Lösung zur Klausur
Analysis 1
Lehrkräfteweiterbildungskurs 13 Q+R SoSe 2024
Dozent: H.-J. von Höhne, Datum: 25.06.2024

Aufgabe 1 (7+6+7 Punkte)

1) Zeigen Sie, dass folgende Folge $(a_n)_n$ monoton und beschränkt ist.

$$a_n = \frac{3^n}{2^n + 3^n}$$

2) Bestimmen Sie den Grenzwert folgender Folge $(b_n)_n$, falls er existiert.

$$b_n = \sqrt[n]{9\,n} + \frac{3n^2 - 7n + 1}{5n^2 + 4n}$$

3) Bestimmen Sie den Wert der folgenden Reihe.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-2)^{\,k+1}}{5^{\,k-1}}$$

Lösung

1) Wir zeigen zuerst: $0 \le a_n \le 1$ für alle $n \in I\!N$, d.h. die Folge ist nach unten durch 0 und nach oben durch 1 beschränkt. Für alle $n \in I\!N$ gilt $0 < 3^n < 2^n + 3^n$, und Division durch $2^n + 3^n$ liefert $0 < \frac{3^n}{2^n+3^n} = a_n < 1$, und somit $0 \le a_n \le 1$.

Es ist $a_1 = 3/5 < 9/13 = a_2$. Somit ist zu zeigen, dass $(a_n)_n$ monoton steigend ist, d.h. $a_n \le a_{n+1}$ für alle $n \in I\!N$. Wir formen äquivalent um: $a_n \le a_{n+1} \;\Leftrightarrow\; \frac{3^n}{2^n+3^n} \le \frac{3^{n+1}}{2^{n+1}+3^{n+1}}$ $\Leftrightarrow\; 3^n\,(2^{n+1} + 3^{n+1}) \le 3^{n+1}\,(2^n + 3^n) \;\Leftrightarrow\; 2^{n+1} + 3^{n+1} \le 3\,(2^n + 3^n) = 3 \cdot 2^n + 3^{n+1}$ $\Leftrightarrow 2^{n+1} \le 3 \cdot 2^n \;\Leftrightarrow 2 \le 3$. Die Aussage $2 \le 3$ ist sicherlich richtig; somit ist die Folge $(a_n)_n$ monoton steigend

2) Wir betrachten die einzelnen Summanden von b_n. Den ersten Summenden formen wir um zu $\sqrt[n]{9\,n} = \sqrt[n]{9} \cdot \sqrt[n]{n}$ und beachten, dass die Folgen $(\sqrt[n]{9})_n$ und $(\sqrt[n]{n})_n$ gegen 1 konvergieren. Den zweiten Summanden formen wir wie folgt um:

$$\frac{3n^2 - 7n + 1}{5n^2 + 4n} = \frac{n^2\,(3 - 7/n + 1/n^2)}{n^2\,(5 + 4/n)} = \frac{3 - 7/n + 1/n^2}{5 + 4/n}$$

Da $(1/n)_n$ eine Nullfolge ist, folgt mit den Grenzwertsätzen:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{9} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{3 - 7/n + 1/n^2}{5 + 4/n} = 1 \cdot 1 + \frac{3 - 0 + 0}{5 + 0} = 1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}$$

3) Wir führen erst eine Indextransformation durch und formen dann um mit der Rechenregel 3.4 für konvergente Reihen und der Wertformel 3.3 für geometrische Reihen ($|-\frac{2}{5}| = \frac{2}{5} < 1$).

