# Analysis 1, Kurs 14Q (LWB) — SoSe 2025

Dozent: H.-J. von Höhne ©

Homepage: page.mi.fu-berlin.de/hoehneze/SS2025/LWB/hopa_ana1_SS2025.html

## Inhalt

-) die reellen Zahlen, Vollständigkeit

-) Grenzwerte von Folgen

-) Reihen

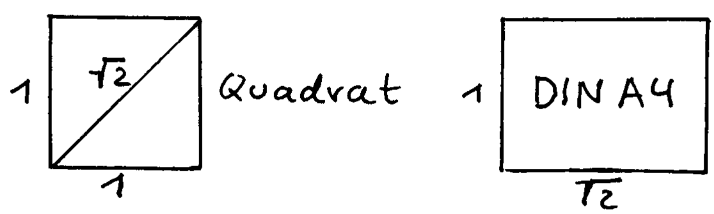
-) Stetige Funktionen (Grenzwert, ZWS, Satz v. Min., Max.)

-) Differentialrechnung (Ableitung, Mittelwert-Satz u. Anwend.)

## Auftakt

$\sqrt{2} :=$ positive Lösung von $x^2 = 2$

$\approx 1{,}4142\ldots$




<u>Satz</u>: $\sqrt{2}$ ist irrational, d.h. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

<u>Bew</u>: Indirekt. <u>Annahme</u>: $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{m}{n}$, wobei $m, n \in \mathbb{N}$ teilerfremd

$\Rightarrow 2 = \frac{m^2}{n^2}$

$\Rightarrow m^2 = 2n^2$ gerade

$\Rightarrow m$ gerade, d.h. $m = 2k$ für ein $k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow 4k^2 = (2k)^2 = 2n^2$

$\Rightarrow n^2 = 2k^2$ gerade

$\Rightarrow n$ gerade

Also: $m, n$ beide gerade. Wid zu $m, n$ teilerfremd! ✓

# § 1 Die reellen Zahlen

Ziel: Regeln für das Arbeiten mit reellen Zahlen.
Axiomensystem
"$\mathbb{R}$ ist ein vollständig (3) geordneter (2) Körper (1)."

(1) Grundrechenarten
(2), (3) $\mathbb{R}$ als Zahlengerade   neg. 0 pos.

## 1.1 Körper

Def: Ein Körper ist eine Menge $K$ mit zwei Abbildungen (Verknüpf. auf $K$)

$+ : K \times K \to K$ "Addition",
$(a,b) \mapsto a+b := +(a,b)$
$\cdot : K \times K \to K$ "Multiplikation",
$(a,b) \mapsto a \cdot b (= ab) := \cdot(a,b)$

die folgende Bedingungen (Körperaxiome) erfüllen.

| | Addition | Multiplik. |
|---|---|---|
| Kommutativ Ges. | $a+b = b+a$ | $a \cdot b = b \cdot a$ |
| Assoziativ Ges | $(a+b)+c = a+(b+c)$ | $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$ |
| Existenz von neutralen Elem. | $\exists 0 \in K\ \forall a \in K: a+0 = a$ | $\exists 1 \in K\setminus\{0\}\ \forall a \in K: a \cdot 1 = a$ |
| Existenz von inversen Elem. | $\forall a \in K\ \exists -a \in K: a+(-a) = 0$ | $\forall a \neq 0\ \exists a^{-1} \in K: a \cdot a^{-1} = 1$ |
| Distributiv Ges | $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b \cdot c$ | |

Dabei gelten Komm.-, Assoz.- und Distrib. Ges für alle $a,b,c \in K$

Beisp

1) $(\mathbb{R},+,\cdot)$, $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ sind Körper
2) $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ ist kein Körper, da es für $a \neq 1,-1$ kein multiplikat. Inverses in $\mathbb{Z}$ gibt.

z.B. $a = 2$: $\left.\begin{array}{l}\{2b \mid b \in \mathbb{Z}\} = \text{Menge der geraden Zahlen} \\ 1 \in \mathbb{Z} \text{ ist nicht gerade}\end{array}\right\}$

