$$f(\bar a + \bar h) = f(\bar a) + \underbrace{\tfrac{1}{2} q(\bar h) + R_2(\bar h)}_{} \quad \text{mit} \quad \frac{R_2(\bar h)}{\|\bar h\|^2} \xrightarrow[\bar h \to \bar 0]{} 0$$

Gesucht: $\delta > 0$ mit $\quad > 0$ für alle $\bar 0 \neq \bar h \in U_\delta(\bar 0)$

$\forall 0 \neq \bar h \in \mathbb{R}^n$: $\frac{1}{2} q(\bar h) \geq \frac{1}{2} \mu \|\bar h\|^2$ $\quad (*)$

[denn: $q(\bar h) = q\left(\|\bar h\| \frac{\bar h}{\|\bar h\|}\right) = \|\bar h\|^2 q\Big(\underbrace{\frac{\bar h}{\|\bar h\|}}_{\in S}\Big) \geq \|\bar h\|^2 \mu$)

$\frac{R_2(\bar h)}{\|\bar h\|^2} \xrightarrow[\bar h \to \bar 0]{} 0 \Rightarrow \exists \delta > 0\ \forall \bar 0 \neq \bar h \in U_\delta(\bar 0)$: $\frac{|R_2(\bar h)|}{\|\bar h\|^2} < \frac{1}{2}\mu$

d.h. $R_2(\bar h) > -\frac{1}{2}\mu \|\bar h\|^2$

$\Rightarrow \forall \bar 0 \neq \bar h \in U_\delta(\bar 0)$: $\frac{1}{2} q(\bar h) + R_2(\bar h) \underset{(*)}{\geq} \frac{1}{2}\mu \|\bar h\|^2 + R_2(\bar h) > 0$

2) analog (oder betrachte $-f$)

3) q indef $\Rightarrow$ $\exists\, \bar x, \bar y \in \mathbb{R}^n$: $q(\bar x) < 0 < q(\bar y)$

$$f(\bar a + h\bar x) - f(\bar a) = \tfrac{1}{2} q(h\bar x) + R_2(h\bar x) \quad \text{für } 0 \neq h \in \mathbb{R}$$

$$= h^2\Big(\underbrace{\tfrac{1}{2} q(\bar x)}_{<0} + \underbrace{\frac{R_2(h\bar x)}{\|h\bar x\|^2}}_{\lim\limits_{h\to 0} = 0} \|\bar x\|^2\Big) < 0$$ für h klein

Analog: $f(\bar a + h\bar y) - f(\bar a) > 0$ für h klein.
d.h. in jeder Umgeb. von $\bar a$ nimmt f Werte $< f(\bar a)$ und Werte $> f(\bar a)$ an.

9.9 Beisp

1) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 3x \qquad D = \mathbb{R}^2$

Wo hat f lokale Extrema bzw Sattelpkte?

I) Stationäre Punkte:

$\operatorname{grad} f(x,y) = (3x^2+3y^2-3,\ 6xy)$

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (0,0) \iff 3x^2+3y^2-3=0 \text{ und } 6xy=0$$

$$\Updownarrow$$

$$x^2+y^2=1$$

$$6xy = 0 \iff \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ \text{oder} \\ y=0 \end{array}\right. \begin{array}{l} \Longrightarrow y = \pm 1 \\ \\ \Longrightarrow x = \pm 1 \end{array}$$

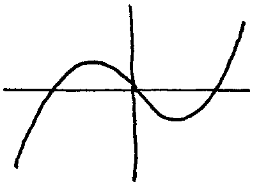
Also 4 stat. Pkte: $\bar{a}_{1/2} = (\pm 1, 0)$, $\bar{a}_{3/4} = (0, \pm 1)$

