Analysis 1, Kurse 13Q, 13R (LWB) SoSe 2024

Dozent: H.-J. von Höhne ©

Homepage: page.mi.fu-berlin.de/hoehneze/SS2024/LWB/hopa_ana1_SS2024.html

Inhalt

-) die reellen Zahlen, Vollständigkeit

-) Grenzwerte von Folgen

-) Reihen

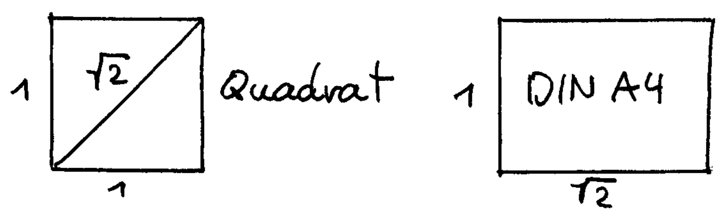
-) Stetige Funktionen (Grenzwert, ZWS, Satz v. Min., Max.)

-) Differentialrechnung (Ableitung, Mittelwert-Satz u. Anwend.)

Auftakt

$\sqrt{2} :=$ positive Lösung von $x^2 = 2$

$\approx 1{,}4142\ldots$



Satz: $\sqrt{2}$ ist irrational, d.h. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Bew: Indirekt. Annahme: $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{m}{n}$, wobei $m, n \in \mathbb{N}$ teilerfremd

$\Rightarrow 2 = \frac{m^2}{n^2}$

$\Rightarrow m^2 = 2n^2$ gerade

$\Rightarrow m$ gerade, d.h. $m = 2k$ für ein $k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow 4k^2 = (2k)^2 = 2n^2$

$\Rightarrow n^2 = 2k^2$ gerade

$\Rightarrow n$ gerade

Also: m, n beide gerade. Wid zu m, n teilerfremd! ✓

§ 1 Die reellen Zahlen

Ziel: Regeln für das Arbeiten mit reellen Zahlen.
Axiomensystem
"$\mathbb{R}$ ist ein vollständig (3) geordneter (2) Körper (1)."

(1) Grundrechenarten
(2), (3) $\mathbb{R}$ als Zahlengerade   neg. 0 pos.

1.1 Körper

Def: Ein Körper ist eine Menge K mit zwei Abbildungen (Verknüpf. auf K)

$+ : K \times K \longrightarrow K$ "Addition",
$(a,b) \longmapsto a+b := +(a,b)$

$\cdot : K \times K \longrightarrow K$ "Multiplikation",
$(a,b) \longmapsto a \cdot b (= ab) := \cdot(a,b)$

die folgende Bedingungen (Körperaxiome) erfüllen.

	Addition	Multiplik.
Kommutativ Ges.	$a+b = b+a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Assoziativ Ges	$(a+b)+c = a+(b+c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Existenz von neutralen Elem.	$\exists\, 0 \in K\ \forall a \in K:\ a+0 = a$	$\exists\, 1 \in K \setminus \{0\}\ \forall a \in K:\ a \cdot 1 = a$
Existenz von inversen Elem.	$\forall a \in K\ \exists -a \in K:\ a+(-a) = 0$	$\forall a \neq 0\ \exists\, a^{-1} \in K:\ a \cdot a^{-1} = 1$
Distributiv Ges	$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$	

Dabei gelten Komm.-, Assoz.- und Distrib. Ges für alle $a,b,c \in K$

Beisp

1) $(\mathbb{R},+,\cdot)$, $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ sind Körper
2) $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ ist kein Körper, da es für $a \neq 1,-1$ kein multiplikat. Inverses in $\mathbb{Z}$ gibt.

z.B. $a = 2$: $\left.\begin{array}{l} \{2b \mid b \in \mathbb{Z}\} = \text{Menge der geraden Zahlen} \\ 1 \in \mathbb{Z} \text{ ist nicht gerade} \end{array}\right\}$

$\Longrightarrow$ es gibt kein $b \in \mathbb{Z}$ mit $2 \cdot b = 1$

3) $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ lies: 0 = "gerade", 1 = "ungerade"

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Achtung: $\underline{1+1=0}$

$\Rightarrow (\mathbb{F}_2, +, \cdot)$ ist Körper

4) $\mathbb{C} = \{a+bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

$(a+bi)+(c+di) := (a+c)+(b+d)i$

$(a+bi)\cdot(c+di) := (ac-bd)+(ad+bc)i$

$\Rightarrow (\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist Körper $\left(\begin{array}{l} 0+0i \text{ neutr. bzgl. } + \\ 1+0i \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \cdot \end{array}\right)$

Bemerk:

1) Die neutralen Elem. 0 und 1 sind eindeut. bestimmt.