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-2)^{k+1}}{5^{k-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^{k+2}}{5^k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-2)^2\,\frac{(-2)^k}{5^k} = \sum_{k=0}^{\infty} 4\,(-\frac{2}{5})^{\,k}$$

$$= 4 \sum_{k=0}^{\infty} (-\frac{2}{5})^{\,k} = 4 \cdot \frac{1}{1 - (-\frac{2}{5})} = 4 \cdot \frac{1}{7/5} = 4 \cdot \frac{5}{7} = \frac{20}{7}$$

Aufgabe 2 (6+6 Punkte)

1) Berechnen Sie folgenden Grenzwert, falls er existiert.

$$\lim_{x\to+\infty} (\, x - \sqrt{x^2 - 3x}\,)$$

2) Für welches $a \in I\!R$ ist folgende Funktion $f : I\!R \longrightarrow I\!R$ im Punkt $p = 1$ stetig?

$$f(x) = \begin{cases} \cos(\pi x) & \text{für } x \le 1, \\ \ln(x - a) & \text{für } x > 1. \end{cases}$$

Lösung

1) Wir formen den Funktionsterm um, indem wir ihn erst erweitern, dann die 3. Binomische Formel anwenden, dann im Nenner x ausklammern (dabei können wir $x > 0$ annehmen) und schließlich kürzen.

$$\begin{aligned} x - \sqrt{x^2 - 3x} &= (x - \sqrt{x^2 - 3x}) \cdot \frac{x + \sqrt{x^2 - 3x}}{x + \sqrt{x^2 - 3x}} \\ &= \frac{x^2 - (x^2 - 3x)}{x + \sqrt{x^2 - 3x}} = \frac{3x}{x + \sqrt{x^2(1 - 3/x)}} \\ &= \frac{3x}{x + x\sqrt{1 - 3/x}} = \frac{3}{1 + \sqrt{1 - 3/x}} \end{aligned}$$

Mit $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, der Stetigkeit der Wurzelfunktion und den Grenzwertsätzen folgt:

$$\lim_{x\to+\infty} (x - \sqrt{x^2 - 3x}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{1 + \sqrt{1 - 3/x}} = \frac{3}{1 + \sqrt{1 - 0}} = \frac{3}{1 + 1} = \frac{3}{2}$$

2) Nach Definiton ist f stetig in $p = 1$ genau dann, wenn gilt: $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$.

Nach 5.11 ist das äquivalent zu: $\lim_{x\nearrow 1} f(x) = f(1) = \lim_{x\searrow 1} f(x)$

Wir berechnen $f(1)$ und die einseitigen Grenzwerte $\lim_{x\nearrow 1} f(x)$ und $\lim_{x\searrow 1} f(x)$.

$$f(1) = \cos(\pi\, 1) = \cos(\pi) = -1$$

Da die Funktionen $\cos(\pi x)$ und $\ln(x - a)$ stetig sind, erhalten wir:

$$\lim_{x\nearrow 1} f(x) = \lim_{x\nearrow 1} \cos(\pi\, x) = \cos(\pi\, 1) = f(1)$$

und $$\lim_{x\searrow 1} f(x) = \lim_{x\searrow 1} \ln(x - a) = \ln(1 - a)\,.$$

Somit gilt: $\lim_{x\searrow 1} f(x) = f(1) \iff \ln(1 - a) = -1$
$\iff 1 - a = e^{-1} = \frac{1}{e}$, d.h. $a = 1 - \frac{1}{e}$.

Also ist f genau dann in $p = 1$ stetig, wenn gilt: $a = 1 - \frac{1}{e}$.

Aufgabe 3 (6+6 Punkte)

1) Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktion $f : I\!R \longrightarrow I\!R$.

$$f(x) \; = \; 4\,x^5 \sin(2x) + \ln\left(e^{3x} + 6\right) + 5^{\,x}$$

2) Untersuchen Sie, ob folgende Funktion $g : I\!R \longrightarrow I\!R$ im Punkt $p = 0$ differenzierbar ist.

$$g(x) \; = \; \frac{x}{|\,x| + 2}$$

Lösung

1) Wir leiten zunächst die drei Summanden von f separat ab.