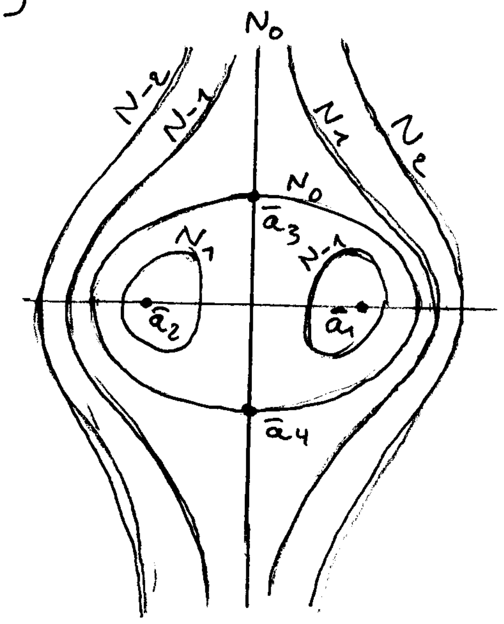
II) $H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$

$\bar{a}_i$	$H_f(\bar{a}_i)$	det	a	q_H	lok Extr.?	$f(\bar{a}_i)$
$(1,0)$	$\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$	$36>0$	$6>0$	pos def	Min.	-2
$(-1,0)$	$\begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$	$36>0$	$-6<0$	neg def	Max	2
$(0,1)$	$\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$	$-36<0$		indef	Sattelpkt	0
$(0,-1)$	$\begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$	$-36<0$				

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^3 + 3xy^2 - 3x \\ &= x(x^2+3y^2-3) \end{aligned}$$

Graph von $f(x,0)$:





2) $f(x,y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, $D = \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}$

I) Stat. Punkte: $\operatorname{grad} f(x,y) = (y - \frac{1}{x^2}, x - \frac{1}{y^2})$

$\operatorname{grad} f(x,y) = (0,0) \iff y = \frac{1}{x^2}$ und $x = \frac{1}{y^2}$

$y = \frac{1}{x^2}$ in 2. Gleich.: $x = \frac{1}{(1/x^2)^2} = x^4$

$\Rightarrow 0 = x^4 - x = x(x^3-1) \underset{x\neq 0}{\Longrightarrow} x^3 - 1 = 0$

$\Rightarrow x = 1 , y = 1$

$\Rightarrow \bar{a} = (1,1)$ einziger stat. Punkt von f

II) $H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 2/x^3 & 1 \\ 1 & 2/y^3 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow H_f(1,1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \leftarrow \left.\begin{matrix} \det = 4-1 = 3 > 0 \\ a = 2 > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow H_f(1,1)$ pos. def

$\Rightarrow$ f hat bei $\bar{a} = (1,1)$ ein lok. Min

3) $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$, $D = \mathbb{R}^2$

I) Stat. Pkte: $\operatorname{grad} f(x,y) = (-2x e^{-x^2-y^2}, -2y e^{-x^2-y^2})$

$\operatorname{grad} f(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} -2x e^{-x^2-y^2} = 0 \iff x = 0 \\ \text{und} \\ -2y e^{-x^2-y^2} = 0 \iff y = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \bar{a} = (0,0)$ einziger stat. Punkt von f

II) $H_f(x,y) = \begin{bmatrix} (4x^2-2)e^{-x^2-y^2} & 4xy e^{-x^2-y^2} \\ 4xy e^{-x^2-y^2} & (4y^2-2)e^{-x^2-y^2} \end{bmatrix}$

$\Rightarrow H_f(0,0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ Diag. matr. mit negativen Diag. einträgen

$\Rightarrow H_f(0,0)$ neg. definit

$\Rightarrow$ f hat bei $\bar{a} = (0,0)$ ein lok. Max.