2) Jedes $a \in K$ hat genau ein Inverses $-a$ bzgl. Add.
 " $a \neq 0$ " " " a^{-1} bzgl. Mult.

Bew von 1) für 0:
Seien $0, 0' \in K$ mit $a+0 = a = a+0'$ für alle $a \in K$.

$$\Rightarrow \quad 0 \underset{0' \text{ neutr.}}{=} 0+0' \underset{\text{komm.}}{=} 0'+0 \underset{0 \text{ neutr.}}{=} 0'$$

Man nennt:

$-a$ Negatives von a

a^{-1} Kehrwert von a

$a-b := a+(-b)$ Differenz

für $b \neq 0$: $a/b := a \cdot b^{-1}$ Quotient

Vereinbarung: Punkt- vor Strichrechnung

z.B. $a \cdot b + c$ bedeutet $(a \cdot b)+c$ (und nicht $a \cdot (b+c)$)

1.2 Satz: In jedem Körper K gilt für alle $a, b \in K$ ($\neq 0$ falls nötig)

1) Rechenregeln für Inverse

$$-0 = 0 \qquad -(-a) = a \qquad -(a+b) = (-a)+(-b)$$
$$1^{-1} = 1 \qquad (a^{-1})^{-1} = a \qquad (a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$$
$$a \cdot 0 = 0 \qquad (-a) \cdot b = -(a \cdot b) \qquad (-a) \cdot (-b) = a \cdot b$$

2) K ist nullteilerfrei, d.h.

$$a \cdot b = 0 \implies a = 0 \vee b = 0$$

3) Die Gleichung $a + x = b$ ist eindeutig lösbar.
" " $a \cdot x = b$ " " " für $a \neq 0$.

Bew: 1) zeigen: $a \cdot 0 = 0$

$$x := a \cdot 0 \underset{\text{neutr.}}{=} a \cdot (0+0) \underset{\text{distrib.}}{=} a \cdot 0 + a \cdot 0 = x + x$$

$$\underset{+(-x)}{\implies} 0 = x + (-x) = (x+x)+(-x) \underset{\text{ass}}{=} x + \underbrace{(x+(-x))}_{\text{inv.} = 0} \underset{\text{neutr.}}{=} x$$

Also: $a \cdot 0 = x = 0$

Rest siehe Grieser 2.1.5, S. 12/13

2) Sei $a \cdot b = 0$.

Fall $b = 0$: ✓

Fall $b \neq 0$: zu zeigen: $a = 0$

$$b \neq 0 \implies 1 = b \cdot b^{-1}$$

$$a \underset{\text{neutr.}}{=} a \cdot 1 = a \cdot (b \cdot b^{-1}) \underset{\text{ass}}{=} (a \cdot b) \cdot b^{-1} \underset{\text{Vorauss.}}{=} 0 \cdot b^{-1} \underset{\text{komm}}{=} b^{-1} 0 \underset{1)}{=} 0$$

✓

Frage: Warum fordert man $1 \neq 0$ und multiplik. Inverse nur für $a \neq 0$?

Ann: $1 = 0$

$\implies \forall a \in K: \quad a = a \cdot 1 = a \cdot 0 = 0$, d.h. $K = \{0\}$ uninteressant!

Ann: 0^{-1} existiert in K

$\implies 1 = 0 \cdot 0^{-1} = 0^{-1} 0 \underset{1.2, 1)}{=} 0$, d.h. $1 = 0$ Wid.