Mit der Produktregel erhalten wir:

$$(4\,x^5 \sin(2x))\,' \; = \; 4 \cdot 5x^4 \sin(2x) \; + \; 4\,x^5\,2\,\cos(2x) \; = \; 4\,x^4\,(\,5\,\sin(2x) + 2x\,\cos(2x)\,)$$

Die Kettenregel liefert:

$$(\ln(e^{3x} + 6))\,' \; = \; \frac{1}{e^{3x} + 6} \cdot (e^{3x} + 6)\,' \; = \; \frac{1}{e^{3x} + 6} \cdot 3\,e^{3x} \; = \; \frac{3\,e^{3x}}{e^{3x} + 6}$$

Schließlich gilt: $(5^{\,x})\,' = \; \ln(5)\,5^{\,x}$. Und mit der Summenregel erhalten wir:

$$f\,'(x) \; = \; 4\,x^4\,(\,5\,\sin(2x) + 2x\,\cos(2x)\,) \; + \; \frac{3\,e^{3x}}{e^{3x} + 6} \; + \; \ln(5)\,5^x$$

2) Die Funktion g ist in $p = 0$ genau dann differenzierbar, wenn folgender Grenzwert existiert:

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}$$

Wir berechnen den Differenzenquotienten

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \; = \; \frac{\frac{x}{|x|+2} - \frac{0}{|0|+2}}{x - 0} \; = \; \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{|\,x| + 2} \; = \; \frac{1}{|\,x| + 2}$$

und erhalten wegen der Stetigkeit der Betragsfunktion:

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \; = \; \lim_{x \to 0} \frac{1}{|\,x| + 2} \; = \; \frac{1}{|\,0| + 2} \; = \; \frac{1}{0 + 2} \; = \; \frac{1}{2}$$

Somit ist g in $p = 0$ differenzierbar mit $g'(0) = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Untersuchen Sie, ob folgende Reihe konvergent ist.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5 \cdot 2^k}{k^k}$$

Lösung

Für alle $k \geq 3$ gilt $k^k \geq 3^k$, also $1/k^k \leq 1/3^k$, und somit für das k-te Reihenglied a_k :

$$a_k = \frac{5 \cdot 2^k}{k^k} \leq \frac{5 \cdot 2^k}{3^k} = 5 \cdot \frac{2^k}{3^k} = 5 \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

Die "geometrische" Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k$ ist wegen $0 \leq \frac{2}{3} < 1$ konvergent; also ist auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 5 \left(\frac{2}{3}\right)^k$ konvergent. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ hat also eine konvergente Majorante und ist somit nach dem Majoranten-Kriterium konvergent.

Alternative I) mit Quotienten-Kriterium. Wir berechnen:

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{5 \cdot 2^{k+1}}{(k+1)^{k+1}} \cdot \frac{k^k}{5 \cdot 2^k} = \frac{2 \cdot k^k}{(k+1)^k (k+1)} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^k \cdot \frac{2}{k+1} \leq 1^k \cdot \frac{2}{k+1} = \frac{2}{k+1}$$

Wegen $\lim_{k\to\infty} \frac{2}{k+1} = 0$ folgt mit dem Sandwich-Prinzip $\lim_{k\to\infty} |a_{k+1}/a_k| = 0 < 1$. Also ist nach dem Quotienten-Kriterium die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent.

Alternative II) mit Wurzel-Kriterium. Wir berechnen:

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\frac{5 \cdot 2^k}{k^k}} = \frac{\sqrt[k]{5} \cdot \sqrt[k]{2^k}}{\sqrt[k]{k^k}} = \frac{\sqrt[k]{5} \cdot 2}{k} = \sqrt[k]{5} \cdot \frac{2}{k}$$

Mit dem Grenzwertsatz folgt: $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{5} \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{2}{k} = 1 \cdot 0 = 0 < 1$. Also ist nach dem Wurzel-Kriterium die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent.

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass folgende Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ monoton steigend ist.

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Lösung

Die Funktion f ist differenzierbar und nach 6.14 gilt:

$$f \text{ ist monoton steigend} \iff f'(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

Mit der Quotientenregel erhalten wir für die Ableitung:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{(\sqrt{1+x^2}\,)^2} \left(1 \cdot \sqrt{1+x^2} - x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) \\ &= \frac{1}{1+x^2} \left(\sqrt{1+x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{(1+x^2) - x^2}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $1 + x^2 > 0$, und somit $f'(x) = 1/(1+x^2)^{3/2} \geq 0$. Also ist f monoton steigend.