9.9 <u>Beisp</u> 4)

$$f(x,y) = x^3 + x^2 + y^2 - xy^2 \quad , \quad D = \mathbb{R}^2$$

I) <u>Stat. Punkte</u>: $\operatorname{grad} f(x,y) = (3x^2+2x-y^2,\ 2y-2xy)$

(x,y) stat. Punkt $\iff \underset{(*)}{3x^2+2x-y^2=0} \wedge \underset{(**)}{2y-2xy=0}$

$$(**) \iff 2y(1-x)=0 \iff y=0 \vee 1-x=0$$
$$\iff y=0 \vee x=1$$

<u>Fall $y=0$</u>: $(*) \iff 0 = 3x^2+2x = x(3x+2)$

$$\iff x=0 \vee \underbrace{3x+2=0}_{\iff x=-2/3}$$

$\Rightarrow$ zwei stat. Pkte: $\bar{a}_1 = \underline{(0,0)}$, $\bar{a}_2 = \underline{(-2/3, 0)}$

<u>Fall $x=1$</u>: $(*) \iff 3+2-y^2=0 \iff y^2=5$
$$\iff y = \pm\sqrt{5}$$

$\Rightarrow$ zwei stat. Pkte: $\bar{a}_3 = \underline{(1,\sqrt{5})}$, $\bar{a}_4 = \underline{(1,-\sqrt{5})}$

II) $$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 6x+2 & -2y \\ -2y & 2-2x \end{bmatrix}$$

$\bar{a}_1$: $H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ Diagonal Matr. mit pos. Diag.eintr.

$\Rightarrow q_{H_f(0,0)}$ pos. def.

$\Rightarrow$ lok. Min. bei $\bar{a}_1 = (0,0)$

$\bar{a}_2$: $H_f(-2/3, 0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 10/3 \end{bmatrix} \leftarrow \det = -\frac{20}{3} < 0$

$\Rightarrow q_{H_f(-2/3,0)}$ indef.

$\Rightarrow$ Sattelpkt bei $\bar{a}_2 = (-2/3, 0)$

$\bar{a}_3, \bar{a}_4$: $H_f(1, \pm\sqrt{5}) = \begin{bmatrix} 8 & \mp 2\sqrt{5} \\ \mp 2\sqrt{5} & 0 \end{bmatrix} \leftarrow \det = 0 - 4 \cdot 5 = -20 < 0$

$\Rightarrow q_{H_f(\bar{a}_{3/4})}$ indef.

$\Rightarrow$ Sattelpkte bei $\bar{a}_3$ und $\bar{a}_4$

9.6 Definitheits-Krit. für 2×2-Matrizen

Sei $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Dann gilt:

q_A pos. def. $\iff$ $\det A > 0$ und $a > 0$

q_A neg. def. $\iff$ $\det A > 0$ und $a < 0$

q_A indef. $\iff$ $\det A < 0$

9.8 Hinreich. Beding. für lok. Extremum

Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ C^2-Funktion,
$\bar{a} \in D$ mit $\operatorname{grad} f(\bar{a}) = \bar{0}$, und
q_H quadr. Form zu $H := H_f(\bar{a})$

Dann gilt:

q_H pos. def. (neg. def.) $\Rightarrow$ f hat bei $\bar{a}$ ein lok. Minimum (lok. Max.)

q_H indef $\Rightarrow$ f hat bei $\bar{a}$ einen Sattelpkt.

Rezept zum Auffinden von lok. Extrema bzw Sattelpkten einer C^2-Fkt. $f : D \to \mathbb{R}$.

I) Bestimme alle stationären Pkte von f, d.h. alle $\bar{a} \in D$ mit $\operatorname{grad} f(\bar{a}) = \bar{0}$.

II) a) Bestimme $H_f(\bar{x})$
b) Für jeden stat. Pkt. $\bar{a}$ untersuche $H_f(\bar{a})$ auf Definitheit der zugeh. quad Form und benutze dann 9.8.

Was ist wichtig in Analysis 2 ?

I) Integralrechnung

§1 : 1.8 Rechenregeln
1.10 MWS

§2 : Hauptsatz, Integ. berechn.: alles
(außer Partialbruchzerl.)

§3 : 3.1, 3.2 (3.3, 3.4 nicht)

§4 ?

