**Def**: sei $D \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge. **Übung 28.8.23**

$D$ **offen** $:\Longleftrightarrow \forall x \in D\ \exists \varepsilon > 0 : \underbrace{\mathcal{U}_\varepsilon(x) := ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[}_{\varepsilon\text{-Umgeb. von } x} \overset{!}{\subset} D$

$D$ **abgeschlossen** $:\Longleftrightarrow \mathbb{R} \setminus D$ ist offen

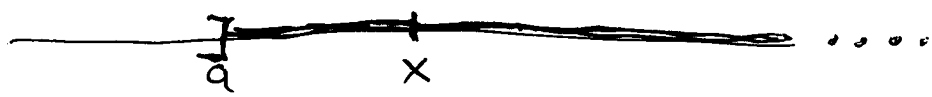
$D$ **beschränkt** $:\Longleftrightarrow \exists K > 0 : D \subset [-K, K]$

**Beisp 1**

sei $a \in \mathbb{R}$, $D = \mathbb{R}_{>a} = ]a, \infty[$

**Beh**: $\mathbb{R}_{>a}$ ist offen, nicht abgeschl. und nicht beschr.

**Bew.** $\mathbb{R}_{>a}$



**offen**: Sei $x \in \mathbb{R}_{>a}$. Gesucht $\varepsilon > 0$ mit $\mathcal{U}_\varepsilon(x) \subset \mathbb{R}_{>a}$

Setze $\varepsilon := x - a > 0$

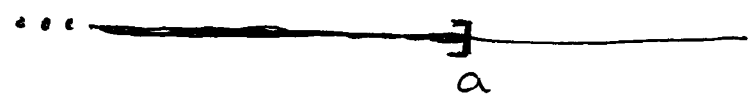
$\Rightarrow \forall y \in \mathcal{U}_\varepsilon(x) : \underline{y >} x - \varepsilon = x - (x-a) = \underline{a}$

d.h. $y \in \mathbb{R}_{>a}$

$\Longrightarrow \mathcal{U}_\varepsilon(x) \subset \mathbb{R}_{>a}$

**nicht abg**: zu zeigen: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_{>a}$ nicht offen.

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_{>a} = \mathbb{R}_{\leq a}$



zu zeigen: $\neg(\forall x \in \mathbb{R}_{\leq a}\ \exists \varepsilon > 0 : \mathcal{U}_\varepsilon(x) \subset \mathbb{R}_{\leq a})$

d.h. $\exists x \in \mathbb{R}_{\leq a}\ \forall \varepsilon > 0 : \mathcal{U}_\varepsilon(x) \not\subset \mathbb{R}_{\leq a}$

Für $x = a \in \mathbb{R}_{\leq a}$ gilt: $\forall \varepsilon > 0 : \mathcal{U}_\varepsilon(a) \not\subset \mathbb{R}_{\leq a}$

denn für $\varepsilon > 0$ ist $y := a + \varepsilon/2 \in \mathcal{U}_\varepsilon(a)$, aber $y \notin \mathbb{R}_{\leq a}$

**nicht beschr.**: zu zeigen: $\forall K > 0 : \mathbb{R}_{>a} \not\subset [-K, K]$

Sei $K > 0$.

**Fall $a \leq K$**: $\Longrightarrow K+1 \in \mathbb{R}_{>a}$, aber $K+1 \notin [-K, K]$

**Fall $a > K$**: $\Rightarrow a+1 \in \mathbb{R}_{>a}$, aber $a+1 \notin [-K, K]$

In jedem Fall gilt also: $\mathbb{R}_{>a} \not\subset [-K, K]$. ✓

## Aufg 1.1

1) Liste alle reellen Intervalle auf.
2) Welche sind offen, abgeschl. bzw beschr.
3) Zeichne Venn-Diagramm

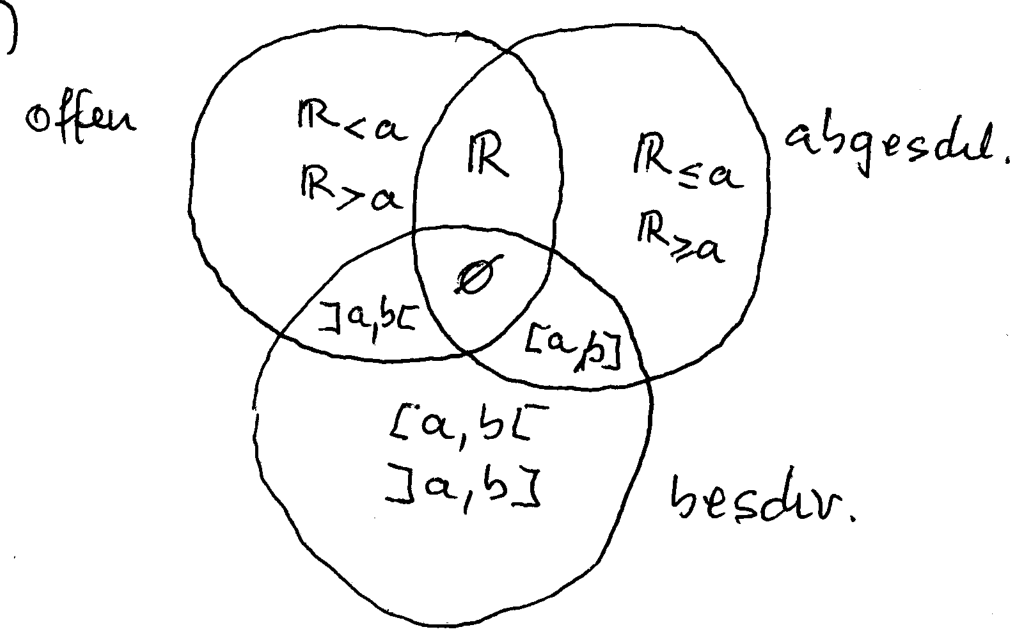
## Lösung

1), 2)

| | Intervall | offen | abg. | beschr. | |
|---|---|---|---|---|---|
| für $a \le b$ | $[a,b]$ | – | ✓ | ✓ | |
| für $a<b$ | $[a,b[$ | – | – | ✓ | |
| für $a<b$ | $]a,b]$ | – | – | ✓ | |
| für $a<b$ | $]a,b[$ | ✓ | – | ✓ | |
| | $\emptyset = ]a,a[$ | ✓ | ✓ | ✓ | |
| | $\mathbb{R}_{\geq a} = [a,\infty[$ | – | ✓ | – | |
| | $\mathbb{R}_{\leq a} = ]-\infty,a]$ | – | ✓ | – | (Beisp 1) |
| | $\mathbb{R}_{>a} = ]a,\infty[$ | ✓ | – | – | (Beisp 1) |
| | $\mathbb{R}_{<a} = ]-\infty,a[$ | ✓ | – | – | |
| | $\mathbb{R} = ]-\infty,\infty[$ | ✓ | ✓ | – | |

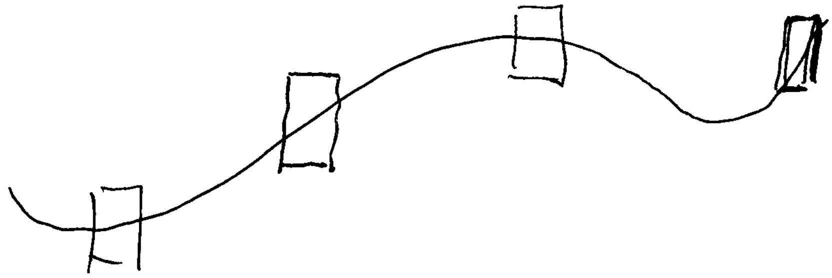
MERKE: $\forall x \in \emptyset : p(x)$ ist stets wahr! (wobei $p(x)$ beliebige Aussageform)

3)



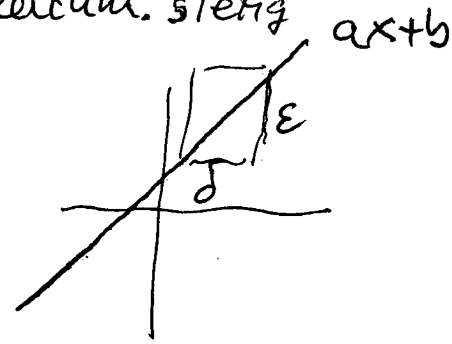
Erinn: $f: D \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig $:\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, y \in D : (|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$$



Beisp: Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

Beh: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ ist gleichm. stetig




Bew: Sei $\varepsilon > 0$.

Wähle $\delta := \dfrac{\varepsilon}{|a|} > 0$

Dann gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|x-y| < \delta$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |(ax+b) - (ay+b)| \\ &= |ax + b - ay - b| = |ax - ay| \\ &= |a(x-y)| = |a| \cdot |x-y| \\ &< |a| \delta = |a| \cdot \frac{\varepsilon}{|a|} = \varepsilon \end{aligned}$$

Also: $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ ✓

Aufg 1.2 Zeige!

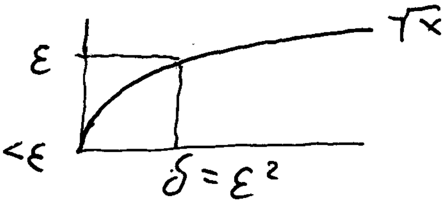
1) $f: [0,\infty[ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ ist gleichm. stetig.

2) $g: ]0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x}$ ist nicht gleichm. stetig.

Lösung

1) zu zeigen: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x,y \geq 0: (|x-y| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{y}| < \varepsilon)$

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta := \varepsilon^2$




Seien $x,y \geq 0$ mit $|x-y| < \delta$. Zu zeigen: $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| < \varepsilon$

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = |\sqrt{x}| - |\sqrt{y}| = \sqrt{x} - \sqrt{y}, \text{ falls } x \geq y$$

$$\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} < \frac{\delta}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\,?$$

1. Versuch

Neuer Ansatz

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \underset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} |\sqrt{x}| + |-\sqrt{y}| = \sqrt{x} + \sqrt{y} = |\sqrt{x} + \sqrt{y}|, \text{ da } \sqrt{x}, \sqrt{y} \geq 0.$$

$$\underset{\cdot|\sqrt{x}-\sqrt{y}|}{\Longrightarrow} |\sqrt{x} - \sqrt{y}|^2 \leq |\sqrt{x} + \sqrt{y}|\,|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = |(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})|$$

$$= |(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2| = |x-y| < \delta = \varepsilon^2$$

$$\underset{\sqrt{\ }}{\Longrightarrow} |\sqrt{x} - \sqrt{y}| < \varepsilon$$

2) zu zeigen: $\neg(\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x,y \in ]0,1]: (|x-y| < \delta \Rightarrow |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| < \varepsilon))$

d.h. $\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x,y \in ]0,1]: |x-y| < \delta \wedge |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| \geq \varepsilon$

(Erinn: $\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$)

zeigen: Für $\varepsilon = 1$ gilt

$$\forall \delta > 0\ \exists x,y \in ]0,1]: |x-y| < \delta \wedge |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| \geq 1$$

Für $0 < \delta \leq 1$. Wähle $x := \delta$ und $y := \frac{\delta}{2}$

$\Rightarrow |x-y| = |\delta - \frac{\delta}{2}| = \frac{\delta}{2} < \delta$

und $|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| = |\frac{1}{\delta} - \frac{2}{\delta}| = |-\frac{1}{\delta}| = \frac{1}{\delta} \overset{\delta \leq 1}{\geq} 1$

Für $\delta > 1$, Wähle $x := 1$ und $y := 1/2$

$\Rightarrow |x-y| = |1 - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2} < 1 < \delta$

und $|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| = |\frac{1}{1} - \frac{2}{1}| = |-1| = 1 \geq 1$ ✓

## Aufg 1.3 Lösung

1) Sei $A \subset \mathbb{R}$ und $s \in \mathbb{R}$

$s = \sup A :\Longleftrightarrow$ s ist die kleinste obere Schranke von A

$s = \inf A :\Longleftrightarrow$ s " " größte untere Schranke von A

2) Das Vollständigkeitsaxiom lautet:
Jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat ein Supremum (in $\mathbb{R}$).

3) Beh: Für $A \subset \mathbb{R}$ und $s \in \mathbb{R}$ gilt:

$$s = \sup A \Longleftrightarrow \begin{cases} s \text{ ist obere Schranke von } A \\ \forall t < s \ \exists a \in A : t < a \end{cases}$$

Bew: Erinn: s ist obere Schranke von A (Notation $A \leq s$)
$\Longleftrightarrow \forall a \in A : a \leq s$

Nun gilt:

$s = \sup A \Longleftrightarrow$ s ist kleinste obere Schranke von A

$\Longleftrightarrow A \leq s \wedge \forall t < s : \underbrace{A \not\leq t}$

$\Longleftrightarrow A \leq s \wedge \forall t < s : \neg(\forall a \in A : a \leq t)$

$\Longleftrightarrow A \leq s \wedge \forall t < s \ \exists a \in A : a > t$ ✓

4) Beh: Für $A \subset \mathbb{R}$ beschr. und $\emptyset \neq B \subset A$ gilt:

$\inf A \leq \inf B$ und $\sup B \leq \sup A$

Bew:

$\emptyset \neq A, B$ beschr. $\underset{\text{VOLL}}{\Longrightarrow}$ A, B haben Sup und Inf.

$\inf A \leq A \underset{B \subset A}{\Longrightarrow} \inf A \leq B \Longrightarrow \inf A \leq \inf B$
inf B größte untere Schr. von B

$A \leq \sup A \underset{B \subset A}{\Longrightarrow} B \leq \sup A \Longrightarrow \sup B \leq \sup A$
sup B kleinste obere Schr. von B

✓

<u>Erinn</u>: Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschränkt <u>Übung 11.9.23</u>

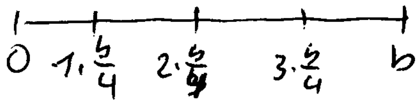
$$Z=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\} \text{ Zerleg. von } [a,b]$$

$$O_Z(f):=\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\sup f([x_{i-1},x_i])}_{=M_i}\cdot(x_i-x_{i-1}) \quad \underline{\text{Obersumme}}$$

<u>Aufg 2.1</u>: Sei $b>0$, $\exp:[0,b]\longrightarrow\mathbb{R}$

$Z_n:=\{x_i:=i\frac{b}{n} \mid i=0,1,..,n\}$ äquidist. Zerleg. von $[0,b]$

z.B. $n=4$

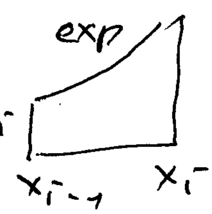



1) Berechne $O_{Z_8}(\exp)$ für $b=1$.