1.3 Geordnete Körper

Def: Ein Körper $(K,+,\cdot)$ mit einer Relation $<$ auf K (lies: "kleiner als") heißt **geordneter Körper**, falls für alle $a,b,c \in K$ folg. Beding. (Ordnungsaxiome) gelten:

Trichotomie: entweder $a<b$ oder $a=b$ oder $b<a$

Transitivität: $a<b \wedge b<c \Rightarrow a<c$

$+$ Verträglich.: $a<b \wedge c$ belieb $\Rightarrow a+c<b+c$

$\cdot$ Verträglich.: $a<b \wedge 0<c \Rightarrow a\cdot c<b\cdot c$

Sprechweise: $a>b :\Leftrightarrow b<a$

c pos./neg. $:\Leftrightarrow c>0$ bzw $c<0$

Beisp

1) $(\mathbb{R},+,\cdot,<)$, $(\mathbb{Q},+,\cdot,<)$ sind geordnete Körper

2) $(\mathbb{F}_2=\{0,1\},+,\cdot)$ lässt sich nicht ordnen.

Ann: doch $\underset{\text{Trich}}{\Longrightarrow} \begin{cases} 0<1 \underset{+1}{\Longrightarrow} 1=0+1<1+1=0, \text{ d.h. } 1<0 \ \lightning \\ \text{oder} \\ 1<0 \Longrightarrow 0=1+1<0+1=1, \text{ d.h. } 0<1 \ \lightning \end{cases}$

1.4 Satz: In jedem geordneten Körper K gilt für alle $a,b,c \in K$:

1) $a<b \wedge c<d \Rightarrow a+c<b+d$

2) $0<a \Leftrightarrow -a<0$

3) $a \neq 0 \Rightarrow a^2:=a\cdot a>0$, insbes. $1=1\cdot 1>0$

4) $a<b \wedge c<0 \Rightarrow b\cdot c<a\cdot c$

5) $0<a<b \Rightarrow 0<b^{-1}<a^{-1}$

6) $a<b \Rightarrow a<\frac{a+b}{2}<b$ (wobei $2=1+1$)

Bew: 1) $\left.\begin{array}{l} a<b \underset{+c}{\Longrightarrow} a+c<b+c \\ c<d \underset{+b}{\Longrightarrow} b+c<b+d \end{array}\right\} \underset{\text{Trans.}}{\Longrightarrow} a+c<b+d$

2) $0<a \underset{+(-a)}{\Longrightarrow} -a<0 \underset{+a}{\Longrightarrow} 0<a$

3) $\underline{\text{Fall I}: a>0}: \underset{\cdot a}{\Longrightarrow} a\cdot a > a\cdot 0 \underset{1.2,1)}{=} 0$

$\underline{\text{Fall II}: a<0}: \underset{2)}{\Longrightarrow} -a>0 \Rightarrow a\cdot a \underset{1.2,1)}{=} (-a)\cdot(-a) \overset{\text{Fall I}}{>} 0$

4) $\left.\begin{array}{l} c<0 \underset{2)}{\Rightarrow} -c>0 \\ a<b \end{array}\right\} \underset{\cdot(-c)}{\Longrightarrow} \underbrace{a\cdot(-c)}_{=-a\cdot c} < \underbrace{b\cdot(-c)}_{=-b\cdot c} \leftarrow 1.2,1)$

$\underset{+a\cdot c+b\cdot c}{\Longrightarrow} b\cdot c = a\cdot c + b\cdot c - a\cdot c < a\cdot c + b\cdot c - b\cdot c = a\cdot c$

d.h. $b\cdot c < a\cdot c$

5), 6) Aufg 1.2 ✓

Bem: Weitere nützliche Notationen

$$a \le b :\Longleftrightarrow a<b \vee a=b$$
$$a \ge b :\Longleftrightarrow a>b \vee a=b$$
$$\max\{a,b\} := \begin{cases} a & \text{falls } a\ge b \\ b & \text{sonst} \end{cases}$$
$$\min\{a,b\} := \begin{cases} a & \text{falls } a\le b \\ b & \text{sonst} \end{cases}$$

<u>Eigenschaften von $\le$:</u> $\forall a,b,c\in K$:

$\left.\begin{array}{ll} a\le a & \text{reflexiv} \\ a\le b \wedge b\le a \Rightarrow a=b & \text{antisymmetr.} \\ a\le b \wedge b\le c \Rightarrow a\le c & \text{transitiv} \end{array}\right\}$ "$\le$ ist Ordnungsrel" (Alg Zth 1, S.55)

$\neg(a\le b) \Longleftrightarrow a>b$

<u>Refl.</u>: $a=a \Rightarrow (a=0 \vee a<a) \Rightarrow a\le a$

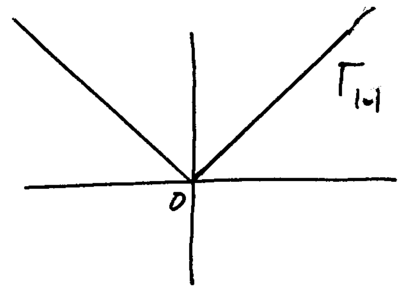
<u>Antisymm.</u> hat Kontrapos.

$$a\ne b \Rightarrow \underbrace{\neg(a\le b)}_{a>b} \vee \underbrace{\neg(b\le a)}_{b>a} \quad \text{(De Morgan)}$$

Das stimmt nach <u>Trich</u>.