II) Grenzwert, Stetigkeit, offen/abg., Diffbarkeit

§5 : alles (außer "metr. Raum")

§6 : 6.1, 6.2, 6.3, 6.5,4) (Rest nicht)

§7 : 7.1, 7.2 part. Ableit: Def. und Berechn.
7.4 Totale Diffbarkeit, Lin. Approximation
7.5 Zusammenhang mit part. Ableit.
7.6 Diff.barkeits-Krit. } 7.8
7.7 C^1-Fkt $\Rightarrow$ Diffbarkeit

§8 : Der Gradient: Def und Berechn.
8.3 Zusammenhang mit Richtungsableit.
8.5 Tangentialraum an Niveaumengen

§9 : Lokale Extrema
9.1 Notwend. Beding: stationärer Pkt.
9.4 Hesse-Matrix
9.6 Pos./Neg./Indefinitheit $(n=2)$
9.8 Hinreich. Beding.

Fortsetzung von §7

Differenzierbarkeit von Abbildungen

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad m \geq 1$$

Erinn: $L = (L_1, \dots, L_m) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ linear

$:\Longleftrightarrow \forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R} : L(\bar{x}+\bar{y}) = L(\bar{x}) + L(\bar{y}), L(\alpha \bar{x}) = \alpha L(\bar{x})$

$\Longleftrightarrow \forall i = 1, \dots, m : L_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ linear

$$\mathrm{Mat}(L) = \begin{bmatrix} \mathrm{Mat}(L_1) \\ \vdots \\ \mathrm{Mat}(L_m) \end{bmatrix} \quad \text{Matrix von } L$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$L(\bar{x}) = \left(\sum_{i=1}^{n} c_{1i} x_i, \ \dots, \ \sum_{i=1}^{n} c_{mi} x_i \right)$$

7.9 Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen

$$f = (f_1, \dots, f_m) : D \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad m \geq 1$$

Def: f diffbar bei $\bar{a} \in D :\Longleftrightarrow \exists L_{\bar{a}} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ linear:

$$\lim_{\bar{h} \to \bar{0}} \frac{1}{\|\bar{h}\|} \left(f(\bar{a}+\bar{h}) - f(\bar{a}) - L_{\bar{a}}(\bar{h}) \right) = \bar{0} \qquad (*)$$

$L_{\bar{a}} = df_{\bar{a}}$ heißt Ableitung von f bei $\bar{a}$

f diffbar $:\Longleftrightarrow \forall \bar{a} \in D : f$ diffbar bei $\bar{a}$

Satz: f diffbar (bei $\bar{a}$) $\Longleftrightarrow \forall i = 1, \dots, m : f_i$ diffbar (bei $\bar{a}$)

Bew: $\lim\limits_{\bar{h} \to \bar{0}} \frac{1}{\|\bar{h}\|} \left(f(\bar{a}+\bar{h}) - f(\bar{a}) - L_{\bar{a}}(\bar{h}) \right) =$

$$\underset{5.8}{=} \left(\lim_{\bar{h} \to \bar{0}} \frac{1}{\|\bar{h}\|} \left(f_i(\bar{a}+\bar{h}) - f_i(\bar{a}) - L_{\bar{a}i}(\bar{h}) \right) \Big| \ i = 1, \dots, m \right)$$

$L_{\bar{a}} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ linear $\Longleftrightarrow$ alle $L_{\bar{a}i} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ linear

✓

Bem: $(*) \Longleftrightarrow f(\bar{a}+\bar{h}) = f(\bar{a}) + L_{\bar{a}}(\bar{h}) + \varphi(\bar{h})$,

wobei $\frac{\varphi(\bar{h})}{\|\bar{h}\|} \xrightarrow[\bar{h} \to \bar{0}]{} \bar{0}$

Folg: Sei f diffbar bei $\bar a \in D$. Dann gilt:

1) f ist stetig in $\bar a$.