2) Bestimme für $b>0$ belieb. den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} O_{Z_n}(\exp)$

<u>Lösung</u>

exp ist monoton steigend.




$$\Rightarrow \forall i=1,\dots,n: \sup\exp([x_{i-1},x_i])=\exp(x_i)=e^{x_i}$$

$$\Rightarrow O_{Z_n}(\exp)=\sum_{i=1}^{n}e^{x_i}\underbrace{(x_i-x_{i-1})}_{b/n}=\sum_{i=1}^{n}e^{i\frac{b}{n}}\cdot\frac{b}{n}$$

$$=\frac{b}{n}\sum_{i=1}^{n}(e^{b/n})^i \underset{\text{Ind.Tran.}}{=} \frac{b}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\underbrace{(e^{\frac{b}{n}})^{i+1}}_{(e^{b/n})^i\cdot e^{b/n}}$$

$$=\frac{b}{n}\cdot e^{b/n}\cdot\sum_{i=0}^{n-1}(e^{b/n})^i \underset{\substack{\text{geom. Summe}\\ \text{(Ana 1, 1.7,2))}}}{=} \frac{b}{n}e^{b/n}\cdot\frac{1-e^{\frac{b}{n}\cdot n}}{1-e^{\frac{b}{n}}}$$

$$=\frac{b}{n}e^{b/n}\frac{e^b-1}{e^{b/n}-1} \quad (*)$$

1) $b=1, n=8$: $O_{Z_8}(\exp)\underset{(*)}{=}\frac{1}{8}\cdot e^{1/8}\frac{e-1}{e^{1/8}-1}\approx \underline{1{,}83}$

2) $O_{Z_n}(\exp)\underset{(*)}{=}(e^b-1)\cdot e^{b/n}\cdot\frac{b/n}{e^{b/n}-1}$

$$\lim_{n\to\infty}e^{b/n} \underset{\text{exp stetig in } p=0}{=} e^0=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{b/n}-1}{b/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{b/n}-e^0}{b/n} \underset{\text{exp diffbar. in } p=0}{=} \exp'(0)=e^0=1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{b/n}{e^{b/n}-1}=\frac{1}{1}=1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}O_{Z_n}(\exp)=(e^b-1)\cdot1\cdot1=\underline{e^b-1} \quad \checkmark$$

## Geometrische Summe

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

## Ableitung

$$f'(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}$$

$\Longleftrightarrow$ Für jede Folge $(x_n)_n$ mit $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(p+x_n) - f(p)}{x_n} = f'(p)$$

Insbes. für $p = 0$

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

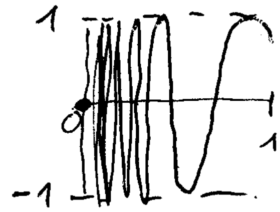
$\Longleftrightarrow$ Für jede Nullfolge $(x_n)_n$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(0)}{x_n} = f'(0)$$

Erinn 1.4: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrierbar $\iff$

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \text{ Zerleg } Z \text{ von } [a,b]: O_Z(f)-U_Z(f)<\varepsilon$$

Aufg 2.2: Sei $f:[0,1]\to\mathbb{R}$



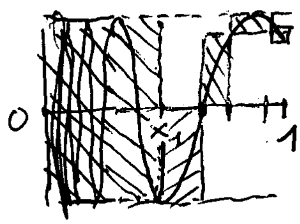

$$f(x)=\begin{cases}\sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x\neq 0\\ 0 & \text{'' } x=0\end{cases}$$

Zeige: $f$ ist integrierbar

Lösung

Sei $\varepsilon>0$.

Gesucht: Zerleg $Z$ von $[0,1]$ mit $O_Z(f)-U_Z(f)<\varepsilon$




Idee: Setze $Z$ zusammen aus

$\{x_0=0, x_1\}$, sodass $(M_1-m_1)(x_1-x_0)\leq \varepsilon/2$,

und Zerleg $Z'$ von $[x_1,1]$ mit $O_{Z'}-U_{Z'}<\varepsilon/2$

Probiere $x_1:=\varepsilon/4$

$f_1: f|_{[x_1,1]}$ ist stetig, also integrierbar (VL)

$\Rightarrow \exists$ Zerleg $Z'$ von $[x_1,1]$: $O_{Z'}(f_1)-U_{Z'}(f_1)<\varepsilon/2$

Nun betrachte $Z:=\{0\}\cup Z'$

$\Rightarrow \underbrace{\sup f([0,x_1])}_{=M_1}=1$ und $\underbrace{\inf f([0,x_1])}_{=m_1}=-1$

$$\Rightarrow O_Z(f)-U_Z(f)=\underbrace{(M_1-m_1)}_{1-(-1)=2}\underbrace{(x_1-x_0)}_{x_1}+O_{Z'}(f_1)-U_{Z'}(f_1)$$

$$=\underbrace{2x_1}_{2\cdot\varepsilon/4=\varepsilon/2}+\underbrace{O_{Z'}(f_1)-U_{Z'}(f_1)}_{<\varepsilon/2}$$

$$<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon \quad ✓$$

sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ mon. steig., d.h. $f(x) \le f(y)$ für $x \le y$

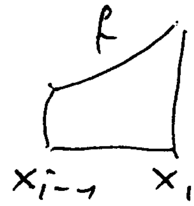
$$Z_n := \{ x_i = a + i \frac{b-a}{n} \mid i = 0, 1, \dots, n \}$$

Zeige:

1) $O_{Z_n}(f) - U_{Z_n}(f) = \frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{n}$

2) $f$ ist integrierbar.

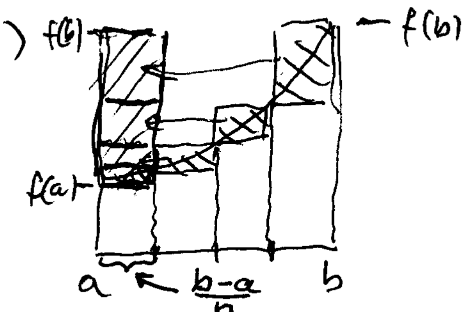
Lösung




1) $f$ mon. steigend.

$$\Rightarrow \forall i = 1, \dots, n: \begin{cases} m_i := \inf f([x_{i-1}, x_i]) = f(x_{i-1}) \\ M_i := \sup f([x_{i-1}, x_i]) = f(x_i) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow O_{Z_n}(f) - U_{Z_n}(f) &= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) \cdot \frac{b-a}{n} \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) \\ &= \frac{b-a}{n} \Big( \sum_{i=1}^{n} f(x_i) - \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})}_{\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)} \Big) \\ &= \frac{b-a}{n} ( f(x_n) - f(x_0) ) \\ &= \frac{b-a}{n} ( f(b) - f(a) ) \end{aligned}$$




2) Sei $\varepsilon > 0$

$(\frac{1}{n})_n$ 0-Folge $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}: \frac{b-a}{n}(f(b)-f(a)) < \varepsilon$

$$\Rightarrow O_{Z_n}(f) - U_{Z_n}(f) \underset{1)}{=} \frac{b-a}{n}(f(b)-f(a)) < \varepsilon$$

$\underset{1.4}{\Longrightarrow}$ $f$ ist integrierbar.

✓

Erinn 1.7: Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig

$$Z_n := \{x_i = a + i\frac{b-a}{n} \mid i = 0, 1, \dots, n\}$$

$$S_n(f) := \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \qquad \text{Riemann-Summe}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n(f) = \int_a^b f$$

Aufg 3.1

Berechne $\int_0^b x^3 dx$ mit 1.7 (Riemann-Summe)

Lösung

$f: [0,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$

$$x_i = 0 + i\frac{b-0}{n} = i\frac{b}{n}$$

$$\Rightarrow S_n(x^3) = \sum_{i=1}^{n} \left(i\frac{b}{n}\right)^3 \frac{b}{n} = \sum_{i=1}^{n} i^3 \frac{b^3}{n^3}\cdot\frac{b}{n}$$

$$= \frac{b^4}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{b^4}{n^4}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \quad \text{(siehe unten)}$$

$$= \frac{b^4}{n^4}\,\frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{b^4}{4}\,\frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{b^4}{4}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2$$

$$= \frac{b^4}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{b^4}{4}(1+0)^2 = \frac{b^4}{4}$$

$$\Rightarrow \int_0^b x^3 dx \underset{1.7}{=} \lim_{n\to\infty} S_n(x^3) = \underline{\underline{\frac{b^4}{4}}}$$

✓

—

MERKE: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

↑ aus Formelsammlung.
Bew. mit Vollst. Induktion

(Mehr zu Potenzsummen siehe H.K. Strick, Mathematik ist schön, Paragraph 16)

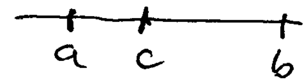
**Aufg 3.2** Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f \geq 0$.

Zeige: $\int_a^b f = 0 \implies f = 0$

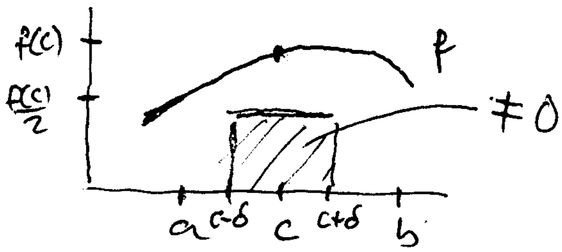
**Lösung**

zeigen Kontrapos.⊛: $f \neq 0 \implies \int_a^b f \neq 0$

$f \neq 0,\ f \geq 0 \implies \exists c \in [a,b]:\ f(c) > 0$

Betrachte den Fall $c \in\, ]a,b[$, d.h. 

**Idee**




$$f \text{ stetig in } c \underset{\varepsilon\text{-}\delta\text{-Krit für } \varepsilon = \frac{f(c)}{2}}{\Longrightarrow} \exists \delta > 0: \begin{cases} ]c-\delta, c+\delta[\ \subset\ ]a,b[ \\ \forall x \in\, ]c-\delta, c+\delta[:\ f(x) > \frac{f(c)}{2} \end{cases}$$

$$\implies \forall x \in [c-\delta, c+\delta]:\ f(x) \geq \frac{f(c)}{2} \quad (*)$$

Mit den Rechenregeln 1.8 folgt

$$\int_a^b f \underset{1.8,5)}{=} \underbrace{\int_a^{c-\delta} f}_{\geq 0} + \int_{c-\delta}^{c+\delta} f + \underbrace{\int_{c+\delta}^b f}_{\geq 0} \geq \int_{c-\delta}^{c+\delta} f \text{, da } f \geq 0 \text{ und } 1.8,2)$$

$$\underset{(*),1.8,2)}{\geq} \int_{c-\delta}^{c+\delta} \frac{f(c)}{2} \underset{1.8,1)}{=} \frac{f(c)}{2} \int_{c-\delta}^{c+\delta} 1 \underset{1.5,1)}{=} \frac{f(c)}{2} \underbrace{\left((c+\delta)-(c-\delta)\right)}_{2\delta}$$

$$= f(c) \cdot \delta > 0$$

Also: $\int_a^b f > 0$, insbes. $\neq 0$ ✓

Zusatzaufg.: Löse Aufg 3.2 mit dem Hauptsatz 2.2 (VL)

---

⊛ **MERKE**: $p \Rightarrow q$ hat die Kontraposition $\neg q \Rightarrow \neg p$.

Es gilt: $(p \Rightarrow q) \iff (\neg q \Rightarrow \neg p)$

zu Aufg 3.2: Alternative Lösung Übung 25.9.23

Erinn: 2.1 $F: I \to \mathbb{R}$ Stammfkt von $f: I \to \mathbb{R} :\Leftrightarrow F' = f$

2.2 Hauptsatz

sei $f: I \to \mathbb{R}$ stetig und $a, b \in I$. Dann gilt:

1) $F_a: I \to \mathbb{R}$, $F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ ist Stammfkt. von $f$

2) $F$ Stammfkt von $f \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$

Aufg 3.2: Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f \geq 0$.

Zeige: $\int_a^b f = 0 \Rightarrow f = 0$

Lösung 2

$f$ stetig $\underset{HS\,1)}{\Rightarrow}$ $f$ hat Stammfkt $F: [a,b] \to \mathbb{R}$

$F' = f \geq 0 \underset{\text{Aua } 1}{\Rightarrow} F$ ist monoton steig., d.h.

Vorauss

$F(a) \leq F(x) \leq F(b)$ für alle $x \in [a,b]$

$0 = \int_a^b f \underset{HS\,2)}{=} F(b) - F(a) \Rightarrow F(a) = F(b)$

$\Rightarrow \forall x \in [a,b]: F(x) = F(a)$, d.h. $F$ ist konstant

$\Rightarrow f = F' = 0$ ✓

Erinn 1.10 (MWS): $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow \exists c \in [a,b]: \int_a^b f = f(c)(b-a)$.

**Aufg 3.3.** Sei $f:[1,4] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = -x^2 + 6x - 5$$

Finde alle $c \in [1,4]$ mit $\int_1^4 f(x)\,dx = f(c)(4-1)$

**Lösung**

$f(x)$ hat Stammfkt $F(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{6}{2}x^2 - 5x$

$$\int_1^4 f(x)\,dx = F(4) - F(1)$$

$$= \left(-\frac{4^3}{3} + 3\cdot 4^2 - 5\cdot 4\right) - \left(-\frac{1}{3} + 3 - 5\right)$$

$$= -\frac{64}{3} + 48 - 20 + \frac{1}{3} + 2 = 30 - 21 = \underline{9}$$

$$f(c)(4-1) = 9 \Leftrightarrow (-c^2 + 6c - 5)\,3 = 9$$

$$\Leftrightarrow -c^2 + 6c - 5 = 3$$

$$\Leftrightarrow -c^2 + 6c - 8 = 0$$

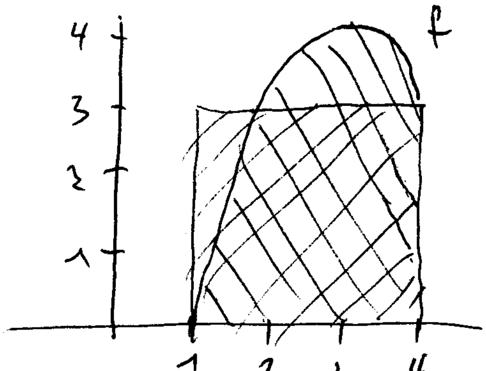
$$\Leftrightarrow c^2 - 6c + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow c = 3 \pm \sqrt{9-8}$$

$$= 3 \pm 1$$

$$\Leftrightarrow c \in \{2, 4\}$$

$\left( x^2 + px + q = 0 \Rightarrow x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \right.$ p-q-Formel $\left.\right)$



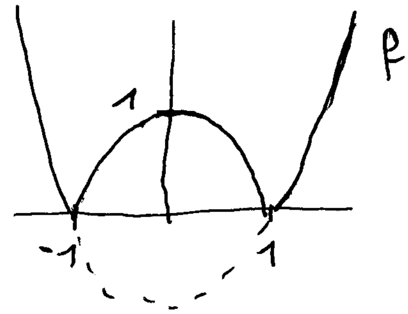

✓

## Aufg 4.1

Bestimme Stammfunktionen für folgende Funktionen.