$\Rightarrow$ es gibt kein $b \in \mathbb{Z}$ mit $2 \cdot b = 1$

3) $\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$ lies: 0 = "gerade", 1 = "ungerade"

| $+$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $1$ |
| $1$ | $1$ | $0$ |

| $\cdot$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $0$ |
| $1$ | $0$ | $1$ |

Achtung: $\underline{1+1=0}$

$\Rightarrow (\mathbb{F}_2,+,\cdot)$ ist Körper

4) $\mathbb{C} = \{a+bi \mid a,b\in\mathbb{R}\}$

$(a+bi)+(c+di) := (a+c)+(b+d)i$

$(a+bi)\cdot(c+di) := (ac-bd)+(ad+bc)i$

$\Rightarrow (\mathbb{C},+,\cdot)$ ist Körper $\begin{pmatrix} 0+0i \text{ neutr. bzgl. } + \\ 1+0i \text{ " " } \cdot \end{pmatrix}$

<u>Bemerk</u>:

1) Die neutralen Elem. 0 und 1 sind eindeut. bestimmt.

2) Jedes $a\in K$ hat genau ein Inverses $-a$ bzgl. Add.
" $a\neq 0$ " " " " $a^{-1}$ bzgl. Mult.

Bew von 1) für 0:

Seien $0,0'\in K$ mit $a+0=a=a+0'$ für alle $a\in K$.

$\Rightarrow \quad 0 \underset{\substack{\uparrow\\ 0' \text{ neutr.}}}{=} 0+0' \underset{\substack{\uparrow\\ \text{komm.}}}{=} 0'+0 \underset{\substack{\uparrow\\ 0 \text{ neutr.}}}{=} 0'$ //

Man nennt:

$-a$ <u>Negatives</u> von $a$

$a^{-1}$ <u>Kehrwert</u> von $a$

$a-b := a+(-b)$ <u>Differenz</u>

für $b\neq 0$: $a/b := a\cdot b^{-1}$ <u>Quotient</u>

Vereinbarung: Punkt- vor Strichrechnung

z.B. $a\cdot b+c$ bedeutet $(a\cdot b)+c$ (und nicht $a\cdot(b+c)$)

**1.2 Satz:** In jedem Körper $K$ gilt für alle $a, b \in K$ ($\neq 0$ falls nötig)

1) Rechenregeln für Inverse

$$-0 = 0 \qquad -(-a) = a \qquad -(a+b) = (-a)+(-b)$$
$$1^{-1} = 1 \qquad (a^{-1})^{-1} = a \qquad (a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$$
$$a \cdot 0 = 0 \qquad (-a) \cdot b = -(a \cdot b) \qquad (-a) \cdot (-b) = a \cdot b$$

2) $K$ ist nullteilerfrei, d.h.

$$a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$$

3) Die Gleichung $a + x = b$ ist eindeutig lösbar.

" " $a \cdot x = b$ " " " für $a \neq 0$.

Bew: 1) zeigen: $a \cdot 0 = 0$

$$x := a \cdot 0 \underset{\text{neutr.}}{=} a \cdot (0+0) \underset{\text{distrib.}}{=} a \cdot 0 + a \cdot 0 = x + x$$

$$\underset{+(-x)}{\Longrightarrow} \quad 0 = x + (-x) = (x+x) + (-x) \underset{\text{ass}}{=} x + \underbrace{(x + (-x))}_{\text{inv.} \; = \; 0} \underset{\text{neutr.}}{=} x$$

Also: $a \cdot 0 = x = 0$

Rest siehe Grieser 2.1.5, S. 12/13

2) Sei $a \cdot b = 0$.

Fall $b = 0$: ✓

Fall $b \neq 0$: zu zeigen: $a = 0$

$$b \neq 0 \Rightarrow 1 = b \cdot b^{-1}$$

$$a \underset{\text{neutr.}}{=} a \cdot 1 = a \cdot (b \cdot b^{-1}) \underset{\text{ass}}{=} (a \cdot b) \cdot b^{-1} \underset{\text{Vorauss.}}{=} 0 \cdot b^{-1} \underset{\text{komm}}{=} b^{-1} 0 \underset{1)}{=} 0$$ ✓

Frage: Warum fordert man $1 \neq 0$ und multiplik. Inverse nur für $a \neq 0$?

