Lösung zur Klausur
Analysis 1
Lehrkräfteweiterbildungskurs 14 Q SoSe 2025
Dozent: H.-J. von Höhne, Datum: 01.07.2025

Aufgabe 1 (7+7+6 Punkte)

1) Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_n$ auf Beschränktheit und auf Monotonie.

$$a_n \;=\; \frac{4n-2}{n+1}$$

2) Bestimmen Sie mit dem Sandwich-Prinzip den Grenzwert der Folge $(b_n)_n$.

$$b_n \;=\; \sqrt[n]{3^n + n2^n}$$

3) Berechnen Sie den Wert der folgenden Reihe.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 3^{\,k}}{5^{\,k+1}}$$

Lösung

1) Wir zeigen zuerst: $0 \le a_n \le 4$ für alle $n \in I\!N$, d.h. die Folge ist nach unten durch 0 und nach oben durch 4 beschränkt. Wegen $4n-2 \ge 0$ und $n+1 > 0$ ist $a_n = \frac{4n-2}{n+1} \ge 0$, und wegen $4n-2 \le 4n$ und $n+1 \ge n$ gilt: $a_n = \frac{4n-2}{n+1} \le \frac{4n}{n+1} \le \frac{4n}{n} = 4\,.$

Es ist $a_1 = 2/2 = 1 < 2 = 6/3 = a_2$. Somit ist zu untersuchen, ob $(a_n)_n$ monoton steigend ist, d.h. $a_n \le a_{n+1}$ für alle $n \in I\!N$. Wir formen äquivalent um: $a_n \le a_{n+1} \;\Leftrightarrow\; \frac{4n-2}{n+1} \le \frac{4n+2}{n+2}$ $\;\Leftrightarrow\; (4n-2)\,(n+2) \le (4n+2)\,(n+1) \;\Leftrightarrow\; 4n^2 + 6n - 4 \le 4n^2 + 6n + 2 \;\Leftrightarrow\; -4 \le 2\,.$ Die Aussage $-4 \le 2$ ist sicherlich richtig; also ist die Folge $(a_n)_n$ monoton steigend.

2) Wir stellen ein Sandwich mit $b_n = \sqrt[n]{3^n + n2^n}$ in der Mitte her. Für alle $n \in I\!N$ gilt $3^n \le 3^n + n2^n \le 3^n + n3^n \le n3^n + n3^n = 2\,n\,3^n$, und mit den Rechenregeln für die n-te Wurzel folgt: $3 = \sqrt[n]{3^n} \;\le\; \sqrt[n]{3^n + n2^n} \;\le\; \sqrt[n]{2\,n\,3^n} \;=\; \sqrt[n]{2}\;\sqrt[n]{n}\;\sqrt[n]{3^n} \;=\; \sqrt[n]{2}\;\sqrt[n]{n} \cdot 3$. Also erhalten wir:

$$3 \;\le\; b_n \;\le\; 3\,\sqrt[n]{2}\;\sqrt[n]{n}$$

Nun gilt $\lim \sqrt[n]{2} = 1$ und $\lim \sqrt[n]{n} = 1$, und mit dem Grenzwertsatz $\lim 3\,\sqrt[n]{2}\;\sqrt[n]{n} = 3 \cdot 1 \cdot 1 = 3\,.$ Aus $\lim 3 = \lim 3\,\sqrt[n]{2}\;\sqrt[n]{n} = 3$ folgt mit dem Sandwich-Prinzip: $\lim_{n\to\infty} b_n \;= 3\,.$

3) Wir führen erst eine Indextransformation durch und formen dann um mit den Potenzregeln, der Rechenregel 3.4 für konvergente Reihen und der Wertformel 3.3 für geometrische Reihen.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 3^{\,k}}{5^{\,k+1}} \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4 \cdot 3^{\,k+1}}{5^{\,k+2}} \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4 \cdot 3 \cdot 3^{\,k}}{5^{\,2}\;5^{\,k}} \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{12}{25}\,(\frac{3}{5})^{\,k}$$

$$=\; \frac{12}{25} \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{3}{5})^{\,k} \;=\; \frac{12}{25} \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{5}} \;=\; \frac{12}{25} \cdot \frac{1}{2/5} \;=\; \frac{12}{25} \cdot \frac{5}{2} \;=\; \frac{6}{5}$$