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x^2 - 1|$

$$f(x) = |x^2-1| = \begin{cases} x^2-1, & x<-1 \\ 1-x^2, & -1 \leq x \leq 1 \\ x^2-1, & 1<x \end{cases}$$




Stammfunktionen

auf $\mathbb{R}_{\leq -1}$ $\quad F_1(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + c_1$

auf $[-1, 1]$ $\quad F_0(x) = x - \frac{1}{3}x^3$

auf $\mathbb{R}_{\geq 1}$ $\quad F_2(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + c_2$

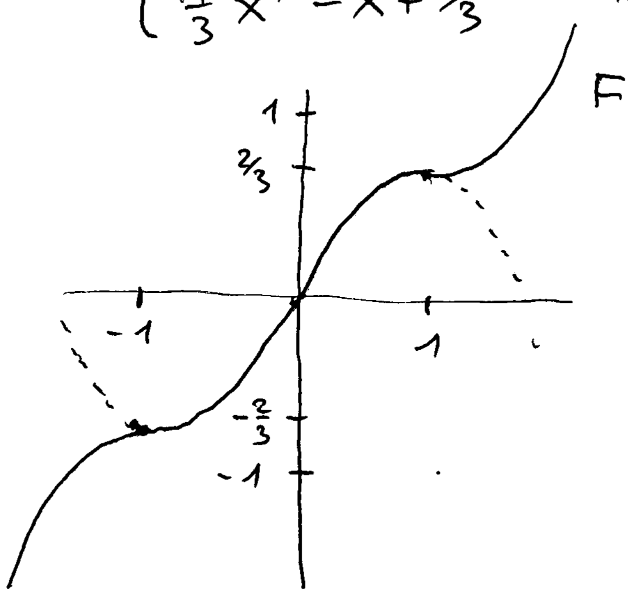
Bestimme $c_1, c_2$ so, dass $\begin{cases} F_1(-1) = F_0(-1) \\ F_2(1) = F_0(1) \end{cases}$

$$-\frac{2}{3} = F_0(-1) \stackrel{!}{=} F_1(-1) = -\frac{1}{3} + 1 + c_1 = \frac{2}{3} + c_1 \Rightarrow c_1 = -\frac{4}{3}$$

$$\frac{2}{3} = F_0(1) \stackrel{!}{=} F_2(1) = \frac{1}{3} - 1 + c_2 = -\frac{2}{3} + c_2 \Rightarrow c_2 = \frac{4}{3}$$

$\Rightarrow$ f hat folg. Stammfunktion

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - x - \frac{4}{3} & \text{für } x<-1 \\ x - \frac{1}{3}x^3 & \text{" } -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{4}{3} & \text{" } 1<x \end{cases}$$




✓

b) $g: \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ g(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$

$$g(x) = \frac{x}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \int g(x)\,dx = \int (x^{1/2} - x^{-1/2})\,dx$$
$$= \int x^{1/2}dx - \int x^{-1/2}dx$$
$$= \frac{1}{3/2}x^{3/2} - \frac{1}{1/2}x^{1/2}$$
$$= \frac{2}{3}x^{3/2} - 2x^{1/2}$$
$$= \underline{\frac{2}{3}x\sqrt{x} - 2\sqrt{x}}$$

c) $h: \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ h(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln x$

Erinn.: Partielle Integration
$$\int u'v = uv - \int uv'$$

$$\int \underset{u'}{\frac{1}{x}}\,\underset{v}{\ln x}\,dx \underset{\text{part. Int.}}{\overset{\uparrow}{=}} \underset{u}{\ln x} \cdot \underset{v}{\ln x} - \int \underset{u}{\ln x} \cdot \underset{v'}{\frac{1}{x}}\,dx$$

$$\Rightarrow 2\int \frac{1}{x}\ln x\,dx = (\ln x)^2$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{x}\ln x\,dx = \underline{\underline{\frac{1}{2}(\ln x)^2}}$$

Erinn

Übung 9.10.23

## 2.2 Hauptsatz

Für $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und $F$ Stammfkt von $f$ gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$$

## 2.7 Partielle Integration

$$\int f'g = fg - \int fg'$$

$$\int_a^b f'g = fg\Big|_a^b - \int_a^b fg'$$

## 2.9 Substitutionsregel

$$\int f(\underbrace{\varphi(x)}_{u})\underbrace{\varphi'(x)\,dx}_{du} = \int f(u)\,du\,\Big|_{u=\varphi(x)}$$

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,du$$

Spez. Fall Lineare Substitution: $F$ Stammfkt. v. $f$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha\neq 0$

$$\Rightarrow \int f(\alpha x+\beta)\,dx = \frac{1}{\alpha}F(\alpha x+\beta)$$

## Aufg 4.2

Berechne folgende Integrale

a) $\int_{-1}^{2}(5-x^2)\,dx = \left(5x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-1}^{2} = \left(10-\frac{8}{3}\right)-\left(-5+\frac{1}{3}\right)$

$= 10-\frac{8}{3}+5-\frac{1}{3} = 15-\frac{9}{3} = \underline{\underline{12}}$

b) $\int_{0}^{\pi}\sin(x)\,dx = -\cos(x)\Big|_{0}^{\pi} = -\cos(\pi)-(-\cos(0))$

$= -(-1)-(-1) = 1+1 = \underline{\underline{2}}$

c) $\int_{1}^{4}(3+x\sqrt{x})\,dx = \int_{1}^{4}3\,dx + \underbrace{\int_{1}^{4}x\sqrt{x}\,dx}_{\int_{1}^{4}x^{3/2}\,dx}$

$= 3x\Big|_{1}^{4} + \frac{2}{5}x^{5/2}\Big|_{1}^{4}$

$= (3\cdot 4-3) + \frac{2}{5}\cdot\underbrace{4^{5/2}}_{25} - \frac{2}{5}\cdot 1^{5/2}$

$= (12-3) + \frac{64}{5} - \frac{2}{5} = 9+\frac{62}{5} = 9+12+\frac{2}{5}$

$= \underline{\underline{21+\frac{2}{5}}} = \underline{21,4}$

d) $\int_{0}^{1}\underset{g}{(x^2+x)}\underset{f'}{e^{-x}}\,dx \underset{\text{part. Int.}}{=} (x^2+x)(-e^{-x})\Big|_{0}^{1} - \int_{0}^{1}\underset{u}{(2x+1)}\underset{v'}{(-e^{-x})}\,dx$

$= (x^2+x)(-e^{-x})\Big|_{0}^{1} - \left((2x+1)e^{-x}\Big|_{0}^{1} - \underbrace{\int_{0}^{1}2e^{-x}\,dx}_{-2e^{-x}\big|_{0}^{1}}\right)$

$= (\underbrace{x^2+x+2x+1+2}_{x^2+3x+3})(-e^{-x})\Big|_{0}^{1}$

$= -(x^2+3x+3)e^{-x}\Big|_{0}^{1}$

$= -(7)\underbrace{e^{-1}}_{1/e} + 3\underbrace{e^{-0}}_{1} = \underline{\underline{-\frac{7}{e}+3}} \approx 0,425$

e) $\int_1^2 \underset{f'}{x^3} \underset{g}{\ln x}\, dx \underset{\text{part.Int.}}{=} \frac{1}{4}x^4 \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{4} \underbrace{x^4 \cdot \frac{1}{x}}_{x^3} dx$

$= \frac{1}{4}x^4 \ln x \Big|_1^2 - \underbrace{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}}_{1/16} x^4 \Big|_1^2$

$= \left(4 \ln 2 - \frac{1}{4} \underbrace{\ln 1}_{0}\right) - \left(\frac{1}{16}\cdot 16 - \frac{1}{16}\right)$

$= \underline{\underline{4 \ln 2 - \frac{15}{16}}}$

$= \ln(\underbrace{2^4}_{16}) - \frac{15}{16} = \ln 16 - \frac{15}{16} \approx 1{,}835$

<u>Aufg 4.3</u>

Berechne folgende unbestimmten Integrale

a) $\int \frac{1}{3x+2} dx = \int \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3x+2} 3dx = \int \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{u} du$

$u = 3x+2$
$du = 3\,dx$

$= \frac{1}{3} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{3} \ln(u)$

$= \underline{\underline{\frac{1}{3} \ln(3x+2)}}$

<u>Alternativ</u> mit Linearer Substitution

$\int \frac{1}{3x+2} dx = \int f(3x+2)$, wobei $f(x) = \frac{1}{x}$
$f$ hat Stammfkt $F(x) = \ln x$

$\underset{\text{Lin Subst.}}{\Longrightarrow} \int \frac{1}{3x+2} dx = \int f(3x+2) \overset{!}{=} \frac{1}{3} F(3x+2) = \underline{\underline{\frac{1}{3} \ln(3x+2)}}$

---

$\int \cos(2x+7) dx \underset{\text{Lin Subst.}}{=} \frac{1}{2} \sin(2x+7)$

b) $\int \sin(2x+1)\cos^3(2x+1)\,dx =$

$$u = \cos(2x+1)$$
$$du = 2\cdot(-\sin(2x+1))\,dx = -2\sin(2x+1)\,dx$$

$$= \int -\tfrac{1}{2}\cdot \underbrace{\cos^3(2x+1)}_{u^3}\cdot \underbrace{(-2\sin(2x+1))\,dx}_{du}$$

$$= -\tfrac{1}{2}\int u^3\,du = -\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}u^4$$

$$= \underline{\underline{-\tfrac{1}{8}\cos^4(2x+1)}}$$

c) $\int x^2\sin(x^3)\,dx = \frac{1}{3}\int \sin(u)\,du = -\frac{1}{3}\cos(u)$

$$u = x^3 \qquad = \underline{\underline{-\tfrac{1}{3}\cos(x^3)}}$$
$$du = 3x^2\,dx$$

---

d) $\int \underset{g}{x^3}\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \underbrace{2x\sqrt{1+x^2}}_{f'}\,\underset{g}{x^2}\,dx$

$$= \tfrac{1}{2}\Big(\tfrac{2}{3}(1+x^2)^{3/2}x^2 - \underbrace{\int \tfrac{2}{3}(1+x^2)^{3/2}2x\,dx}_{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}(1+x^2)^{5/2}}\Big)$$

Part. Int.

$$= \underline{\tfrac{1}{3}(1+x^2)^{3/2}x^2 - \tfrac{2}{15}(1+x^2)^{5/2}} =: A$$

Alternativ mit Substitution:

$$\int x^3\sqrt{1+x^2}\,dx = \int x^2\sqrt{1+x^2}\,\tfrac{2}{2}x\,dx$$

$$u = 1+x^2 \Rightarrow x^2 = u-1$$
$$du = 2x\,dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\int (u-1)\sqrt{u}\,du = \tfrac{1}{2}\int (u^{3/2} - u^{1/2})\,du$$

$$= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{5}u^{5/2} - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{3}u^{3/2} = \underline{\underline{\tfrac{1}{5}(1+x^2)^{5/2} - \tfrac{1}{3}(1+x^2)^{3/2}}} =: B$$

<u>zu A = B:</u>

$$A = (1+x^2)^{3/2}\left(\tfrac{1}{3}x^2 - \tfrac{2}{15}(1+x^2)\right) = (1+x^2)^{3/2}\Big(\underbrace{\left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{2}{15}\right)}_{1/5}x^2 - 2/15\Big)$$

$$B = (1+x^2)^{3/2}\left(\tfrac{1}{5}(1+x^2) - \tfrac{1}{3}\right) = (1+x^2)^{3/2}\Big(1/5\,x^2 + \underbrace{(1/5 - 1/3)}_{-2/15}\Big)$$

## Aufg 4.1, c) (Alternative)

$$\int \frac{1}{x} \ln x \, dx = \int u \, du = \frac{1}{2} u^2 = \underline{\underline{\frac{1}{2} (\ln x)^2}}$$

$u = \ln x$

$du = \frac{1}{x} dx$

## Aufg 4.4: Berechne folgende Integrale

a) $$\int_0^1 x^3 e^{x^2} dx = \int_0^1 x^2 e^{x^2} \frac{1}{2} \cdot 2x \, dx = \int_{u(0)=0}^{u(1)=1} \frac{1}{2} u e^u du$$

$u = x^2$

$du = 2x \, dx$

$$= \int_0^1 \underset{v}{\tfrac{1}{2} u} \, \underset{w'}{e^u} du \underset{\text{partInt.}}{=} \frac{1}{2} u e^u \Big|_0^1 - \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{2} e^u du}_{\frac{1}{2} e^u \big|_0^1}$$

$$= \left(\frac{1}{2} e^1 - 0\right) - \left(\frac{1}{2} e - \frac{1}{2} \underbrace{e^0}_{1}\right)$$

$$= \frac{1}{2} e - \frac{1}{2} e + \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

b) $$\int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx = \int_{u(e)=1}^{u(e^2)=2} \frac{1}{u} du = \int_1^2 \frac{1}{u} du = \ln u \Big|_1^2$$

$u = \ln x$

$du = \frac{1}{x} dx$

$$= \ln 2 - \underbrace{\ln 1}_{0} = \underline{\underline{\ln 2}}$$

## Ergänzung

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{1}{u} du = \ln u = \ln(\ln x)$$

$u = \ln x$

$du = \frac{1}{x} dx$

$$\Rightarrow \int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx = \ln(\ln x) \Big|_e^{e^2} = \ln(\underbrace{\ln e^2}_{2}) - \underbrace{\ln(\underbrace{\ln e}_{1})}_{0}$$

c) $\displaystyle\int_3^6 \frac{x-3}{x^2-6x+10}\,dx = \int_3^6 \frac{1}{2}\frac{1}{x^2-6x+10}\cdot 2(x-3)\,dx$

$$u = x^2-6x+10$$
$$du = (2x-6)\,dx$$
$$= 2(x-3)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{u(3)=1}^{u(6)=10} \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}\ln u\Big|_1^{10} = \frac{1}{2}(\ln 10 - \underbrace{\ln 1}_{0})$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2}\ln 10}}$$

<u>Zusatz</u>

$$\int \frac{1}{x^2-6x+10}\,dx = ?$$

$$x^2-6x+10 = (x-3)^2+1$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{x^2-6x+10}\,dx = \int \frac{1}{(x-3)^2+1}\,dx \qquad \begin{aligned} u &= x-3 \\ du &= dx \end{aligned}$$

$$= \underline{\arctan(x-3)}$$

Aufg 5.1 Untersuche, ob folg. uneig. Integr. konverg. und bestimme gegeb. falls den Wert.

1) $\int_0^1 \ln x \cdot dx$

Unterer Randpunkt 0 ist kritisch, da $\lim_{x \searrow 0} \ln x = -\infty$.

$$\int_a^1 \ln x \, dx \underset{VL}{=} (x\ln x - x)\Big|_a^1 = (1 \cdot \underbrace{\ln 1}_{0} - 1) - (a\ln a - a)$$

$a \in ]0,1[$

$$= -1 - a\ln a + a$$

$$\lim_{a \searrow 0} a\ln a = \lim_{a \searrow 0} \frac{\ln a}{1/a} \underset{\left(\frac{-\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{a \searrow 0} \frac{1/a}{-1/a^2} \quad \text{(de l'Hospital)}$$

$$= \lim_{a \searrow 0} (-a) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{a \searrow 0} (-1 - a\ln a + a) = -1 - 0 + 0 = -1$$

$\Rightarrow \int_0^1 \ln x \, dx$ konvergiert mit Wert $\int_0^1 \ln x \, dx = -1$

2) $\int_1^3 \frac{2}{x \ln x} dx$ Unterer Randpkt kritisch.

$$\int_a^3 \frac{2}{x \ln x} dx \underset{\text{Aufg 4.4,b)}}{=} 2\ln(\ln x)\Big|_a^3 = 2\ln(\ln 3) - 2\ln(\ln a)$$

$$\lim_{a \searrow 1} \ln(\ln a) = \lim_{y \searrow 0} \ln(y) = -\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{a \searrow 1} \int_a^3 \frac{2}{x \ln x} dx = \lim_{a \searrow 1} (2\ln(\ln 3) - 2\ln(\ln a))$$

$$= \underbrace{2\ln(\ln 3)}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{- 2(-\infty)}_{+\infty} = +\infty$$

$\Rightarrow \int_1^3 \frac{2}{x \ln x} dx$ ist bestimmt divergent mit Wert $\int_1^3 \frac{2}{x \ln x} dx = +\infty$

Auf 5.1 (Fortsetzung) Übung 6.11.23

3) $\int_0^\infty x e^{-x^2} dx$

$$\int_0^b x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}\int_{-0^2=0}^{-b^2} e^u du = -\frac{1}{2} e^u \Big|_0^{-b^2} = -\frac{1}{2} e^{-b^2} + \frac{1}{2}\underbrace{e^0}_{1}$$

$u = -x^2$
$du = -2x\,dx$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-b^2}$$

$$\lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-b^2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot 0 = \frac{1}{2}$$

Also: $\int_0^\infty x e^{-x^2} dx$ konvergiert mit Wert $\underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

4) $\int_0^\infty x \sin(x^2) dx$

$$\int_0^b x\sin(x^2) dx = \frac{1}{2}\int_{0^2=0}^{b^2} \sin u\, du = -\frac{1}{2}\cos u \Big|_0^{b^2}$$

$u = x^2$
$du = 2x\,dx$

$$= -\frac{1}{2}\cos(b^2) + \frac{1}{2}\underbrace{\cos 0}_{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(b^2)$$

$\lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(b^2)\right)$ existiert <u>nicht</u> !

Also: $\int_0^\infty x\sin(x^2) dx$ konvergiert nicht.