Ann: $1 = 0$

$\Rightarrow \forall a \in K: \quad a = a \cdot 1 = a \cdot 0 = 0$, d.h. $K = \{0\}$ uninteressant!

Ann: $0^{-1}$ existiert in $K$

$$\Rightarrow 1 = 0 \cdot 0^{-1} = 0^{-1} 0 \underset{1.2, 1)}{=} 0, \text{ d.h. } 1 = 0 \text{ Wid.}$$

## 1.3 Geordnete Körper

<u>Def</u>: Ein Körper $(K,+,\cdot)$ mit einer Relation $<$ auf $K$ (lies: "kleiner als") heißt <u>geordneter Körper</u>, falls für alle $a,b,c \in K$ folg. Beding. (Ordnungsaxiome) gelten:

<u>Trichotomie</u>: entweder $a<b$ oder $a=b$ oder $b<a$

<u>Transitivität</u>: $a<b \wedge b<c \Rightarrow a<c$

<u>+ Verträglich.</u>: $a<b \wedge c$ belieb $\Rightarrow a+c < b+c$

<u>· Verträglich.</u>: $a<b \wedge 0<c \Rightarrow a\cdot c < b\cdot c$

Sprechweise: $a>b :\Leftrightarrow b<a$

$c$ pos./neg. $:\Leftrightarrow c>0$ bzw $c<0$

<u>Beisp</u>

1) $(\mathbb{R},+,\cdot,<)$, $(\mathbb{Q},+,\cdot,<)$ sind geordnete Körper

2) $(\mathbb{F}_2=\{0,1\},+,\cdot)$ lässt sich <u>nicht</u> ordnen.

<u>Ann</u>: doch $\underset{\text{Trich}}{\Rightarrow} \begin{cases} 0<1 & \underset{+1}{\Rightarrow} 1=0+1<1+1=0, \text{ d.h. } 1<0 \ \lightning \\ \text{oder} & \\ 1<0 & \Rightarrow 0=1+1<0+1=1, \text{ d.h. } 0<1 \ \lightning \end{cases}$

1.4 <u>Satz</u>: In jedem geordneten Körper $K$ gilt für alle $a,b,c \in K$:

1) $a<b \wedge c<d \Rightarrow a+c < b+d$

2) $0<a \Leftrightarrow -a<0$

3) $a \neq 0 \Rightarrow a^2 := a\cdot a > 0$, insbes. $1 = 1\cdot 1 > 0$

4) $a<b \wedge c<0 \Rightarrow b\cdot c < a\cdot c$

5) $0<a<b \Rightarrow 0<b^{-1}<a^{-1}$

6) $a<b \Rightarrow a < \frac{a+b}{2} < b$ (wobei $2=1+1$)

Bew: 1) $\left.\begin{array}{l} a<b \xRightarrow[+c]{} a+c<b+c \\ c<d \xRightarrow[+b]{} b+c<b+d \end{array}\right\} \xRightarrow[\text{Trans.}]{} a+c<b+d$

2) $0<a \xRightarrow[+(-a)]{} -a<0 \xRightarrow[+a]{} 0<a$

3) Fall I: $a>0$: $\xRightarrow[\cdot a]{} a\cdot a > a\cdot 0 \underset{1.2,1)}{=} 0$

Fall II: $a<0$: $\xRightarrow[2)]{} -a>0 \Rightarrow a\cdot a \underset{1.2,1)}{=} (-a)\cdot(-a) \overset{\text{Fall I}}{>} 0$

4) $\left.\begin{array}{l} c<0 \xRightarrow[2)]{} -c>0 \\ a<b \end{array}\right\} \xRightarrow[\cdot(-c)]{} \underbrace{a\cdot(-c)}_{=-a\cdot c} < \underbrace{b\cdot(-c)}_{=-b\cdot c} \leftarrow 1.2,1)$