2) Alle f_i sind bei $\bar a$ part. diffbar und

$$Mat(L_{\bar a}) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar a)\right] \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$=: J_f(\bar a)$$ Jacobi-Matrix von f bei $\bar a$

⌐ bei $\bar a$: alle f_i diffbar $\xRightarrow[7.5]{}$ alle f_i stetig $\xRightarrow[5.8]{}$ f stetig

$$\forall i: \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\bar a), \dots, \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\bar a)\right] = Mat(L_{\bar a i}) = i\text{-te Zeile v. } Mat(L_{\bar a})$$ //

7.10 Def: Sei $f = (f_1, \dots, f_m): D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen

f C^1-Abb. $:\Leftrightarrow$ alle $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ existieren und sind stetig

Satz: f C^1-Abb. $\Rightarrow$ f diffbar

$$\begin{tikzcd}
f\ C^1\text{-Abb.} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Leftrightarrow] & f \text{ diffbar} \arrow[d, Leftrightarrow, "7.9\ \text{Satz}"] \\
\text{alle } f_i \text{ sind } C^1\text{Abb.} \arrow[r, Rightarrow, "7.7"'] & \text{alle } f_i \text{ diff.bar}
\end{tikzcd}$$ //

Beisp: $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ "Polarkoord.abb."

$$f(r,\varphi) = (\underbrace{r\cos\varphi}_{f_1}, \underbrace{r\sin\varphi}_{f_2})$$

$$J_f(r,\varphi) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r} & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r} & \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{bmatrix}$$

alle Einträge stetig

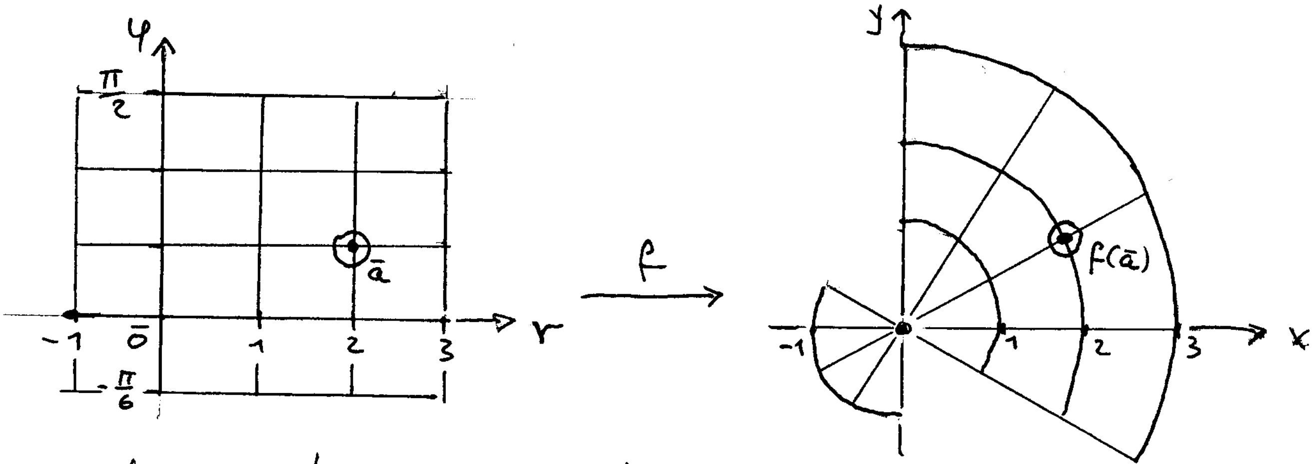
$\Rightarrow f$ C^1-Abb., d.h. diffbar

$\underline{\bar{a} = (2, \frac{\pi}{6})}$: $f(\bar{a}) = (2\cos\frac{\pi}{6}, 2\sin\frac{\pi}{6})$