5) $\int_0^\infty \frac{3x}{1+x^2} dx$

$$\int_0^b \frac{3x}{1+x^2} dx = \frac{3}{2}\int_{1+0^2=1}^{1+b^2} \frac{1}{u} du = \frac{3}{2}\ln u \Big|_1^{1+b^2}$$

$u = 1+x^2$
$du = 2x\,dx$

$$= \frac{3}{2}\ln(1+b^2) - \frac{3}{2}\underbrace{\ln 1}_{0} = \frac{3}{2}\ln(1+b^2)$$

$$\lim_{b\to\infty} \frac{3}{2}\ln(1+b^2) = \frac{3}{2}\cdot(+\infty) = +\infty$$

Also: $\int_0^\infty \frac{3x}{1+x^2} dx$ divergiert bestimmt gegen $+\infty$.

✓

Aufg 5.2: Untersuche mit dem Integral-Kriterium, ob die Reihe $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2}$ konvergiert.

Erinn (3.4) Sei $f: [m,\infty[ \to \mathbb{R}$ mon. fallend und $\geq 0$.

Dann gilt: $\sum_{k=m}^{\infty} f(k)$ konverg $\iff \int_m^{\infty} f(x)dx$ konverg.

Lösung (von Aufg 5.2)

Betrachte $f: [2,\infty[ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

1) zeigen: f ist mon. fallend und $\geq 0$.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x^2 - \ln x \cdot 2x}{x^4} = \frac{x - 2x\ln x}{x^4} = \frac{1-2\ln x}{x^3}$$

$\forall x \geq 2$: $f'(x) = \frac{1-2\ln x}{x^3} \overset{!}{\leq} 0 \iff 1-2\ln x \leq 0$ $\left(\begin{array}{c}\text{da } x^3>0 \\ \text{für } x\geq 2\end{array}\right)$

$\iff 1 \leq 2\ln x$

$\iff \frac{1}{2} \leq \ln x$

das stimmt, da $\ln 2 \approx 0{,}69$ und ln mon. steigend.

$\Longrightarrow$ f ist mon. fallend.

Ana 1, 6.14

Außerdem: $\forall x \geq 2$: $\ln x, x^2 > 0 \Longrightarrow f(x) = \frac{\ln x}{x^2} \geq 0$

2) zeigen: $\int_2^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}dx$ konvergiert

$$\int_2^b \underset{f'}{x^{-2}} \cdot \underset{g}{\ln x}\,dx \underset{\text{part.Int.}}{=} -x^{-1}\ln x\Big|_2^b - \int_2^b \underbrace{-x^{-1}\cdot\frac{1}{x}}_{-\frac{1}{x^2}}dx$$

$$= \left(-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right)\Big|_2^b = -\frac{1+\ln x}{x}\Big|_2^b =$$

$$= -\frac{1+\ln b}{b} + \frac{1+\ln 2}{2}$$

$$\lim_{b\to\infty} \frac{1+\ln b}{b} \underset{\substack{(\frac{\infty}{\infty}) \\ \text{de l'Hosp.}}}{=} \lim_{b\to\infty} \frac{1/b}{1} = 0$$

$$\Longrightarrow \int_2^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1+\ln 2}{2} - \frac{1+\ln b}{b}\right) = \frac{1+\ln 2}{2} - 0 = \frac{1+\ln 2}{2}$$

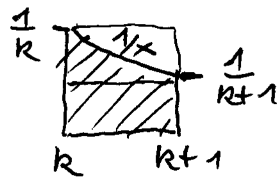
Aus 1), 2) und dem Int.-Krit. (3.4) folgt: $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2}$ konvergiert. ✓

## Aufg 5.3

1) Sei $a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$

Zeige: $(a_n)_n$ ist mon. fallend und beschränkt.

Erinn.: (3.4) $\forall k \in \mathbb{N}: \quad \frac{1}{k+1} \underset{(*)}{\leq} \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx \leq \frac{1}{k}$




$\forall n \in \mathbb{N} \quad \ln(n+1) = \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad (**)$

### Lösung

Zeigen: a) $\forall n \in \mathbb{N}: \ a_{n+1} \leq a_n$

b) $\forall n \in \mathbb{N}: \ a_n \geq 0$

zu a): $a_{n+1} \leq a_n \iff \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$

$\iff \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) \leq -\ln n$

$\iff \underline{\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln n = \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx}$

stimmt nach $(*)$

zu b) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{(**)}{\geq} \ln(n+1) \geq \ln n \Rightarrow a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \geq 0$

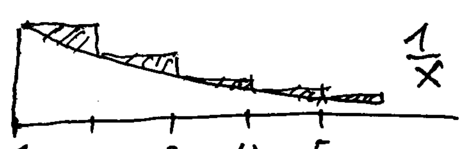
ln mon. steig.

---

$\left(a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right)_n$ ist mon. fall. und beschr.

$\underset{\text{Ana 1, 2.13}}{\Longrightarrow} \quad \gamma := \lim_{n \to \infty} \left( \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right)$ existiert

$\approx 0{,}577$ Euler-Mascheroni-Konstante




2) Anwend.: Für $N \in \mathbb{N}$ groß gilt: $\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \approx \ln N + \gamma$

Beisp.: $N$ = Anzahl der Sekunden seit dem Urknall

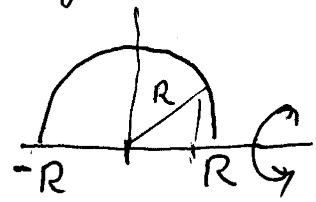
$\approx \underbrace{13{,}8 \cdot 10^9}_{\text{Jahre}} \cdot \underbrace{365{,}25}_{\text{Tage/Jahr}} \cdot \underbrace{86400}_{\text{sek/Tag}} \approx 4{,}355 \cdot 10^{17}$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \approx \ln N + \gamma \approx 40{,}615 + 0{,}577 = \underline{41{,}192}$ ✓

<u>Aufg 5.4</u> Übung 13.11.23

Sei $K$ Kugel vom Radius $R>0$, d.h. Rotationskörper von $f:[-R,R]\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\sqrt{R^2-x^2}$$




Berechne Volumen $V$ und Oberfläche $F$.

<u>Lösung</u>

$$V=\pi\int_a^b f(x)^2dx=\pi\int_{-R}^{R}\left(\sqrt{R^2-x^2}\right)^2dx=\pi\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)\,dx$$

$$=\pi\left(R^2x-\tfrac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-R}^{R}=\pi\left(R^3-\tfrac{1}{3}R^2-\left(-R^3+\tfrac{1}{3}R^3\right)\right)$$

$$=\pi\left(2R^3-\tfrac{2}{3}R^3\right)=\underline{\underline{\tfrac{4}{3}\pi R^3}}$$

<u>zu F</u>: Erinn.: $F=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$

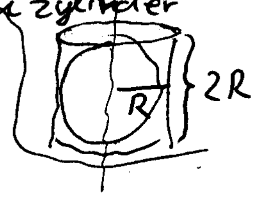
$$f'(x)=-2x\cdot(R^2-x^2)^{-1/2}\cdot\tfrac{1}{2}=-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}$$

$$\Rightarrow\sqrt{1+f'(x)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}=\sqrt{\frac{R^2-x^2+x^2}{R^2-x^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{R^2}{R^2-x^2}}=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}$$

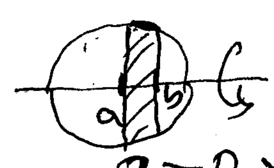
$$\Rightarrow F=2\pi\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx=2\pi\int_{-R}^{R}R\,dx$$

$$=2\pi Rx\Big|_{-R}^{R}=2\pi R(R-(-R))=\underbrace{2\pi R\cdot 2R}_{\text{Mantelfläche von Zylinder}}=\underline{4\pi R^2}\ \checkmark$$




<u>Ergänzung</u>

Mantelfläche von Kugelscheibe



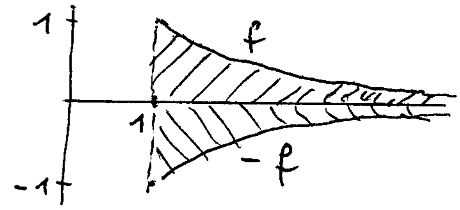

$$F_{\text{Scheibe}}=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx=\dots=2\pi Rx\Big|_a^b$$

$$\underline{=2\pi R(b-a)}$$

<u>Beobachtung</u>: Mantelfläche hängt nur von Dicke $d=b-a$ der Scheibe ab, aber <u>nicht</u> von der Lage.

Evangelista Toricelli
(1608–1647)

# Toricelli's Trompete



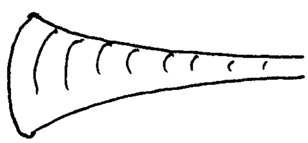

$f : [1,\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x}$

3.2,4) $\quad \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = +\infty$

$\Rightarrow$ Fläche F zwischen $f$ und $-f$ hat unendlichen Flächeninhalt.

---

Nun betrachte Rotationskörper von $f$



Toricelli's Trompete

Hat Volumen:

$$V = \pi \int_1^\infty f(x)^2\,dx = \pi \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx \underset{3.2,4)}{=} \pi \frac{1}{2-1}$$

$$= \underline{\underline{\pi}} \text{ endlich}$$

Erinn:

-) Abstand zwischen $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$

$$\|\bar{x}-\bar{y}\| := \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right)^{1/2}$$

-) Dreiecksungleichung: $\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{R}^n$

$$\|\bar{x}-\bar{z}\| \leq \|\bar{x}-\bar{y}\| + \|\bar{y}-\bar{z}\|$$

Aufg 6.1: Zeige "umgekehrte Dreiecksungl."

$$\big|\|\bar{x}-\bar{z}\| - \|\bar{y}-\bar{z}\|\big| \leq \|\bar{x}-\bar{y}\|$$

Lösung

Linke Seite $= \|\bar{x}-\bar{z}\| - \|\bar{y}-\bar{z}\|$ oder $\|\bar{y}-\bar{z}\| - \|\bar{x}-\bar{z}\|$

Also reicht es zu zeigen:

a) $\|\bar{x}-\bar{z}\| - \|\bar{y}-\bar{z}\| \leq \|\bar{x}-\bar{y}\|$

b) $\|\bar{y}-\bar{z}\| - \|\bar{x}-\bar{z}\| \leq \|\bar{x}-\bar{y}\|$

zu a): $\|\bar{x}-\bar{z}\| = \|\bar{x}-\bar{y}+\bar{y}-\bar{z}\| \leq \|\bar{x}-\bar{y}\| + \|\bar{y}-z\|$

$$\underset{-\|\bar{y}-\bar{z}\|}{\Longrightarrow} \|\bar{x}-\bar{z}\| - \|\bar{y}-\bar{z}\| \leq \|\bar{x}-\bar{y}\|$$

zu b): $\|\bar{y}-\bar{z}\| = \|\bar{y}-\bar{x}+\bar{x}-\bar{z}\| \leq \|\bar{y}-\bar{x}\| + \|\bar{x}-\bar{z}\|$

$$\underset{-\|\bar{x}-\bar{z}\|}{\Longrightarrow} \|\bar{y}-\bar{z}\| - \|\bar{x}-\bar{z}\| \leq \|\bar{y}-\bar{x}\| = \|\bar{x}-\bar{y}\| \quad \checkmark$$

## Erinn

① Sei $((x_k, y_k))_k$ Folge in $\mathbb{R}^2$ und $\bar{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$

$$(x_k, y_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} \bar{a} = (a_1, a_2) \underset{5.4}{\Longleftrightarrow} x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} a_1 \text{ und } y_k \xrightarrow[k\to\infty]{} a_2$$

② Sei $D \subset \mathbb{R}^2$, $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ Funktion, $b \in \mathbb{R}$ und

$\bar{a} \in \bar{D} := \{ \bar{p} \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{p}$ ist Grenzwert einer konverg. Folge in $D \}$

$\lim\limits_{\bar{x} \to \bar{a}} f(\bar{x}) = b :\Longleftrightarrow$ Für jede Folge $((x_k, y_k))_k$ in $D$ mit $(x_k, y_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} \bar{a}$ gilt:

$$f(x_k, y_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} b$$

## Aufg 6.2: Sei $D := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \neq 0 \}$ und

$$f: D \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \frac{xy}{|xy|}$$

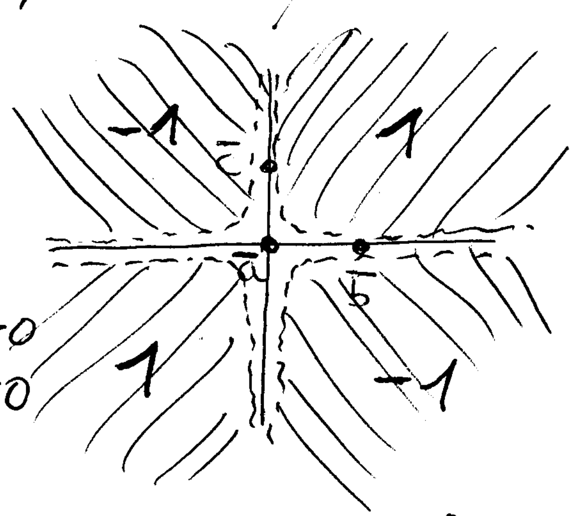
**zeige**

1) $\bar{a} = (0,0)$, $\bar{b} = (1,0)$, $\bar{c} = (0,1) \in \bar{D}$

2) Die Grenzwerte von $f$ bei $\bar{a}, \bar{b}$ bzw $\bar{c}$ existieren nicht.

**Lösung**

$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \wedge y \neq 0 \}$
$= \mathbb{R}^2 \setminus (x\text{-Achse} \cup y\text{-Achse})$




$$f: D \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } xy > 0 \\ -1 & \text{" } xy < 0 \end{cases}$$

1) Finde Folge $((x_k, y_k))_k$ in $D$ mit $(x_k, y_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} \bar{p}$ für $\bar{p} = \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$

$$\left(\tfrac{1}{k}, \tfrac{1}{k}\right) \xrightarrow[k\to\infty]{} (0,0) = \bar{a},$$

$$\left(1, \tfrac{1}{k}\right) \xrightarrow[k\to\infty]{} (1,0) = \bar{b},$$

$$\left(\tfrac{1}{k}, 1\right) \xrightarrow[k\to\infty]{} (0,1) = \bar{c}$$

2) Für $\bar{p} = \bar{a}, \bar{b}$ bzw $\bar{c}$ finde jeweils zwei Folgen $((x_k, y_k))_k$ und $((x_k', y_k'))_k$ in D mit

$$(x_k, y_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} \bar{p}, \quad (x_k', y_k') \xrightarrow[k\to\infty]{} \bar{p}$$

und $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k, y_k) \neq \lim\limits_{k\to\infty} f(x_k', y_k')$

für $\bar{a} = (0,0)$:
$$(x_k, y_k) = (\tfrac{1}{k}, \tfrac{1}{k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} (0,0) = \bar{a}$$
$$(x_k', y_k') = (\tfrac{1}{k}, -\tfrac{1}{k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} (0,0) = \bar{a}$$
$$f(x_k, y_k) = f(\tfrac{1}{k}, \tfrac{1}{k}) = 1 \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$$
$$f(x_k', y_k') = f(\tfrac{1}{k}, -\tfrac{1}{k}) = -1 \xrightarrow[k\to\infty]{} -1$$

für $\bar{b} = (1,0)$:
$$(x_k, y_k) = (1, \tfrac{1}{k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} (1,0) = \bar{b}$$
$$(x_k', y_k') = (1, -\tfrac{1}{k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} (1,0) = \bar{b}$$
$$f(x_k, y_k) = f(1, \tfrac{1}{k}) = 1 \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$$
$$f(x_k', y_k') = f(1, -\tfrac{1}{k}) = -1 \xrightarrow[k\to\infty]{} -1$$

für $\bar{c} = (0,1)$:
$$(x_k, y_k) = (\tfrac{1}{k}, 1) \xrightarrow[k\to\infty]{} (0,1) = \bar{c}$$
$$(x_k', y_k') = (-\tfrac{1}{k}, 1) \xrightarrow[k\to\infty]{} (0,1) = \bar{c}$$
$$f(x_k, y_k) = f(\tfrac{1}{k}, 1) = 1 \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$$
$$f(x_k', y_k') = f(-\tfrac{1}{k}, 1) = -1 \xrightarrow[k\to\infty]{} -1$$

---

Alternativ: Für $\bar{p} = \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ finde jeweils eine Folge $((x_k, y_k))_k$ in D mit $(x_k, y_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} \bar{p}$ und $(f(x_k, y_k))_k$ konvergiert nicht.