$\xRightarrow[+a\cdot c+b\cdot c]{} b\cdot c = a\cdot c+b\cdot c-a\cdot c < a\cdot c+b\cdot c-b\cdot c = a\cdot c$

d.h. $b\cdot c < a\cdot c$

5), 6) Aufg 1.2 ✓

Bem: Weitere nützliche Notationen

$$a \le b :\Leftrightarrow a<b \vee a=b$$
$$a \ge b :\Leftrightarrow a>b \vee a=b$$
$$\max\{a,b\} := \begin{cases} a & \text{falls } a\ge b \\ b & \text{sonst} \end{cases}$$
$$\min\{a,b\} := \begin{cases} a & \text{falls } a\le b \\ b & \text{sonst} \end{cases}$$

Eigenschaften von $\le$: $\forall a,b,c \in K$:

$\left.\begin{array}{ll} a\le a & \text{reflexiv} \\ a\le b \wedge b\le a \Rightarrow a=b & \text{antisymmetr.} \\ a\le b \wedge b\le c \Rightarrow a\le c & \text{transitiv} \end{array}\right\}$ "$\le$ ist Ordnungsrel" (Alg Zth 1, S.55)

$\neg(a\le b) \Leftrightarrow a>b$

Refl.: $a=a \Rightarrow (a=a \vee a<a) \Rightarrow a\le a$

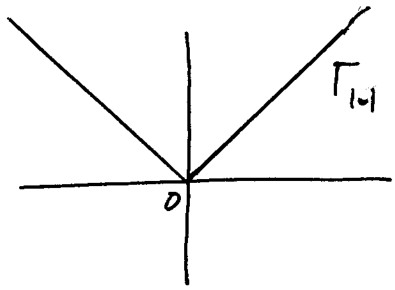
Antisymm. hat Kontrapos.

$$a\neq b \Rightarrow \underbrace{\neg(a\le b)}_{a>b} \vee \underbrace{\neg(b\le a)}_{b>a} \quad \text{(De Morgan)}$$

Das stimmt nach Trich.

Trans.: Fallunterscheid.

## 1.5 Betragsfunktion

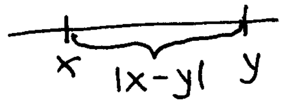



$|\cdot| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

absoluter <u>Betrag</u> von $x$

Verwend.: $|x-y|$ = Abstand zw. $x$ und $y$




$|x| = |x-0|$ = Abstand von $x$ zum 0-Pkt.

<u>Satz</u>: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

0) $x, -x \leq |x| = |-x| = \max\{x, -x\}$

1) $|x| \geq 0$ und $|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

2) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

3) $|x+y| \leq |x| + |y|$ "Dreiecks-Ungleichung"

<u>Bew</u>: 0), 1) folgen aus Def.

2) Fallunterscheid nach Vorzeichen von $x$ bzw $y$:

<u>Fall $x \geq 0$, $y < 0$:</u> $\Rightarrow xy \leq 0$ und $|x| = x$, $|y| = -y$, $|xy| = -xy$

$$\Longrightarrow |xy| = -xy \underset{1.2,1)}{=} x \cdot (-y) = |x| \cdot |y|$$

Restl. 3 Fälle ähnl.

3) $x \leq |x| \wedge y \leq |y| \underset{1.4,1)}{\Longrightarrow} x + y \leq |x| + |y|$

$-x \leq |x| \wedge -y \leq |y| \Longrightarrow \underbrace{(-x) + (-y)}_{-(x+y)} \leq |x| + |y|$

$\Longrightarrow |x+y| \leq |x| + |y|$

✓

## 1.6 $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ als Teilmengen von $\mathbb{R}$

Def: sei $M \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge.

$$M \text{ induktiv} :\Longleftrightarrow \begin{cases} 1 \in M \\ \forall x \in M : x+1 \in M \end{cases}$$

Beisp: $\mathbb{R}_{\geq 1} := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$ ist induktiv

Sei $\mathcal{N} := \{M \subset \mathbb{R} \mid M \text{ ist induktiv}\} \subset \mathrm{Pot}(\mathbb{R})$

Setze $\mathbb{N} := \bigcap_{M \in \mathcal{N}} M = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall M \in \mathcal{N} : x \in M\}$

Dann gilt:

-) $\mathbb{N}$ ist die kleinste induktive Teilmenge von $\mathbb{R}$.