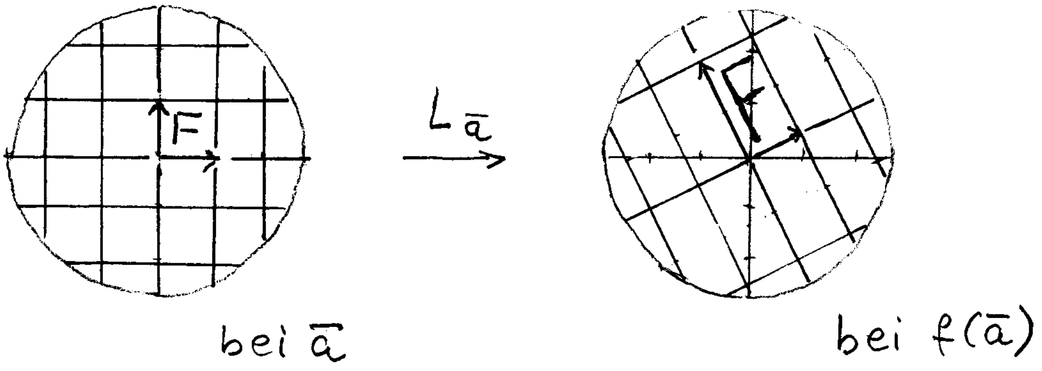
$= (2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, 2 \cdot \frac{1}{2}) = \underline{(\sqrt{3}, 1)}$

$$J_f(\bar{a}) = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1 \\ 1/2 & \sqrt{3} \end{bmatrix} = \mathrm{Mat}(L_{\bar{a}})$$

Wo kann man $L_{\bar{a}}$ sehen?



Blick durchs Mikroskop:



7.11 Satz (Kettenregel) Seien $D \subset \mathbb{R}^n$, $E \subset \mathbb{R}^m$ offen,
$f: D \to E$ diffbar bei $\bar a \in D$ mit Ableit. L und
$g: E \to \mathbb{R}^l$ " " $f(\bar a) \in E$ " " K

Dann ist $g \circ f$ diffbar bei $\bar a$ mit Ableit $K \circ L$, d.h.

$$J_{g\circ f}(\bar a) = J_g(f(\bar a)) \cdot J_f(\bar a) \qquad \text{(Mat.-Mult.)}$$

Bew: $f(\bar a + \bar h) = f(\bar a) + L(\bar h) + \varphi(\bar h) \qquad (*)$

$\bar b := f(\bar a)$, $g(\bar b + \bar k) = g(\bar b) + K(\bar k) + \psi(\bar k) \qquad (**)$

wobei $\mathbb{R}^n \xrightarrow{L} \mathbb{R}^m \xrightarrow{K} \mathbb{R}^l$ linear, $\frac{\varphi(\bar h)}{\|\bar h\|} \xrightarrow[\bar h \to \bar 0]{} \bar 0$, $\frac{\psi(\bar k)}{\|\bar k\|} \xrightarrow[\bar k \to \bar 0]{} \bar 0$

$$g(f(\bar a + \bar h)) \underset{(*)}{=} g(\underset{\bar b}{\overset{\|}{f(\bar a)}} + \underbrace{L(\bar h) + \varphi(\bar h)}_{=: \bar k(\bar h) \xrightarrow[\bar h \to \bar 0]{} \bar 0})$$

$$\underset{(**)}{=} g(f(\bar a)) + K(L(\bar h)) + \underbrace{K(\varphi(\bar h)) + \psi(\bar k(\bar h))}_{=: \sigma(\bar h)}$$

zu zeigen: $\frac{\sigma(\bar h)}{\|\bar h\|} \xrightarrow[\bar h \to \bar 0]{} \bar 0$