$(\tfrac{1}{k}, (-1)^k \tfrac{1}{k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} (0,0) = \bar{a}$, aber $f(\tfrac{1}{k}, (-1)^k \tfrac{1}{k}) = (-1)^k$ konverg. nicht

$(1, (-1)^k \tfrac{1}{k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} (1,0) = \bar{b}$, aber $f(1, (-1)^k \tfrac{1}{k}) = (-1)^k$ " "

$((-1)^k \tfrac{1}{k}, 1) \xrightarrow[k\to\infty]{} (0,1) = \bar{c}$, aber $f((-1)^k \tfrac{1}{k}, 1) = (-1)^k$ " "

Erinn

sei $D \subset \mathbb{R}^2$, $f: D \to \mathbb{R}$ Funktion

$f$ stetig in $\bar{a} \in D$ $:\underset{5.6}{\Longleftrightarrow}$ $\lim\limits_{\bar{x} \to \bar{a}} f(\bar{x}) = f(\bar{a})$

$\underset{5.5}{\Longleftrightarrow}$ Für jede Folge $(\bar{x}_k)_k$ in $D$ mit $\bar{x}_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \bar{a}$ gilt:

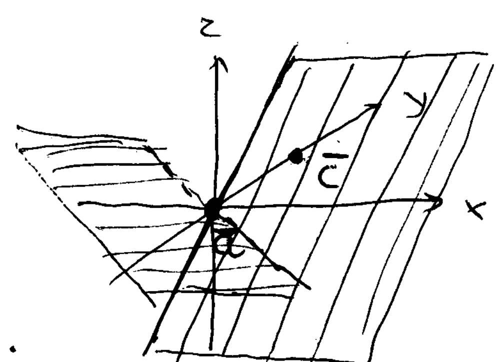
$$f(\bar{x}_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(\bar{a})$$

Aufg 6.3: Sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} y & \text{für } x \geq 0, \\ -y & \text{für } x < 0. \end{cases}$

Untersuche, ob $f$ in $\bar{a} = (0,0)$ bzw $\bar{c} = (0,1)$ stetig ist

Lösung

Graph von $f$




Vermutung

1) $f$ ist stetig in $\bar{a} = (0,0)$.

2) $f$ nicht stetig in $\bar{c} = (0,1)$.

zu 1): Sei $((x_k, y_k))_k$ Folge in $\mathbb{R}^2$ mit $(x_k, y_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} \bar{a} = (0,0)$

$\Rightarrow$ $x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ und $y_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow |f(x_k,y_k) - \underbrace{f(0,0)}_{0}| = |f(x_k,y_k)| \underset{\uparrow}{=} |y_k| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, da $y_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

$f(x_k,y_k) = \pm y_k$

$\Rightarrow f(x_k,y_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(0,0)$, d.h. $f$ stetig in $\bar{a} = (0,0)$.

zu 2): Gesucht: Folge $((x_k,y_k))_k$ in $\mathbb{R}^2$ mit $(x_k,y_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} \bar{c} = (0,1)$

aber $f(x_k,y_k) \not\xrightarrow[k\to\infty]{} f(\bar{c}) = f(0,1) = 1$

Betrachte $(x_k,y_k) := (-\frac{1}{k}, 1)$, $k \in \mathbb{N}$.

Dann gilt: $(x_k,y_k) = (-\frac{1}{k}, 1) \xrightarrow[k\to\infty]{} (0,1) = \bar{c}$

und $f(x_k,y_k) = f(-\frac{1}{k}, 1) = -1 \xrightarrow[k\to\infty]{} -1 \neq 1 = f(0,1)$

Also: $f(-\frac{1}{k}, 1) \not\xrightarrow[k\to\infty]{} f(0,1)$

d.h. $f$ nicht stetig in $\bar{c} = (0,1)$ ✓

<u>Aufg 6.4</u> Seien $f, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) = \bar{0}, \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

$$g(x,y) = y\, f(x,y).$$

<u>zeige</u>

1) $f$ ist in $\bar{a} \neq \bar{0}$ stetig und in $\bar{a} = \bar{0}$ nicht stetig.

2) $g$ ist (in allen Punkten) stetig.

<u>Lösung</u>

1) $\mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\}$ ist offen
$f|_{\mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\}}$ ist rationale Funktion, also stetig $\Big\}$
$\underset{5.11\text{ VL}}{\Longrightarrow}$ $f$ ist stetig in allen $\bar{a} \neq \bar{0}$.

<u>zeigen</u>: $f$ nicht stetig in $\bar{a} = \bar{0} = (0,0)$

Finde Folge $((x_k, y_k))_k$ in $\mathbb{R}^2$ mit $(x_k, y_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} (0,0)$
und $f(x_k, y_k) \not\xrightarrow[k\to\infty]{} f(0,0) = 0$

Betrachte $\left((x_k, y_k) := \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)\right)_k$

$\Rightarrow (x_k, y_k) = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) \xrightarrow[k\to\infty]{} (0,0)$

und $f(x_k, y_k) = f\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) = \frac{1/k^2}{1/k^2 + 1/k^2} = \frac{1/k^2}{2 \cdot 1/k^2} = \frac{1}{2} \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0)$

Also: $\lim\limits_{\bar{x} \to \bar{0}} f(\bar{x}) \neq f(\bar{0})$, d.h. $f$ nicht stetig in $\bar{0}$

<u>Alternativ</u>: $\left((x_k, y_k) := \left(\frac{1}{k}, 0\right)\right)_k$

$\Rightarrow (x_k, y_k) = \left(\frac{1}{k}, 0\right) \xrightarrow[k\to\infty]{} (0,0)$

und $f\left(\frac{1}{k}, 0\right) = \frac{1/k^2}{1/k^2 + 0^2} = 1 \xrightarrow[k\to\infty]{} 1 \neq 0 = f(0,0)$.

2) wie bei 1) folgt Stetigkeit von $g$ in allen $\bar{a} \neq \bar{0}$.

<u>Alternativ</u>: $f$ ist stetig in allen $\bar{a} \neq 0$
$pr_2(x,y) = y$ ist stetig (überall) $\Big\}$
$\Longrightarrow g = \underbrace{pr_2 \cdot f}_{\text{Produkt von stetigen Funktionen.}}$ ist stetig in allen $\bar{a} \neq 0$

<u>bleibt zu zeigen</u>: $g$ ist stetig in $\bar{a} = \bar{0} = (0,0)$

Sei $((x_k, y_k))_k$ Folge in $\mathbb{R}^2$ mit $(x_k, y_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} (0,0)$

$\Rightarrow x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ und $y_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

$$\Rightarrow 0 \le |g(x_k, y_k)| = \left| y_k \cdot \frac{x_k^2}{x_k^2 + y_k^2} \right| = |y_k| \cdot \underbrace{\frac{x_k^2}{x_k^2 + y_k^2}}_{\le 1}$$

$$\le |y_k| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0, \text{ da } y_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

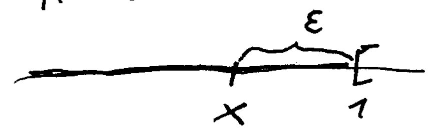
$\xRightarrow[\text{Ana 1}]{\text{Sandwich-Prinz.}}$ $g(x_k, y_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 = g(0,0)$

Also: $g$ stetig in $\bar{a} = (0,0)$

Übung 27.11.23

Erinn: $D \subset \mathbb{R}^n$ offen $:\Leftrightarrow \forall \bar{x} \in D \; \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(\bar{x}) \subset D$

$D$ abgeschlossen $:\Leftrightarrow \mathbb{R}^n \setminus D$ offen




Beisp: -) $\mathbb{R}_{<1}$ ist offen

-) $\mathbb{R}_{\leq 1}$ ist nicht offen

-) $\mathbb{R}_{\leq 1}$ ist abgeschl., da $\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_{\leq 1} = \mathbb{R}_{>1}$ offen

Aufg 7.1 Zeige:

1) Endl. Durchschnitte und belieb. Vereinigungen von offenen Mengen sind offen.

2) $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} ]-\frac{1}{k}, 1+\frac{1}{k}[ \; = [0,1]$

Lösung

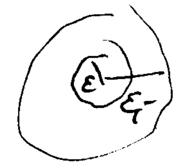
1) a) Seien $D_1, \ldots, D_m \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\bar{x} \in D_1 \cap \ldots \cap D_m$

$\Rightarrow \forall i = 1, \ldots, m : \bar{x} \in D_i$

$\xRightarrow{\text{alle } D_i \text{ offen}} \forall i = 1, \ldots, m \; \exists \varepsilon_i > 0 : U_{\varepsilon_i}(\bar{x}) \subset D_i$

Setze $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m\} > 0$

$\Rightarrow \forall i = 1, \ldots, m : U_\varepsilon(\bar{x}) \subset U_{\varepsilon_i}(\bar{x}) \subset D_i$




$\Rightarrow U_\varepsilon(\bar{x}) \subset D_1 \cap \ldots \cap D_m$

b) Seien $D_i \subset \mathbb{R}^n$ offen für $i \in I$, wobei $I$ belieb. Menge.

Sei $\bar{x} \in \bigcup_{i \in I} D_i$.

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \exists j \in I : \bar{x} \in D_j \\ D_j \text{ offen} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(\bar{x}) \subset D_j$

$\Rightarrow U_\varepsilon(\bar{x}) \subset \bigcup_{i \in I} D_i$, (da $D_j \subset \bigcup_{i \in I} D_i$)

2) „$\supset$": klar, da $[0,1] \subset \; ]-\frac{1}{k}, 1+\frac{1}{k}[$ für alle $k \in \mathbb{N}$

„$\subset$": Sei $x \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} ]-\frac{1}{k}, 1+\frac{1}{k}[$

$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} : -\frac{1}{k} < x < 1 + \frac{1}{k}$

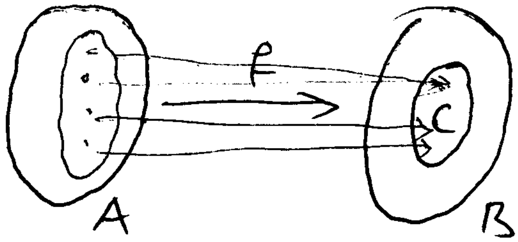
$\xRightarrow{\text{Ana 1, 2.7}} 0 = \lim_{k \to \infty} -\frac{1}{k} \leq x \leq \lim_{k \to \infty} (1 + \frac{1}{k}) = 1$

d.h. $x \in [0,1]$ ✓

Erinn 6.2: Für $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig und $I \subset \mathbb{R}$ gilt:

$I$ offen (abg.) $\Rightarrow f^{-1}(I) \subset \mathbb{R}^n$ offen (abg.)

Erinn "Urbild" Sei $f: A \to B$ Abbildung, $C \subset B$




$f^{-1}(C) := \{x \in A \mid f(x) \in C\}$ Urbild von $C$ bzgl. $f$

Beisp: $f: \{\text{Alle Menschen}\} \to \mathbb{N}$, $f(x) =$ Schuhgröße von $x$

$f^{-1}(\{38, 40, 42\}) =$ Menge aller Menschen mit Schuhgröße 38, 40 oder 42

Aufg 7.2

1) Seien $f, g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig. Zeige:

$D_1 := \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\bar{x}) \leq g(\bar{x})\}$ ist abgeschl.

$D_2 := \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\bar{x}) \neq g(\bar{x})\}$ ist offen.

Lösung

$$D_1 = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid \underbrace{f(\bar{x}) - g(\bar{x})}_{=(f-g)(\bar{x})} \leq 0\}$$ stetig, da $f, g$ stetig.

$$= \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid (f-g)(\bar{x}) \in \underbrace{\mathbb{R}_{\leq 0}}_{\text{abg.}}\}$$

$= (f-g)^{-1}(\mathbb{R}_{\leq 0})$ stet. Urbild von abg. Menge, also abgeschl. nach 6.2

$$D_2 = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid \underbrace{f(\bar{x}) - g(\bar{x})}_{=(f-g)(\bar{x})} \neq 0\}$$ stetig, da $f, g$ stetig.

$$= \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid (f-g)(\bar{x}) \in \underbrace{\mathbb{R} \setminus \{0\}}_{\text{offen}}\}$$

$= (f-g)^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ stet. Urbild von offener Menge, also offen nach 6.2

7.2, 2) Sind folg. Mengen offen bzw. abg.?

$$D_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y < x(4-x)\}$$

$$D_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2+y^2 \leq 1\}$$

<u>Lösung</u>

$D_3 = D' \cap D''$, wobei

$D' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x<y\}$, $D'' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < x(4-x)\}$

$$D' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{x-y}_{=: f(x,y) \text{ stet. Fkt}} < 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) \in \underbrace{\mathbb{R}_{<0}}_{\text{offen}}\}$$

$= f^{-1}(\mathbb{R}_{<0})$ stet. Urbild v. off. Menge, also offen

$$D'' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{x(4-x)-y}_{=: g(x,y) \text{ stetige Fkt}} > 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) \in \underbrace{\mathbb{R}_{>0}}_{\text{offen}}\}$$

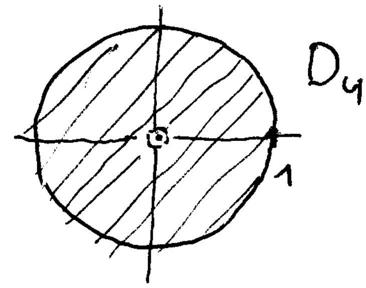
$= g^{-1}(\mathbb{R}_{>0})$ stetiges Urbild v. off. Menge, also offen

$D', D''$ offen $\underset{\text{Abg } 7.1}{\Longrightarrow}$ $D_3 = D' \cap D''$ offen

Aufg 7.2, 2) Fortsetzung  Übung 4.12.23

Ist folgende Menge offen bzw abgeschl.?

$D_4 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2+y^2 \le 1\}$.




Lösung

Beh: $D_4$ ist nicht offen.

$D_4$ nicht offen $\Longleftrightarrow \neg(\forall \bar{a} \in D_4\ \exists \varepsilon > 0 : \mathcal{U}_\varepsilon(\bar{a}) \subset D_4)$

$\Longleftrightarrow \exists \bar{a} \in D_4\ \forall \varepsilon > 0 : \mathcal{U}_\varepsilon(\bar{a}) \not\subset D_4$

Gesucht: so ein $\bar{a} \in D_4$

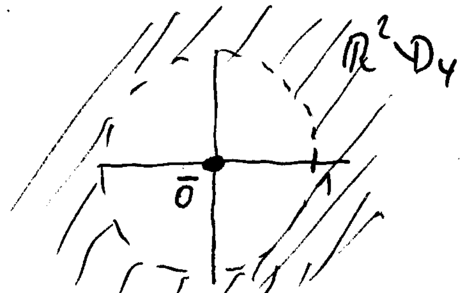
Für $\bar{a} = (1,0) \in D_4$ gilt:

$\forall \varepsilon > 0 : (1+\frac{\varepsilon}{2}, 0) \in \mathcal{U}_\varepsilon(\bar{a})$, aber $(1+\frac{\varepsilon}{2}, 0) \notin D_4$

d.h. $\forall \varepsilon > 0 : \mathcal{U}_\varepsilon(\bar{a}) \not\subset D_4$

Beh: $D_4$ ist nicht abgeschlossen.

zeigen: $\mathbb{R}^2 \setminus D_4$ ist nicht offen.