-) $\mathbb{N}$ mit der Nachfolgerabb. $\nu(n) := n+1$ erfüllt die Peano-Axiome ($\rightarrow$ Bew. Prinzip "Vollst. Indukt")

Setze $\mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Z} := \mathbb{N}_0 \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

$\mathbb{Q} := \{a/b \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\}$

Add. auf $\mathbb{Q}$: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$

Mult. auf $\mathbb{Q}$: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

Ordnung auf $\mathbb{Q}$: $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Longleftrightarrow ad < bc$

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Longleftrightarrow 0 < \frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{bc-ad}{bd}$$

$$\Longleftrightarrow 0 < bc - ad$$

$$\Longleftrightarrow ad < bc$$

1.7 Erinn: Beweisprinzip "Vollständige Induktion"

Betrifft Aussagen der Form

$$\forall n \geq n_0 : A(n) \qquad (*)$$

wobei $n_0 \in \mathbb{N}_0$ fest,
$n$ durchläuft alle ganzen Zahlen $\geq n_0$,
$A(n)$ Aussageform über diese $n$.

Zum Bew. von (*) durch (vollst.) Induktion zeigt man:

IA) $A(n_0)$ — Indukt. anfang

IS) $\forall n \geq n_0 : (\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Indukt. voraussetzung (IV)}}}{A(n)} \Rightarrow A(n+1))$ — Indukt. schritt

Beisp

1) Sei $x \in \mathbb{R}$, $x \geq -1$. Dann gilt:

$$\forall n \geq 1 : (1+x)^n \geq 1 + nx$$

Bernoulli-Ungleich.

Bew: mit Indukt.

IA) $\underline{n=1}$: $(1+x)^1 \geq 1 + 1 \cdot x$ ✓

IS) Sei nun $n \geq 1$, und $(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x$ (IV)

zu zeigen: $(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$

$$(1+x)^{n+1} = \underbrace{(1+x)}_{\geq 0,\ \text{da } x \geq -1} (1+x)^n \underset{\text{IV}}{\geq} (1+x)(1+nx) = 1 + x + nx + \underbrace{nx^2}_{\geq 0}$$

$$\geq 1 + (n+1)x \quad ✓$$

2) Sei $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$. Dann gilt:

$$\forall n \geq 0 : \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Geometr. Summe

Bew: mit Indukt.

IA) $\underline{n=0}$: $q^0 = 1 = \frac{1-q}{1-q}$ ✓

IS) Sei nun $n \geq 0$ und Beh. $A(n)$ richtig (IV)

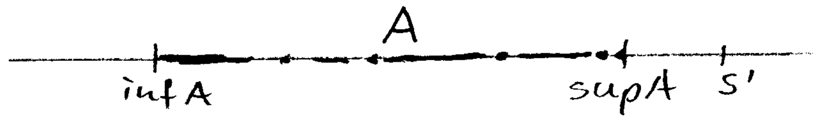
$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1} \underset{\text{IV}}{=} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} \cdot \frac{1-q}{1-q}$$

$$= \frac{1}{1-q}\left(1 - \cancel{q^{n+1}} + \cancel{q^{n+1}} - q^{n+2}\right) = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$

Also gilt: $\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$, d.h. $A(n+1)$ ✓

# Vollständigkeit

Im Folg: $K$ geord. Körper




**1.8 Def**: sei $\emptyset \neq A \subset K$ und $s \in K$.

1) $s$ obere Schranke von $A$ $(A \leq s) :\Leftrightarrow \forall a \in A: a \leq s$

2) $A$ nach oben beschränkt (n.o.b.) $:\Leftrightarrow \exists s' \in K: A \leq s'$

3) $s$ Maximum von $A$ $(s = \max A) :\Leftrightarrow s \in A \wedge A \leq s$
(größtes Elem.)