Aufgabe 2 (6+6 Punkte)

1) Bestimmen Sie folgenden Grenzwert, falls er existiert.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{3x+4}-2}{x}$$

2) Für welches $a \in I\!R$ ist folgende Funktion $f : I\!R \longrightarrow I\!R$ im Punkt $p = \pi$ stetig?

$$f(x) = \begin{cases} 1+\sin(x) & \text{für } x \le \pi, \\ \exp(x+a) & \text{für } x > \pi. \end{cases}$$

Lösung

1) Wir formen den zu betrachtenden Funktionsterm um, indem wir ihn erweitern, dann die dritte Binomische Formel anwenden und schließlich kürzen.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3x+4}-2}{x} &= \frac{\sqrt{3x+4}-2}{x} \cdot \frac{\sqrt{3x+4}+2}{\sqrt{3x+4}+2} \\ &= \frac{(\sqrt{3x+4})^2 - 2^2}{x\,(\sqrt{3x+4}\ +2)} = \frac{(\,3x+4\,)-4}{x\,(\sqrt{3x+4}\ +2)} \\ &= \frac{3\,x}{x\,(\sqrt{3x+4}\ +2)} = \frac{3}{\sqrt{3x+4}\ +2} \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Grenzwertsätze und der Stetigkeit der Funktion $\sqrt{3x+4}$ erhalten wir:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{3x+4}\ -2}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{3}{\sqrt{3x+4}\ +2} = \frac{3}{\sqrt{3\cdot 0+4}+2} = \frac{3}{2+2} = \frac{3}{4}$$

2) Nach Definiton ist f stetig in $p = \pi$ genau dann, wenn gilt: $\lim_{x\to\pi} f(x) = f(\pi)$.

Nach 5.11 ist das äquivalent zu: $\lim_{x\nearrow\pi} f(x) = f(\pi) = \lim_{x\searrow\pi} f(x)$

Wir berechnen $f(\pi)$ und die einseitigen Grenzwerte $\lim_{x\nearrow\pi} f(x)$ und $\lim_{x\searrow\pi} f(x)$.

$$f(\pi) = 1+\sin(\pi) = 1+0 = 1$$

Da die Funktionen $1+\sin(x)$ und $\exp(x+a)$ stetig sind, erhalten wir:

$$\lim_{x\nearrow\pi} f(x) = \lim_{x\nearrow\pi} (1+\sin(x)) = 1+\sin(\pi) = f(\pi)$$

und

$$\lim_{x\searrow\pi} f(x) = \lim_{x\searrow\pi} \exp(x+a) = \exp(\pi+a)\,.$$

Somit gilt: $\lim_{x\searrow\pi} f(x) = f(\pi) \iff \exp(\pi+a) = 1$

$\iff \pi + a = \ln(1) = 0$, d.h. $a = -\pi$.

Also ist f genau dann in $p = \pi$ stetig, wenn gilt: $a = -\pi$.

Aufgabe 3 (6+6 Punkte)

1) Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktion $f : I\!R \longrightarrow I\!R$.

$$f(x) \;=\; 2\,x^3\cos(4x) + 3^{\,x} + \sqrt{e^{-4x}+5}$$

2) Untersuchen Sie, ob folgende Funktion $g : I\!R \longrightarrow I\!R$ im Punkt $p=0$ differenzierbar ist.

$$g(x) \;=\; x\,(|\,x| - 1)$$

Lösung

1) Wir leiten zunächst die drei Summanden von f separat ab.
Mit der Produktregel erhalten wir:

$$(2\,x^3\cos(4x))\,' \;=\; 2\cdot 3\,x^2\,\cos(4x) \;+\; 2\,x^3\,4\,(-\sin(4x)) \;=\; 6\,x^2\cos(4x) - 8\,x^3\sin(4x)$$

Weiter gilt: $(3^{\,x})\,' = \;\ln(3)\,3^{\,x}$, und die Kettenregel liefert:

$$(\sqrt{e^{-4x}+5})\,' \;=\; \frac{1}{2\sqrt{e^{-4x}+5}}\cdot(e^{-4x}+5)\,' \;=\; \frac{1}{2\sqrt{e^{-4x}+5}}\cdot(-4)\,e^{-4x} \;=\; \frac{-2\,e^{-4x}}{\sqrt{e^{-4x}+5}}$$