$\mathbb{R}^2 \setminus D_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 > 1\} \cup \{(0,0)\}$

Für $\bar{o} = (0,0) \in \mathbb{R}^2 \setminus D_4$ gilt:

$\forall \varepsilon > 0 : (\frac{\alpha}{2}, 0) \in \mathcal{U}_\varepsilon(\bar{o})$, aber $(\frac{\alpha}{2}, 0) \notin \mathbb{R}^2 \setminus D_4$ wobei $\alpha := \min\{\varepsilon, 1\}$

d.h. $\forall \varepsilon > 0 : \mathcal{U}_\varepsilon(\bar{o}) \not\subset \mathbb{R}^2 \setminus D_4$

Alternativ

Erinn (6.5, 4)) $D \subset \mathbb{R}^n$ abg. $\Longleftrightarrow \forall (\bar{x}_k)_k$ konv. erg Folge in $D$ : $\lim\limits_{k\to\infty} \bar{x}_k \in D$

$(\bar{x}_k = (\frac{1}{k}, 0))_k$ ist Folge in $D_4$ mit

$\lim\limits_{k\to\infty} \bar{x}_k = \lim\limits_{k\to\infty} (\frac{1}{k}, 0) = (0,0) \notin D_4$

$\Longrightarrow$ $D_4$ nicht abgeschlossen.

Aufg 7.3 Zeige:

$$Gl_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A \text{ ist invertierbar}\}$$

ist eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Dabei identifiziere man $\mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\mathbb{R}^{n^2}$, z.B. via

$$\mathbb{R}^{n\times n} \ni \begin{bmatrix} 1.\text{Zeile} \\ 2.\text{Zeile} \\ \vdots \\ n.\text{Zeile} \end{bmatrix} \longleftrightarrow [1.\text{Zeile}, 2.\text{Zeile}, \ldots, n.\text{Zeile}] \in \mathbb{R}^{n^2}$$

Lösung

Betrachte $\det : \mathbb{R}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Es gilt:

-) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar $\Longleftrightarrow \det A \neq 0$

-) Für $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$\det A \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Leibniz}}}{=} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

Polynom in den $a_{ij}$, also stetig.

$$\Rightarrow Gl_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \underbrace{\det A}_{\text{stetige Funktion}} \neq 0\}$$

$$= \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det A \in \underbrace{\mathbb{R}\setminus\{0\}}_{\text{offen}}\}$$

$$= \det{}^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\}) \quad \text{stet. Urbild von offener Menge}$$

$\underset{6.2\text{ VL}}{\Longrightarrow}$ $Gl_n(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ ist offen. ✓

Erinn: Sei $f: D \to \mathbb{R}$ Fkt, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen **Übung 11.12.23**

(7.1)
Def: $f$ bei $\bar{a} \in D$ partiell nach $x_i$ diffbar $:\Leftrightarrow$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{a}) := \lim_{h\to 0} \frac{f(\bar{a}+h\bar{e}_i)-f(\bar{a})}{h} \text{ existiert}$$

Aufg 8.1 Berechne die part. Ableitungen (falls existent)

1) $f(x,y) = x^y$, wobei $x>0$.

$y$ fest $\Rightarrow f(x,y) = x^y$ Potenzfunktion (als Fkt in $x$)

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\, x^{y-1}$$

$x>0$ fest $\Rightarrow f(x,y) = x^y = e^{\ln(x)\cdot y}$ Exponentialfkt (als Fkt von $y$)

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \ln(x) e^{\ln(x) y} = \ln(x)\, x^y$$

2) $g(x,y) = e^{xy^2} \cdot \ln(x^2+y^2)$, wobei $(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \underset{\text{Prod.reg.}}{=} y^2 e^{xy^2} \cdot \ln(x^2+y^2) + e^{xy^2} \cdot \frac{2x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \underset{\text{Prod.reg}}{=} 2yx\, e^{xy^2} \ln(x^2+y^2) + e^{xy^2} \cdot \frac{2y}{x^2+y^2}$$

3) $h(x,y) = \sqrt{x^2+3y^4}$

bei $(x,y) \neq (0,0)$: $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+3y^4}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3y^4}}$

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \frac{12y^3}{2\sqrt{x^2+3y^4}} = \frac{6y^3}{\sqrt{x^2+3y^4}}$$

bei $(x,y) = (0,0) = \bar{0}$: $\sqrt{\phantom{x}}$ ist nicht diffbar bei $0$

Also: Ableit. regeln nicht anwendbar, zurück zu Def.

$$\frac{\partial h}{\partial x}(\bar{0}) = \lim_{k\to 0} \frac{h(k,0)-h(\bar{0})}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{\sqrt{k^2+0}-\sqrt{0}}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{|k|}{k} \text{ existiert nicht}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}(\bar{0}) = \lim_{k\to 0} \frac{h(0,k)-h(\bar{0})}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{\sqrt{0+3k^4}-\sqrt{0}}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{\sqrt{3}k^2}{k}$$

$$= \lim_{k\to 0} \sqrt{3}k = 0$$

Also: $h$ ist bei $\bar{0}$ nach $y$ partiell diffbar, aber nicht nach $x$.

Aufg 8.2 Sei $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{"} \quad (x,y) = (0,0) = \bar{0} \end{cases}$$

Zeige:

1) $f$ ist bei $\bar{0}$ partiell, aber nicht total diffbar.

Lösung

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{0}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(\bar{0})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3}{h^2+0^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} 1 = \underline{1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{0}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(\bar{0})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = \underline{0}$$

Also: $f$ partiell diffbar bei $\bar{0}$.

Erinn 7.6

$$f \text{ bei } \bar{a} \text{ diffbar} \iff \begin{cases} f \text{ part diffbar bei } \bar{a}, \\ \underbrace{\frac{1}{\|\bar{h}\|}\left(f(\bar{a}+\bar{h}) - f(\bar{a}) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{a}) h_i\right)}_{=\varphi(\bar{h})} \xrightarrow[\bar{h}\to\bar{0}]{} 0 \end{cases}$$

Für $\bar{a} = \bar{0} = (0,0)$ und $\bar{h} = (h_1, h_2)$:

$$\frac{\varphi(\bar{h})}{\|\bar{h}\|} = \frac{1}{\|\bar{h}\|}\left(f(\bar{h}) - f(\bar{0}) - \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{0}) h_1 - \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{0}) h_2\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \cdot \left(\frac{h_1^3}{h_1^2+h_2^2} - 0 - 1\cdot h_1 - 0\cdot h_2\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \cdot \left(\frac{h_1^3}{h_1^2+h_2^2} - \frac{h_1(h_1^2+h_2^2)}{h_1^2+h_2^2}\right)$$

$$= \frac{-h_1 h_2^2}{(h_1^2+h_2^2)^{3/2}} \qquad (*)$$

Betrachte $\bar{0}$-Folge $(\bar{h}_k = (1/k, 1/k))_k$

$$\Rightarrow \frac{\varphi(\bar{h}_k)}{\|\bar{h}_k\|} \overset{(*)}{=} \frac{-1/k \cdot 1/k^2}{(1/k^2 + 1/k^2)^{3/2}} = \frac{-1/k^3}{(2/k^2)^{3/2}} = \frac{-1/k^3}{2^{3/2}\underbrace{(1/k^2)^{3/2}}_{=1/k^3}}$$

$$= \frac{-1/k^3}{2^{3/2}\cdot 1/k^3} = -\frac{1}{2^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to 0} \frac{\varphi(\bar{h}_k)}{\|\bar{h}_k\|} = -\frac{1}{2^{3/2}} \neq 0 \Rightarrow \lim_{\bar{h}\to\bar{0}} \frac{\varphi(\bar{h})}{\|\bar{h}\|} \neq 0$$

Also: $f$ nicht (total) diffbar bei $\bar{a} = \bar{0}$.

2) sei $g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{" } (x,y) = (0,0) = \bar{0} \end{cases}$$

zeige: g ist bei allen Punkten (total) diffbar.

Lösung

Erinn 7.7 Def: f $C^1$-Funktion $\Longleftrightarrow$
alle $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existieren und sind stetig

Satz: f $C^1$-Funktion $\Longrightarrow$ f (total) diffbar

---

$g|_{\mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\}}$ rationale Funktion, also $C^1$-Funktion

$$\left.\begin{array}{l} \underset{7.7}{\Longrightarrow} g|_{\mathbb{R}^2\setminus\{\bar{0}\}} \text{ diffbar.} \\ \mathbb{R}^2\setminus\{\bar{0}\} \subset \mathbb{R}^2 \text{ offen} \end{array}\right\} \underset{\substack{5.11 \\ \text{analog}}}{\Longrightarrow} g \text{ bei allen } \bar{a} \neq \bar{0} \text{ (total) diffbar.}$$

Bleibt zu zeigen: g diffbar bei $\bar{a} = \bar{0}$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{0}) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{g(h,0)-g(\bar{0})}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y}(\bar{0}) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{g(0,h)-g(\bar{0})}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Also:} \\ g \text{ bei } \bar{0} \\ \text{part. diffbar}\end{array}$$

$$\forall \bar{h}=(x,y): \frac{|\varphi(\bar{h})|}{\|\bar{h}\|} = \frac{1}{\|\bar{h}\|} |g(\bar{h}) - \underbrace{g(\bar{0})}_{=0} - 0 - 0| = \frac{1}{\|\bar{h}\|}|g(\bar{h})|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \left|\frac{x^3 y}{x^2+y^2}\right| = \underbrace{\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right|}_{\leq \frac{1}{2} \text{ nach 5.10 VL}} \cdot \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\leq \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{2}\|\bar{h}\| \xrightarrow[\bar{h}\to\bar{0}]{} 0$$

$$\underset{\substack{\text{Sandwich-} \\ \text{Prinzip}}}{\Longrightarrow} \lim_{\bar{h}\to\bar{0}} \frac{\varphi(\bar{h})}{\|\bar{h}\|} = 0$$

$$\underset{7.6}{\Longrightarrow} g \text{ ist (total) diffbar bei } \bar{a} = \bar{0}. \checkmark$$

Erinn: sei $f: D \to \mathbb{R}$ diffbar, $\bar{a} \in D \subset \mathbb{R}^n$ offen

1) $\operatorname{grad} f(\bar{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{a})\right) \in \mathbb{R}^n$ Gradient von $f$ bei $\bar{a}$

2) Sei $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$, $\|\bar{v}\| = 1$.

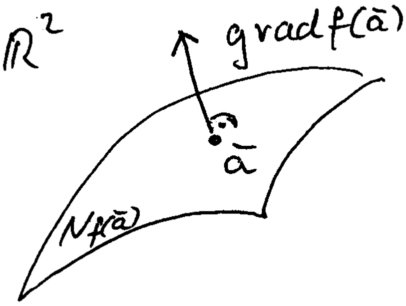
$$\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(\bar{a}) := \lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{a}+h\bar{v}) - f(\bar{a})}{h}$$ Ableitung von $f$ bei $\bar{a}$ in Richtung $\bar{v}$

8.3 -) $\operatorname{grad} f(\bar{a}) \neq \bar{0}$ zeigt in Richtung des größten Anstiegs von $f$ bei $\bar{a}$; dieser ist $\|\operatorname{grad} f(\bar{a})\|$

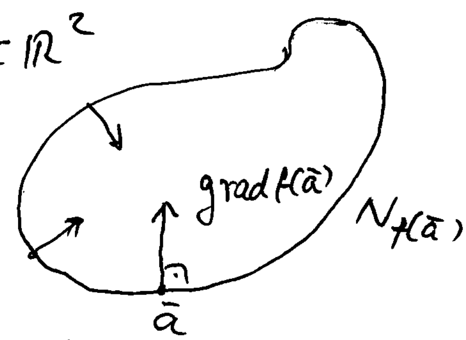
-) $\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(\bar{a}) = \langle \operatorname{grad} f(\bar{a}), \bar{v} \rangle$

8.4 $\operatorname{grad} f(\bar{a})$ steht senkrecht auf $N_{f(\bar{a})} := \{\bar{x} \in D \mid f(\bar{x}) \overset{!}{=} f(\bar{a})\}$

$D \subset \mathbb{R}^2$




$D \subset \mathbb{R}^2$




8.5 Für $\operatorname{grad} f(\bar{a}) \neq \bar{0}$ heißt

$$\begin{aligned} T_{\bar{a}} &:= \bar{a} + \operatorname{grad} f(\bar{a})^{\perp} \\ &= \{\bar{a} + \bar{u} \mid \bar{u} \in \mathbb{R}^n, \langle \operatorname{grad} f(\bar{a}), \bar{u} \rangle = 0\} \\ &= \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \operatorname{grad} f(\bar{a}), \bar{x} - \bar{a} \rangle = 0\} \end{aligned}$$

Tangentialraum an $N_{f(\bar{a})}$ im Punkt $\bar{a}$

**Aufg 8.3:** Sei $A = A^T = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$q(\bar{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \quad \text{zugehör. quad. Form}$$

**Zeige:** $q$ ist (total) diffbar, und es gilt:

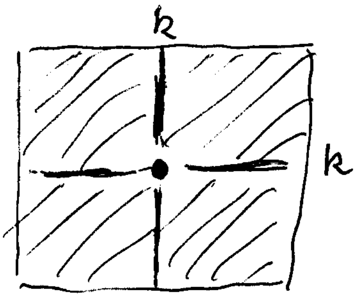
$$\operatorname{grad} q(\bar{x}) = 2 \bar{x} A$$

**Lösung**

$q(\bar{x})$ Polynom in $x_1, \ldots, x_n \Rightarrow q$ $C^1$-Fkt, also diffbar (nach 7.7)

Sei $k \in \{1, \ldots, n\}$ fest.

$$q(\bar{x}) = a_{kk} x_k^2 + 2\Big(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} a_{ik} x_i\Big) x_k + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i,j \neq k}}^{n} a_{ij} x_i x_j$$




$$\Rightarrow \frac{\partial q}{\partial x_k}(\bar{x}) = 2 a_{kk} x_k + 2 \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} a_{ik} x_i + 0$$

$$= 2 \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ik} = 2 \cdot (\text{Zeile } \bar{x}) \cdot (\text{k-te Spalte v. } A)$$

$$= \text{k-ter Eintrag von } 2 \bar{x} A \quad \checkmark$$

**Beisp:** $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$

$$q(x,y) = 3x^2 + 2 \cdot 2xy - 5y^2$$

$$\operatorname{grad} q(x,y) = (6x + 4y, 4x - 10y)$$

$$2(x,y)A = 2(x,y) \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} = 2(3x + 2y, 2x - 5y)$$

$$= (6x + 4y, 4x - 10y) = \operatorname{grad} q(x,y).$$

Aufg 8.4: Sei $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = 3xy^2 + x^2 e^y$$

Bestimme für $\bar{a} = (3,0)$

1) $\operatorname{grad} f(\bar{a})$,

2) $\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(\bar{a})$ für $\bar{v} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}\right)$.

Lösung

1) $\operatorname{grad} f(x,y) = (3y^2 + 2xe^y, \; 6xy + x^2 e^y)$

$\Rightarrow \operatorname{grad} f(\bar{a}) = \operatorname{grad} f(3,0) = (0 + 6 \cdot e^0, 0 + 9 \cdot e^0)$

$= \underline{(6,9)}$

2) $\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(\bar{a}) = \langle \operatorname{grad} f(\bar{a}), \bar{v} \rangle$

$\overset{8.3}{=} \left\langle (6,9), \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}\right) \right\rangle = 6 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + 9 \cdot \frac{-1}{\sqrt{5}}$

$= \frac{12}{\sqrt{5}} + \frac{-9}{\sqrt{5}} = \underline{\underline{\frac{3}{\sqrt{5}}}}$

✓

Aufg 8.5 Berechne für $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und $\bar{a} \in \mathbb{R}^3$ (wie angegeb.) die Tangentialebene $T_{\bar{a}}$ an $N_{f(\bar{a})}$ im Punkt $\bar{a}$.