4) $s$ Supremum von $A$ $(s = \sup A) :\Leftrightarrow$
$s =$ kleinste obere Schranke von $A$
$= \min \{t \in K \mid A \leq t\}$
d.h. $A \leq s \wedge \forall t \in K: (A \leq t \Rightarrow s \leq t)$

1')–4') Analog mit $\geq$ statt $\leq$: "untere Schranke $(r \leq A)$", "nach unten beschr. (n.u.b)", "Minimum $(\min A)$" und "Infimum" $\inf A = \max \{r \in K \mid r \leq A\} =$ größte untere Schranke von $A$.

Bemerk: Max, Sup, Min und Inf sind eindeut. bestimmt, falls sie existieren.

Für Max: Seien $s, s'$ Maxima von $A$

$$\Rightarrow \begin{matrix} s \in A & A \leq s \Rightarrow s' \leq s \\ s' \in A & A \leq s' \Rightarrow s \leq s' \end{matrix} \Bigg\} \underset{\text{antisymm}}{\Rightarrow} s = s'$$

**1.9 Lemma**: Für $\emptyset \neq A \subset K$ und $r, s \in K$ gilt:

1) Hat $A$ ein Max, so hat $A$ ein Sup, und es gilt:
$$\sup A = \operatorname{Max} A$$

2) $s = \sup A \Leftrightarrow A \leq s \wedge \forall t < s \; \exists a \in A: t < a$
d.h. $\begin{cases} s \text{ ist obere Schranke von } A \text{ und} \\ \text{jedes } t < s \text{ wird von einem } a \in A \text{ übertroffen} \end{cases}$

1') $r = \min A \Rightarrow r = \inf A$

2') $r = \inf A \Leftrightarrow r \leq A \wedge \forall t > r \; \exists a \in A: a < t$

Bew

1) Sei $s = \max A \Rightarrow s \in A \wedge A \leq s$
sei weiter $t \in K$ mit $A \leq t \Rightarrow s \leq t$ } d.h. $s = \sup A$

2) $s = \sup A \Leftrightarrow A \leq s \wedge \forall t \in K : (A \leq t \Rightarrow s \leq t)$

$$\neg(s \leq t) \Rightarrow \neg(\underbrace{A \leq t}_{\forall a \in A : a \leq t})$$

$$t < s \Rightarrow \exists a \in A : t < a$$

$\Leftrightarrow A \leq s \wedge \forall t \in K : (t < s \Rightarrow \exists a \in A : t < a)$ ✓

Beisp

1) $A \subset K$, $A$ endl. $\neq \emptyset \Rightarrow A$ hat Max und Min.

Indukt. und
$\max\{a_1, \ldots, a_{n+1}\} = \max\{\max\{a_1, \ldots, a_n\}, a_{n+1}\}$ //

2) $A = [r, s] := \{x \in K \mid r \leq x \leq s\}$, wobei $r, s \in K$, $r < s$
$\Rightarrow s = \max A$ und $s = \sup A$ (Lemma, 1))

3) $A = [r, s[ := \{x \in K \mid r \leq x < s\}$

Beh: $s = \sup A$, aber $A$ hat kein Max.

$s = \sup A$: klar $A \leq s$

Zeigen: $\forall t < s \; \exists a \in A : t < a$ ((Lemma, 2))

Sei $t < s$.

Fall $t < r$: $\Rightarrow t < \underbrace{r}_{=:a} < s$

Fall $r \leq t$: $\Rightarrow r \leq t < \underbrace{\frac{t+s}{2}}_{=:a} < s$ (Aufg. 1.2)

Kein Max: Anderenfalls wäre

$$s = \sup A \underset{\text{Lemma, 1)}}{=} \max A \underset{\text{Def. Max}}{\in} A, \text{ d.h. } s \in A = [r, s[$$

Wid. //

1.10 Def: Ein geord. Körper $K$ heißt vollständig, falls er das "Vollständigkeits axiom" erfüllt:

VOLL: Jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge $A$ von $K$ hat ein Supremum (in $K$).

Bemerk: $K$ vollst, $A \subset K$, $A \neq \emptyset$ nach unten beschr. $\Rightarrow$ $A$ hat Infimum

⌈ $A' := \{-a \mid a \in A\} \neq \emptyset$, nach oben beschr. ← Übung
$\Rightarrow A'$ hat Sup., und $-\sup A' = \inf A$ ← ⌋

Satz (Dedekind 1831–1916) Es gibt (bis auf Isomorphie) genau einen vollst. geord. Körper; dieser wird mit $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ bezeichnet.