$$\begin{array}{cccccccc}
\frac{\sigma(\bar h)}{\|\bar h\|} & = & K\left(\frac{\varphi(\bar h)}{\|\bar h\|}\right) & + & \underbrace{\frac{\|L(\bar h) + \varphi(\bar h)\|}{\|\bar h\|}}_{\|\underbrace{L(\frac{\bar h}{\|\bar h\|})}_{\text{beschr.}} + \frac{\varphi(\bar h)}{\|\bar h\|}\|} & \cdot & \frac{\psi(\bar k(\bar h))}{\|\bar k(\bar h)\|} & \bar h \\
 & & \downarrow & & \qquad\qquad\quad \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
 & & K(\bar 0) & & \underbrace{\textcircled{!} \qquad\qquad \bar 0} & & & \\
 & & \overset{\|}{\bar 0} & + & \text{beschränkt} & \cdot & \bar 0 & \bar 0
\end{array}$$

zu $\textcircled{!}$: $\left.\begin{array}{r} \frac{\bar h}{\|\bar h\|} \in S := \{\bar x \in \mathbb{R}^n \mid \|\bar x\| = 1\} \text{ kompakt} \\ \|L(?)\| \text{ stetig} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \exists c > 0 \ \forall \bar x \in S: \\ \|L(\bar x)\| \leq c \end{array}$

✓

Folg 8.1: $\underset{\overset{\cup}{a}}{\overset{\overset{\mathbb{R}}{\cup}}{I}} \xrightarrow[\text{diffb.}]{\gamma} \overset{\overset{\mathbb{R}^n}{\cup}}{D} \xrightarrow[\text{diffb.}]{f} \mathbb{R}$

$\Rightarrow f \circ \gamma$ diffbar mit $(f \circ \gamma)'(a) = \langle \operatorname{grad} f(\gamma(a)), \gamma'(a) \rangle$

$\ulcorner$ $(f \circ \gamma)'(a) \underset{7.11}{=} J_f(\gamma(a)) \cdot J_\gamma(a) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma(a)), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\gamma(a))\right] \cdot \begin{bmatrix} \gamma_1'(a) \\ \vdots \\ \gamma_n'(a) \end{bmatrix}$ //

7.12 Beisp

1)
$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3 & \mathbb{R}^2 \arrow[l, "g"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[l, "f"'] \\ & (y_1, y_2) & (x_1, x_2, x_3) \end{tikzcd}$$

$$J_g = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \frac{\partial g_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2}{\partial y_2} \\ \frac{\partial g_3}{\partial y_1} & \frac{\partial g_3}{\partial y_2} \end{bmatrix} \qquad J_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial (g\circ f)_2}{\partial x_1} = (2.\text{ Zeile v. } J_g)\cdot(1.\text{ Spalte v. } J_f)$$
$$= \frac{\partial g_2}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial y_2}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x_1}$$

Allgem:
$$\boxed{\frac{\partial (g\circ f)_i}{\partial x_k}(\bar{a}) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_j}(f(\bar{a}))\,\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(\bar{a})}$$

2) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$f(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$

$g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$g(u,v) = (u^2+v^2, u^2-v^2, uv)$

Gesucht: $J_{g\circ f}(\bar{a}) = ?$ für $\bar{a} = (2, \frac{\pi}{6})$

7.11: $J_{g\circ f}(\bar{a}) = J_g(f(\bar{a}))\cdot J_f(\bar{a})$

$$J_f(r,\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{bmatrix} \Longrightarrow J_f(\bar{a}) = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1 \\ 1/2 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$J_g(u,v) = \begin{bmatrix} 2u & 2v \\ 2u & -2v \\ v & u \end{bmatrix}, \; f(\bar{a}) = (\sqrt{3}, 1) \Rightarrow J_g(f(\bar{a})) = \begin{bmatrix} 2\sqrt{3} & 2 \\ 2\sqrt{3} & -2 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow J_{g\circ f}(\bar{a}) = \begin{bmatrix} 2\sqrt{3} & 2 \\ 2\sqrt{3} & -2 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1 \\ 1/2 & \sqrt{3} \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -4\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2 \end{bmatrix}}$$