Erinn: $T_{\bar{a}} = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \operatorname{grad} f(\bar{a}), \bar{x}-\bar{a} \rangle = 0 \}$

1) $f(x,y,z) = 3x^2 + 2y^2 + z^2 - xy - yz$, $\bar{a} = (1,2,3)$

Lösung

$f(\bar{a}) = f(1,2,3) = 3+8+9-2-6 = 12 \Rightarrow \bar{a} \in N_{12}$

$\operatorname{grad} f(x,y,z) = (6x-y, 4y-x-z, 2z-y)$

$\Rightarrow \operatorname{grad} f(\bar{a}) = \operatorname{grad} f(1,2,3) = (6-2, 8-1-3, 6-2) = (4,4,4)$

$$\begin{aligned}(x,y,z) \in T_{\bar{a}} \Leftrightarrow 0 &= \langle \operatorname{grad} f(\bar{a}), (x,y,z) - \bar{a} \rangle \\ &= \langle (4,4,4), (x-1, y-2, z-3) \rangle \\ &= 4x - 4 + 4y - 8 + 4z - 12 \\ &= 4x + 4y + 4z - 24 \\ \Leftrightarrow \quad & x+y+z = 6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow T_{\bar{a}} &= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 6 \} \\ &= \{ (x,y,6-x-y) \mid x,y \in \mathbb{R} \}\end{aligned}$$

alternativ $\Rightarrow = (1,2,3) + \mathbb{R}(1,-1,0) + \mathbb{R}(0,1,-1)$ $\left(\bar{a} + \operatorname{grad} f(\bar{a})^{\perp}\right)$

2) $f(x,y,z) = e^x - yz$, $\bar{a} = (1,1,e)$

Lösung

$f(\bar{a}) = f(1,1,e) = e^1 - 1 \cdot e = 0 \Rightarrow \bar{a} \in N_0$

$\operatorname{grad} f(x,y,z) = (e^x, -z, -y)$

$\Rightarrow \operatorname{grad} f(\bar{a}) = \operatorname{grad} f(1,1,e) = (e, -e, -1)$

$$\begin{aligned}(x,y,z) \in T_{\bar{a}} \Leftrightarrow 0 &= \langle \operatorname{grad} f(\bar{a}), (x,y,z) - \bar{a} \rangle \\ &= \langle (e,-e,-1), (x,y,z) - (1,1,e) \rangle \\ &= ex - ey - z - (e - e - e) \\ &= ex - ey - z + e \\ \Leftrightarrow \quad & z = ex - ey + e\end{aligned}$$

$\Rightarrow T_{\bar{a}} = \{ (x, y, \underbrace{ex - ey + e}_{(x-y+1)e}) \mid x,y \in \mathbb{R} \}$ ✓

## Aufg 9.1 Bestimme Hesse-Matrix $H_f(\bar{a})$ <u>Übung 8.1.24</u>

<u>Erinn:</u> $H_f(\bar{a}) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{a})\right] \in \mathbb{R}^{n \times n}$

1) $f(x,y) = 3xy^2 + x^2 e^y$, $D = \mathbb{R}^2$, $\bar{a} = (3,0)$

$\operatorname{grad} f(x,y) = (3y^2 + 2xe^y,\ 6xy + x^2 e^y)$

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 2e^y & 6y + 2xe^y \\ 6y + 2xe^y & 6x + x^2 e^y \end{bmatrix}$$

$\partial/\partial x$ $\partial/\partial y$ $\partial/\partial x$ $\partial/\partial y$

$$\Rightarrow H_f(\bar{a}) = H_f(3,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0+6 \\ 0+6 & 18+9 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 27 \end{bmatrix}}}$$

2) $f(x,y) = x^2 \sin(y)$, $D = \mathbb{R}^2$, $\bar{a} = (1, \frac{\pi}{4})$

$\operatorname{grad} f(x,y) = (2x \sin(y),\ x^2 \cos(y))$

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 2\sin(y) & 2x\cos(y) \\ 2x\cos(y) & -x^2 \sin(y) \end{bmatrix}$$

$\sin(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$$\Rightarrow H_f(\bar{a}) = H_f(1, \tfrac{\pi}{4}) = \underline{\underline{\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}}} = \sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

✓

Erinn: Für $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt:

$q_A$ pos. def. $\iff$ $\det A > 0 \wedge a > 0$
(neg. def) $\quad$ ($\det A > 0 \wedge a < 0$)

$q_A$ indef. $\iff$ $\det A < 0$

Aufg 9.2 Untersuche $q_A$ auf Definitheit für folg. A

| $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$ | $\det A$ | $a$ | $q_A$ definit? |
|---|---|---|---|
| $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ | $8-9=-1<0$ | | indef. |
| $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ | $8-1=7>0$ | $4>0$ | pos. def. |
| $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ | $2-1=1>0$ | $-2<0$ | neg. def. |
| $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ | $0-9=-9<0$ | | indef. |
| $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$ | $27-25=2>0$ | $3>0$ | pos. def. |

✓

# Aufg 10.1 Bestimme folg. Integrale

1) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = ?$

Mit Substitution $u = 4-x^2$

$du = -2x\,dx$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int_{u(0)}^{u(1)} \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = -\frac{1}{2}\int_4^3 u^{-\frac{1}{2}}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\int_3^4 u^{-1/2}\,du = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1/2}\,u^{1/2}\Big|_3^4$$

$$= \sqrt{4}-\sqrt{3} = \underline{\underline{2-\sqrt{3}}}$$

2) $\int_0^\infty (3x+5)\,e^{-x}\,dx = ?$

$$\int_0^b \underset{g}{(3x+5)}\,\underset{f'}{e^{-x}}\,dx \underset{\text{part. Int.}}{=} (3x+5)(-e^{-x})\Big|_0^b - \underbrace{\int_0^b 3\,(-e^{-x})\,dx}_{3\,e^{-x}\big|_0^b}$$

$$= -(3x+5+3)\,e^{-x}\Big|_0^b$$

$$= -(3x+8)\,e^{-x}\Big|_0^b = -(3b+8)\,e^{-b} + \underbrace{8\cdot e^{-0}}_{8}$$

$$= 8 - \frac{3b+8}{e^b}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty (3x+5)\,e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b (3x+5)\,e^{-x}\,dx$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(8 - \frac{3b+8}{e^b}\right) = 8-0 = \underline{\underline{8}}$$

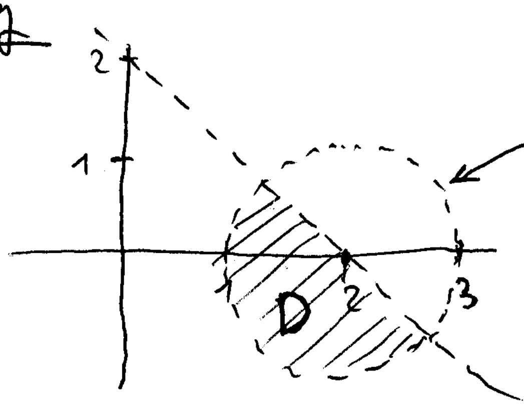
✓

## Aufg 10.2

Zeichne D, und kläre, ob D offen bzw abgeschl. ist.

$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2 + y^2 < 1,\ y < 2-x \} \subset \mathbb{R}^2$$

## Lösung




(Kreis mit Radius 1 und Mittelpkt (2,0))

(Allgemein: $(x-a)^2+(y-b)^2 = R^2$ (*) (s.u.) Kreis um $(a,b)$ mit Rad. $R$)

Beh: D ist offen, aber nicht abgeschlossen.

Doffen: $D = D_1 \cap D_2$, wobei

$$D_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \underbrace{(x-2)^2+y^2}_{=:f(x,y)\text{ stetig.}} < 1\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid f(x,y) \in \underbrace{\mathbb{R}_{<1}}_{\text{offen}}\}$$

$= f^{-1}(\mathbb{R}_{<1})$ stetiges Urbild der offenen Menge $\mathbb{R}_{<1}$, also offen (nach VL 6.2)

$$D_2 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y < 2-x\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \underbrace{y+x}_{=:g(x,y)\text{ stetig.}} < 2\}$$

$$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid g(x,y) \in \underbrace{\mathbb{R}_{<2}}_{\text{offen}}\}$$

$= g^{-1}(\mathbb{R}_{<2})$ stetiges Urbild von offener Menge, also offen.

$D_1, D_2$ offen $\Longrightarrow D = D_1 \cap D_2$ offen.

---

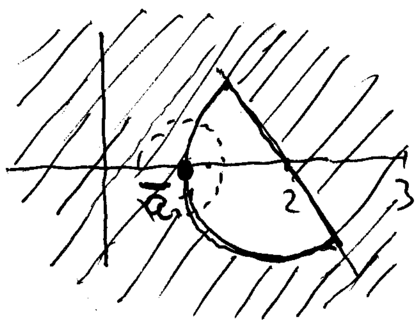
zu (*): $\underbrace{(x-a)^2+(y-b)^2}_{\|(x,y)-(a,b)\|^2} = R^2 \iff \|(x,y)-(a,b)\| = R$

$\iff (x,y)$ hat Abstand $R$ von $(a,b)$

<u>D nicht abg.</u>: <u>zeigen</u>: $\mathbb{R}^2 \setminus D$ ist nicht offen.

<u>Erinn</u>: $\mathbb{R}^2\setminus D$ offen $\Leftrightarrow \forall \bar{a} \in \mathbb{R}^2\setminus D\ \exists \varepsilon>0 : \mathcal{U}_\varepsilon(\bar{a}) \subset \mathbb{R}^2\setminus D$

$\neg(\mathbb{R}^2\setminus D \text{ offen}) \Leftrightarrow \exists \bar{a} \in \mathbb{R}^2\setminus D\ \forall \varepsilon>0 : \mathcal{U}_\varepsilon(\bar{a}) \not\subset \mathbb{R}^2\setminus D$




$\mathbb{R}^2\setminus D$

Betrachte $\bar{a} := (1,0) \in \mathbb{R}^2\setminus D$

$\forall \varepsilon>0$: $(1+\frac{\varepsilon}{2}, 0) \in \mathcal{U}_\varepsilon(\bar{a})$, aber $(1+\frac{\varepsilon}{2},0) \notin \mathbb{R}^2\setminus D$
$(\varepsilon<2)$

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0 : \mathcal{U}_\varepsilon(\bar{a}) \not\subset \mathbb{R}^2\setminus D$

Also: $\mathbb{R}^2\setminus D$ nicht offen und somit D nicht abg.

<u>Alternativ</u>

<u>Erinn</u>: D abg. $\overset{}{\underset{6.5.4)}{\Leftrightarrow}}$ $\forall (\bar{x}_k)_k$ konv. Folge in D: $\lim_{k\to\infty} \bar{x}_k \in D$

Für die Folge $(\bar{x}_k := (1+\frac{1}{k}, 0))_{k\geq 2}$ gilt:

$(\bar{x}_k)_{k\geq 2}$ ist Folge in D

mit $\lim_{k\to\infty} \bar{x}_k = \lim_{k\to\infty}(1+\frac{1}{k}, 0) = (1,0) \notin D$

Also ist D nicht abgeschlossen. ✓

<u>Aufg 10.3</u> Untersuche $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, <u>Übung 15.1.24</u>

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - xy^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{"} \quad (x,y) = (0,0) = \bar{0} \end{cases}$$

bei $\bar{a} = \bar{0}$ auf Stetigkeit, partielle und totale Diffbarkeit
1) 2) 3)

<u>Lösung</u>

1) <u>Beh:</u> $f$ ist stetig in $\bar{a} = \bar{0}$

<u>zu zeigen:</u> $\lim\limits_{\bar{x} \to \bar{0}} f(\bar{x}) \overset{!}{=} f(\bar{0}) = 0$

Sei $((x_k, y_k))_k$ Folge in $\mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\}$ mit $(x_k, y_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} (0,0)$

$$\Rightarrow |f(x_k,y_k)| = \left| x_k \cdot \frac{x_k^2 - y_k^2}{x_k^2 + y_k^2} \right| \underset{\Delta\text{-Ung.}}{\leq} |x_k| \cdot \Bigg( \underbrace{\frac{x_k^2}{x_k^2+y_k^2}}_{\leq 1} + \underbrace{\frac{|-y_k^2|}{x_k^2+y_k^2}}_{\leq 1} \Bigg)$$

(Alternativ benutze $\dfrac{|x_k^2 - y_k^2|}{x_k^2+y_k^2} \leq 1$)

$$\leq 2|x_k| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

$\underset{\text{Sandw.}}{\Longrightarrow} |f(x_k,y_k)| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, d.h. $f(x_k,y_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 = f(\bar{0})$

2) <u>Beh:</u> $f$ ist bei $\bar{a} = \bar{0}$ partiell diffbar.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{0}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(\bar{0})}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h^3 - 0}{h^2 + 0^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = \underline{1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{0}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(\bar{0})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0 - 0}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = \underline{0}$$

Also: $f$ bei $\bar{a} = \bar{0}$ part. diffbar.

3) <u>Beh:</u> $f$ ist bei $\bar{a} = \bar{0}$ nicht total diffbar.

<u>zeigen:</u> $\dfrac{\varphi(\bar{h})}{\|\bar{h}\|} = \dfrac{1}{\|\bar{h}\|} \left( f(\bar{0} + \bar{h}) - f(\bar{0}) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(\bar{0}) h_1 - \dfrac{\partial f}{\partial y}(\bar{0}) h_2 \right) \not\xrightarrow[\bar{h}\to\bar{0}]{} 0$

$\forall \bar{h} = (x,y) \neq (0,0)$: $\dfrac{\varphi(\bar{h})}{\|\bar{h}\|} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \left( \dfrac{x^3 - xy^2}{x^2+y^2} - 0 - 1\cdot x - 0 \cdot y \right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{x^3 - xy^2 - x^3 - xy^2}{x^2+y^2} = \frac{-2xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} \quad (*)$$

Betrachte die $\bar{0}$-Folge $(\bar{h}_k = (1/k, 1/k))_k$

$$\Rightarrow \frac{\varphi(\bar{h}_k)}{\|\bar{h}_k\|} \underset{(*)}{=} \frac{-2 \cdot 1/k \cdot 1/k^2}{(1/k^2 + 1/k^2)^{3/2}} = \frac{-2 \cdot 1/k^3}{2^{3/2} \cdot 1/k^3} = \frac{-2}{2^{3/2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \neq 0$$

$$\Longrightarrow \lim_{\bar{h} \to \bar{0}} \frac{\varphi(\bar{h})}{\|\bar{h}\|} \neq 0$$

Aufg 10.4: sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 2x^2y - xy^3$

Berechne für $\bar{a} = (1,1)$

1) $\operatorname{grad} f(\bar{a})$

2) die lineare Approximation von $f$ bei $\bar{a}$,

3) die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(\bar{a})$ für $\bar{v} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

4) die Hesse-Matr. $H = H_f(\bar{a})$ und die quad Form $q_H$.