Beisp: 3,1415926...
In welchem Sinn beschreibt das eine reelle Zahl?
$A :=$ Menge mit den Elementen
3,1 , 3,14 , 3,141 , 3,1415 , 3,14159 , ...
$\Rightarrow A \neq \emptyset$ und nach oben beschr., z.B $A \leq 4$
$\xRightarrow[\text{VOLL}]{} s = \sup A$ existiert in $\mathbb{R}$
$s$ "realisiert 3,1415926..."

Allgem: seien $m \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, a_3, \dots \in \{0,1,2,\dots,9\}$
$A := \{ m + \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot \frac{1}{10^i} \mid k \in \mathbb{N} \} \neq \emptyset$ und n.o.b. z.B $A \leq m+1$
$\xRightarrow[\text{VOLL}]{} s := \sup A$ existiert in $\mathbb{R}$
$s$ "realisiert $m, a_1 a_2 a_3 \dots$"

# Erste Konsequenzen aus VOLL

1.11 Satz: 1) $\mathbb{N}$ ist nicht nach oben beschränkt,

d.h. $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}: x < n$ (Archimedes)

2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n} < \varepsilon$ (Eudoxos)

Bew: 1) Ann: $\mathbb{N}$ ist n.o.b.

$\mathbb{N} \neq \emptyset \underset{\text{VOLL}}{\Longrightarrow}$ $\mathbb{N}$ hat Sup $s = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$

$s-1 < s \underset{1.9,2)}{\Longrightarrow} \exists n \in \mathbb{N}: s-1 < n$, d.h. $s < \underbrace{n+1}_{\in \mathbb{N}}$ Wid zu $\mathbb{N} \leq s$

2) Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow 1/\varepsilon > 0$
Archim. $\exists n \in \mathbb{N}: \frac{1}{\varepsilon} < n$ $\Bigg\} \underset{\substack{\text{Kehrwert}\\ \text{Aufg 1.2}}}{\Longrightarrow} \frac{1}{n} < \varepsilon$ ✓

1.12 Satz: $\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$, d.h. für je zwei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gibt es ein $q \in \mathbb{Q}$ mit

$$a < q < b$$

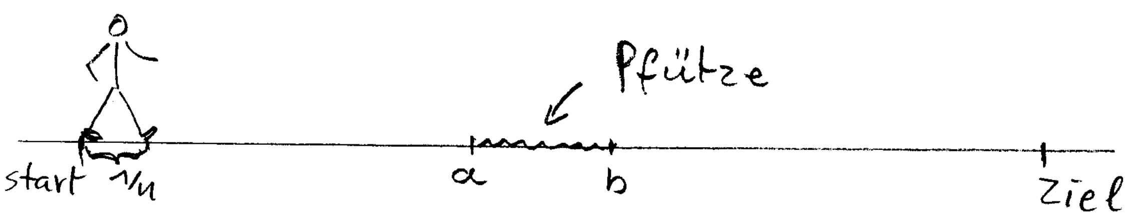
Bew: sei $0 \leq a < b$
o.E. (ohne Einschränkung)

$b - a > 0 \underset{\text{Eudox.}}{\Longrightarrow} \exists n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n} < b-a$, d.h. $a + \frac{1}{n} < b$ $(*)$

Archim: $\exists m \in \mathbb{N}: m > na$, d.h. $\frac{m}{n} > a$

Wähle kleinstes $m \in \mathbb{N}$ mit $\frac{m}{n} > a$
$\frac{m}{n} - \frac{1}{n} = \frac{m-1}{n} \leq a \Rightarrow \frac{m}{n} \leq a + \frac{1}{n} \underset{(*)}{<} b$ $\Bigg\} \Rightarrow a < \frac{m}{n} < b$ ✓

Idee




wenn Schrittlänge $<$ Pfützenbreite, dann tritt er in die Pfütze
$\phantom{wenn}$ $1/n$ $\qquad$ $b-a$