Schließlich folgt mit der Summenregel:

$$f\,'(x) \;=\; 6\,x^2\cos(4x) - 8\,x^3\sin(4x) \;+\; \ln(3)\,3^{\,x} \;-\; \frac{2\,e^{-4x}}{\sqrt{e^{-4x}+5}}$$

2) Da die Betragsfunktion in $p=0$ nicht differenzierbar ist, können wir nicht die Ableitungsregeln anwenden, sondern müssen die definierende Eigenschaft für Differenzierbarkeit überprüfen. Die Funktion g ist in $p=0$ genau dann differenzierbar, wenn folgender Grenzwert existiert:

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}$$

Wir berechnen den Differenzenquotienten

$$\frac{g(x)-g(0)}{x-0} \;=\; \frac{x\,(|\,x|-1) - 0\,(|\,0|-1)}{x-0} \;=\; \frac{x\,(|\,x|-1)}{x} \;=\; |\,x| - 1$$

und erhalten wegen der Stetigkeit der Betragsfunktion:

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} \;=\; \lim_{x\to 0}\,(\,|\,x| - 1\,) \;=\; |\,0| - 1 \;=\; -1$$

Somit ist g in $p=0$ differenzierbar mit $g'(0) = -1$.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Untersuchen Sie, ob folgende Reihe konvergent ist.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^{2} \cdot 3^{k}}$$

Lösung

Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt für das k-te Reihenglied a_k folgende Abschätzung:

$$a_k \;=\; \frac{k+1}{k^2\,3^k} \;\leq\; \frac{k+k}{k^2\,3^k} \;=\; \frac{2k}{k^2\,3^k} \;=\; \frac{2}{k\,3^k} \;\leq\; \frac{2}{3^k} \;=\; 2\,(\frac{1}{3})^k$$

Die "geometrische" Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{3})^k$ ist wegen $0 \leq 1/3 < 1$ konvergent; also ist auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 2\,(\frac{1}{3})^k$ konvergent. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ hat also eine konvergente Majorante und ist somit nach dem Majoranten-Kriterium konvergent.

Alternativ berechnet man mit Ausklammern von k bzw. k^2 und Kürzen:

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \;=\; \frac{k+2}{(k+1)^2\,3^{k+1}} \cdot \frac{k^2\,3^k}{k+1} \;=\; \frac{1}{3} \cdot \frac{k^3\,(1+\frac{2}{k})}{k^3\,(1+\frac{1}{k})^3} \;=\; \frac{1}{3} \cdot \frac{1+\frac{2}{k}}{(1+\frac{1}{k})^3}$$

Es folgt: $\lim_{k\to\infty} |a_{k+1}/a_k| \;=\; \frac{1}{3} \cdot \frac{1+0}{(1+0)^3} \;=\; \frac{1}{3} < 1$. Also ist nach dem Quotienten-Kriterium die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent.

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Untersuchen Sie, in welchen Bereichen folgende Funktion $f : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}$ monoton steigend bzw. monoton fallend ist.

$$f(x) \;=\; \frac{\ln(x)}{x}$$

Lösung

Die Funktion f ist differenzierbar, und mit der Quotientenregel folgt für die Ableitung:

$$f\,'(x) \;=\; \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln(x)\cdot 1}{x^2} \;=\; \frac{1-\ln(x)}{x^2}$$

Nun untersuchen wir, wo $f\,'(x) \geq 0$ bzw. $f\,'(x) \leq 0$ gilt. Wegen $x^2 > 0$ für $x > 0$ reicht es, den Zähler zu betrachten; wir erhalten:

$$f\,'(x) \geq 0 \iff 1-\ln(x) \geq 0 \iff \ln(x) \leq 1 \iff x \leq e$$

und

$$f\,'(x) \leq 0 \iff 1-\ln(x) \leq 0 \iff \ln(x) \geq 1 \iff x \geq e\,.$$

Mit 6.14 folgt: f ist monoton steigend auf $]\,0\,,\,e\,]$ und monoton fallend auf $[\,e\,,\,+\infty\,[$.