Lösung

$$f(x,y) = 2x^2y - xy^3$$

1) $\operatorname{grad} f(x,y) = (4xy - y^3, 2x^2 - 3xy^2)$

$\Rightarrow \operatorname{grad} f(\bar{a}) = \operatorname{grad} f(1,1) = (4-1, 2-3) = \underline{(3,-1)}$

2) $g(\bar{a}+\bar{h}) = f(\bar{a}) + \langle \operatorname{grad} f(\bar{a}), \bar{h} \rangle$ Lin. Approx von $f$ bei $\bar{a}$

$f(\bar{a}) = f(1,1) = 2 - 1 = 1$

$\Rightarrow g((1,1)+\bar{h}) = 1 + \langle (3,-1), (h_1,h_2) \rangle$

$= \underline{1 + 3h_1 - h_2}$

oder für $(x,y) = (1,1) + (h_1,h_2) = (1+h_1, 1+h_2)$

$$g(x,y) = 1 + 3(x-1) - 1(y-1)$$

3) $\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(\bar{a}) \underset{8.3}{=} \langle \operatorname{grad} f(\bar{a}), \bar{v} \rangle = \langle (3,-1), (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \rangle$

$= \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

4) $\operatorname{grad} f(x,y) = (4xy - y^3, 2x^2 - 3xy^2)$

$\Rightarrow H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 4y & 4x-3y^2 \\ 4x-3y^2 & -6xy \end{bmatrix}$

$\Rightarrow H_f(1,1) = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -6 \end{bmatrix} = H$

$\Rightarrow q_H(x,y) = 4x^2 + 2xy - 6y^2$ ✓

$q_H(x,y) = [x\ y]\, H \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [x\ y] \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$= [x\ y] \begin{bmatrix} 4x+y \\ x-6y \end{bmatrix} = x(4x+y) + y(x-6y)$

**Aufg 10.5**: Sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 2y^3 + 3x^2 - 6xy$.

1) Bestimme die stationären Pkte von $f$.

2) Wo hat $f$ lok. Extrema bzw Sattelpkte?

**Lösung**

1) $\bar{a}$ stat. Pkt von $f \iff \operatorname{grad} f(\bar{a}) = (0,0)$

$\operatorname{grad} f(x,y) = (6x - 6y,\ 6y^2 - 6x)$

$\operatorname{grad} f(x,y) = (0,0) \iff 6x - 6y = 0 \wedge 6y^2 - 6x = 0$

$\iff x = y \wedge x = y^2$

$\Rightarrow y = y^2 \iff 0 = y^2 - y = y(y-1)$

$\iff y = 0 \vee y - 1 = 0$, d.h. $y = 1$

$\Downarrow$ $x = 0$ $\qquad$ $\Downarrow$ $x = 1$

Also hat $f$ genau zwei stationäre Punkte:

$\underline{\bar{a}_1 = (0,0)}$, $\underline{\bar{a}_2 = (1,1)}$

2) $H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 12y \end{bmatrix}$

$\underline{\bar{a}_1 = (0,0)}$: $H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$

$\det \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} = 0 - 36 = -36 < 0$

$\Rightarrow q_{H_f(0,0)}$ indefinit.

$\Rightarrow f$ hat bei $\bar{a}_1 = (0,0)$ einen Sattelpkt.

$\underline{\bar{a}_2 = (1,1)}$: $H_f(1,1) = \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} \det \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 12 \end{bmatrix} = 72 - 36 = 36 > 0 \\ a = 6 > 0 \end{array}\right\}$

$\Rightarrow q_{H_f(1,1)}$ positiv definit.

$\Rightarrow f$ hat bei $\bar{a}_2 = (1,1)$ ein lok. Minimum. ✓

**Aufg 11.1** Sei $f: \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ **Übung 22.1.24**

$$f(x,y) = x^y := e^{\ln(x) y}$$

Bestimme die lokalen Extrema und Sattelpkte von $f$

**Lösung**

I) **stationäre Pkte**

$$\operatorname{grad} f(x,y) = ( y x^{y-1} , \ln(x)\, x^y )$$

$\bar{a} = (x,y)$ stat. Pkt $\Longleftrightarrow y \underbrace{x^{y-1}}_{>0} = 0 \wedge \ln(x) \underbrace{x^y}_{>0} = 0$

$$\Leftrightarrow y = 0 \wedge \underbrace{\ln(x) = 0}_{\Updownarrow\ x=1}$$

$\Longrightarrow f$ hat genau einen stat. Pkt. $\underline{\bar{a} = (1,0)}$

II) $$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} y(y-1)x^{y-2} & x^{y-1}(1+y\ln(x)) \\ x^{y-1}(1+y\ln(x)) & \ln(x)^2 x^y \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(y x^{y-1}) = x^{y-1} + y \ln(x) x^{y-1} = x^{y-1}(1+y\ln(x))$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\ln(x) x^y) = \frac{1}{x} \cdot x^y + \ln(x)\, y x^{y-1} = x^{y-1}(1+y\ln(x))$$

$$\Rightarrow H_f(1,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1^{-1}(1+0) \\ 1^{-1}(1+0) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \leftarrow \det = -1 < 0$$

$\Rightarrow q_{H_f(1,0)}$ indefinit.

$\Rightarrow f$ hat bei $\bar{a} = (1,0)$ einen Sattelpkt. ✓

## Aufg 11.2

Sei $f : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x,y) = x^y = e^{\ln(x)y}$ (wie in 11.1)

1) Zeige

$$\forall b \neq 0 : \lim_{(x,y)\to(0,b)} e^{\ln(x)y} = \begin{cases} 0, & \text{falls } b > 0 \\ +\infty, & \text{"} \quad b < 0 \end{cases}$$

Lösung

Sei $b \neq 0$ und $((x_k, y_k))_k$ Folge in $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$ mit $(x_k, y_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} (0,b)$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \ln(x_k) y_k \underset{\lim\limits_{x\searrow 0} \ln(x) = -\infty}{=} (-\infty)\cdot b = \begin{cases} -\infty & \text{für } b > 0 \\ +\infty & \text{"} \quad b < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} e^{\ln(x_k) y_k} = \begin{cases} 0 & \text{für } b > 0, \text{ da } \lim\limits_{z\to-\infty} e^z = 0 \\ +\infty & \text{für } b < 0, \text{ da } \lim\limits_{z\to+\infty} e^z = +\infty \end{cases}$$

2) Zeige:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^y \text{ existiert nicht.}$$

genauer: $\forall c > 0 \ \exists$ Folge $((x_k, y_k))_k$ in $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$ mit

$$(x_k, y_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} (0,0) \quad \text{und} \quad x_k^{y_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} c$$

Lösung

Wir unterscheiden 3 Fälle

Fall $0 < c < 1$: Betrachte $(x_k, y_k) := (c^k, \frac{1}{k})$ für $k \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow (x_k, y_k) = (c^k, \tfrac{1}{k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} (0,0)$$

und $x_k^{y_k} = (c^k)^{1/k} = c^{k\cdot 1/k} = c \xrightarrow[k\to\infty]{} c$

Fall $c > 1$: $\Rightarrow 0 < \frac{1}{c} < 1$. Betrachte $(x_k, y_k) := \left(\frac{1}{c^k}, -\frac{1}{k}\right)$ für $k \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow (x_k, y_k) = \left(\left(\tfrac{1}{c}\right)^k, -\tfrac{1}{k}\right) \xrightarrow[k\to\infty]{} (0,0)$$

und $x_k^{y_k} = \left(\frac{1}{c^k}\right)^{-\frac{1}{k}} = (c^{-k})^{-\frac{1}{k}} = c^{(-k)\cdot(-\frac{1}{k})} = c^1 \xrightarrow[k\to\infty]{} c$

<u>Fall $c = 1$</u>: Betrachte $(x_k, y_k) := (\frac{1}{k}, 0)$ für $k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow (x_k, y_k) = (\frac{1}{k}, 0) \xrightarrow[k\to\infty]{} (0,0)$

und $x_k^{y_k} = (\frac{1}{k})^0 = 1 \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$ ✓

<u>Fazit</u>: Die Funktion $f(x,y) = x^y$ ist in allen Punkten $(0,y)$ mit $y > 0$ stetig fortsetzbar durch:

$$f(0,y) = 0^y := 0$$

Aber: für $y \leq 0$ ist $f$ nicht stetig fortsetzbar im Punkt $(0,y)$, insbesondere nicht in $(0,0)$.

<u>Bemerkung</u>: In der Analysis setzt man oft

$$0^0 := 1$$

Das ist eine Setzung (Vereinbarung), die in einigen Fällen recht nützlich ist, z.B.

$$\exp(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{0^k}{k!} = \underbrace{\frac{0^0}{0!}}_{1} + \underbrace{\frac{0^1}{1!} + \frac{0^2}{2!} + \cdots}_{0} = 1$$

Eine logische Notwendigkeit für $0^0 = 1$ gibt es nicht.

Aufg 12.1 Übung 29.1.24

Seien $f, g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Abbildungen

$$f(r,\vartheta,\varphi) = (r\sin\vartheta\cos\varphi, r\sin\vartheta\sin\varphi, r\cos\vartheta)$$

$$g(r,\varphi,z) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$$

1) Berechne $J_f(r,\vartheta,\varphi)$ und $J_g(r,\varphi,z)$

Lösung

$$g(r,\varphi,z) = (\underbrace{r\cos\varphi}_{g_1}, \underbrace{r\sin\varphi}_{g_2}, \underbrace{z}_{g_3})$$

$$J_g = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial r} & \frac{\partial g_1}{\partial \varphi} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial r} & \frac{\partial g_2}{\partial \varphi} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \\ \frac{\partial g_3}{\partial r} & \frac{\partial g_3}{\partial \varphi} & \frac{\partial g_3}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f(r,\vartheta,\varphi) = (\underbrace{r\sin\vartheta\cos\varphi}_{f_1}, \underbrace{r\sin\vartheta\sin\varphi}_{f_2}, \underbrace{r\cos\vartheta}_{f_3})$$

$$J_f = \begin{bmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \end{bmatrix}$$

2) Berechne $J_f(\bar{a})$ für $\bar{a} = (2, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6})$

$r = 2$

$\vartheta = \pi/2 \Rightarrow \sin\vartheta = 1 \quad \cos\vartheta = 0$

$\varphi = \pi/6 \Rightarrow \sin\varphi = 1/2 \quad \cos\varphi = \sqrt{3}/2$

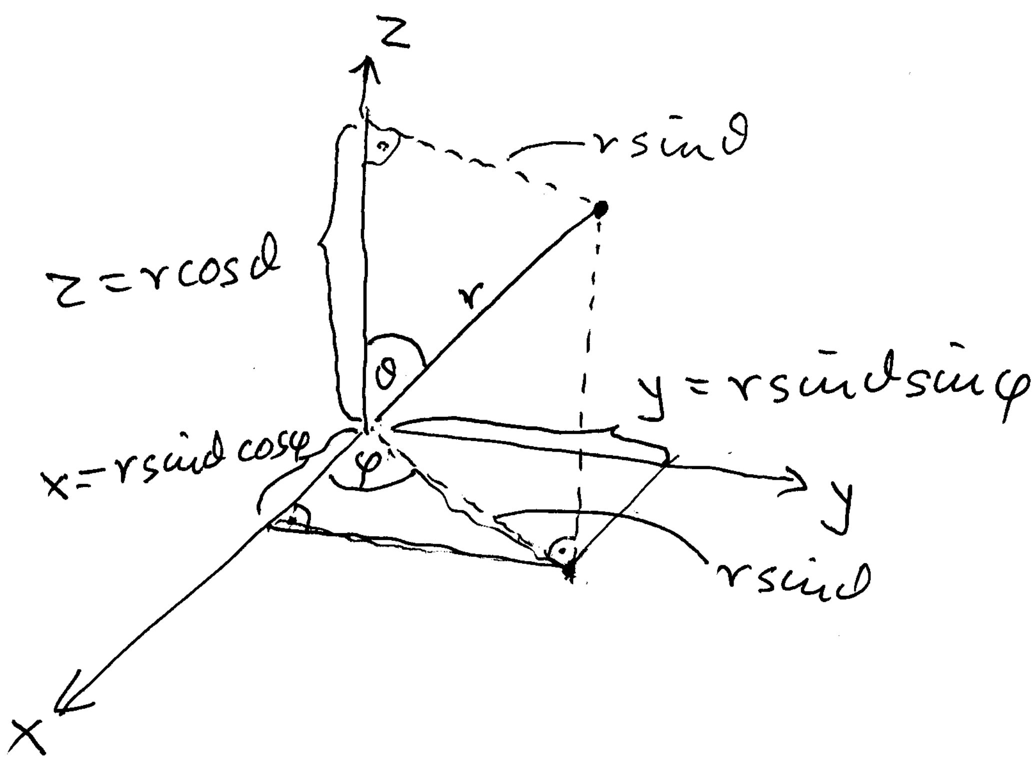
$$\Rightarrow J_f(\bar{a}) = \begin{bmatrix} 1\cdot\sqrt{3}/2 & 2\cdot 0\cdot\sqrt{3}/2 & -2\cdot 1\cdot 1/2 \\ 1\cdot 1/2 & 2\cdot 0\cdot 1/2 & 2\cdot 1\cdot\sqrt{3}/2 \\ 0 & -2\cdot 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & -1 \\ 1/2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Berechne $J_g(\bar{b})$ für $\bar{b} = (2, \pi/3, 4)$

$r = 2,\ \varphi = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{1}{2},\ \sin\varphi = \sqrt{3}/2,\ z = 4$

$$\Rightarrow J_g(\bar{b}) = \begin{bmatrix} 1/2 & -2\cdot\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 2\cdot 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}} \checkmark$$

Warum heißt f Kugelkoordinaten-Abb.?



Erinn

7.11 Kettenregel: Sei $\underset{\overset{\Psi}{\bar a}}{D} \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} \mathbb{R}^l$

$\Rightarrow J_{g\circ f}(\bar a) = J_g(f(\bar a)) \cdot J_f(\bar a)$ Mat.-Mult.

Aufg 12.2: Seien $f, g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f(u,v) = (3uv^3 - u^2 v,\ u^2 - 3uv^2)$$
$$g(x,y) = (\sqrt{x^2+y^2},\ x^2 y - 2y^2)$$

1) Berechne $J_{g\circ f}(2,1)$ und $J_{f\circ g}(0,1)$

Lösung

$$J_f(u,v) = \begin{bmatrix} 3v^3 - 2uv & 9uv^2 - u^2 \\ 2u - 3v^2 & -6uv \end{bmatrix}$$

$$J_g(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 2xy & x^2 - 4y \end{bmatrix}$$

$$J_{g\circ f}(2,1) = J_g(\underbrace{f(2,1)}_{(2,-2)}) \cdot J_f(2,1)$$

$$f(2,1) = (6-4,\ 4-6) = (2,-2)$$

$$J_g(2,-2) = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{4+4}} & \frac{-2}{\sqrt{4+4}} \\ -8 & 4+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt2 & -1/\sqrt2 \\ -8 & 12 \end{bmatrix}$$

$$J_f(2,1) = \begin{bmatrix} 3-4 & 18-4 \\ 4-3 & -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 14 \\ 1 & -12 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow J_{g\circ f}(2,1) = \begin{bmatrix} 1/\sqrt2 & -1/\sqrt2 \\ -8 & 12 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 14 \\ 1 & -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/\sqrt2 & 26/\sqrt2 \\ 20 & -112-144 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\sqrt2 & 26/\sqrt2 \\ 20 & -256 \end{bmatrix}$$

$$J_{f\circ g}(0,1) = \begin{bmatrix} 0 & -160 \\ 0 & -58 \end{bmatrix}$$

2) Bestimme die lineare Approximation h von f bei $\bar{a} = (2,2)$

Lösung

$h(\bar{a}+\bar{h}) = f(\bar{a}) + L_{\bar{a}}(\bar{h})$, wobei $Mat(L_{\bar{a}}) = J_f(\bar{a})$

$\bar{a} = (2,2)$: $f(2,2) = (48-8, 4-24) = (40,-20)$

$$Mat(L_{\bar{a}}) = J_f(2,2) = \begin{bmatrix} 24-8 & 72-4 \\ 4-12 & -24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 68 \\ -8 & -24 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow h((2,2)+(h_1,h_2)) = f(2,2) + L_{\bar{a}}(h_1,h_2)$$

$$= (40,-20) + (16h_1 + 68h_2, -8h_1 - 24h_2)$$

$$= (40 + 16h_1 + 68h_2, -20 - 8h_1 - 24h_2)$$

Test: $h((2,2)+(\frac{1}{10},\frac{1}{10})) = (40+1.6+6.8, -20-0.8-2.4)$

$$= (48.4, -23.2)$$

$f(2.1, 2.1) = (49.08, -23,37)$