<u>Trans.</u>: Fallunterscheid.

1.5 Betragsfunktion

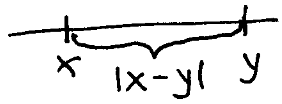


$|\cdot| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

absoluter <u>Betrag</u> von x

Verwend.: $|x-y|$ = Abstand zw. x und y



$|x| = |x-0|$ = Abstand von x zum 0-Pkt.

<u>Satz</u>: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

0) $x, -x \leq |x| = |-x| = \max\{x, -x\}$

1) $|x| \geq 0$ und $|x| = 0 \iff x = 0$

2) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

3) $|x+y| \leq |x| + |y|$ "Dreiecks-Ungleichung"

<u>Bew</u>: 0), 1) folgen aus Def.

2) Fallunterscheid nach Vorzeichen von x bzw y:

<u>Fall $x \geq 0$, $y < 0$:</u> $\Rightarrow xy \leq 0$ und $|x| = x$, $|y| = -y$, $|xy| = -xy$

$$\Longrightarrow |xy| = -xy \underset{1.2,1)}{=} x \cdot (-y) = |x| \cdot |y|$$

Restl. 3 Fälle ähnl.

3)
$$\left.\begin{aligned} x \leq |x| \wedge y \leq |y| &\underset{1.4,1)}{\Longrightarrow} x + y \leq |x| + |y| \\ -x \leq |x| \wedge -y \leq |y| &\Longrightarrow \underbrace{(-x) + (-y)}_{-(x+y)} \leq |x| + |y| \end{aligned}\right\}$$

$$\Longrightarrow |x+y| \leq |x| + |y|$$

✓

1.6 $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ als Teilmengen von $\mathbb{R}$

Def: Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge.

$$M \text{ induktiv} :\Longleftrightarrow \begin{cases} 1 \in M \\ \forall x \in M : x+1 \in M \end{cases}$$

Beisp: $\mathbb{R}_{\geq 1} := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$ ist induktiv

Sei $\mathcal{N} := \{M \subset \mathbb{R} \mid M \text{ ist induktiv}\} \subset \mathrm{Pot}(\mathbb{R})$

Setze $\mathbb{N} := \bigcap_{M \in \mathcal{N}} M = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall M \in \mathcal{N} : x \in M\}$

Dann gilt:

-) $\mathbb{N}$ ist die kleinste induktive Teilmenge von $\mathbb{R}$.

-) $\mathbb{N}$ mit der Nachfolgerabb. $\nu(n) := n+1$ erfüllt die Peano-Axiome ($\rightarrow$ Bew. Prinzip "Vollst. Indukt")

Setze $\mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

$\mathbb{Z} := \mathbb{N}_0 \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

$\mathbb{Q} := \{a/b \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\}$

Add. auf $\mathbb{Q}$: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$

Mult. auf $\mathbb{Q}$: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

Ordnung auf $\mathbb{Q}$: $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Longleftrightarrow ad < bc$

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Longleftrightarrow 0 < \frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{bc-ad}{bd}$$

$$\Longleftrightarrow 0 < bc - ad$$

$$\Longleftrightarrow ad < bc$$

1.7 <u>Erinn:</u> Beweisprinzip "Vollständige Induktion"

Betrifft Aussagen der Form

$$\forall n \geq n_0 : A(n) \qquad (*)$$

wobei $n_0 \in \mathbb{N}_0$ fest,
n durchläuft alle ganzen Zahlen $\geq n_0$,
$A(n)$ Aussageform über diese n.

Zum Bew. von $(*)$ durch (vollst.) Induktion zeigt man:

IA) $A(n_0)$ — Indukt. anfang

IS) $\forall n \geq n_0 : (\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Indukt. voraussetzung (IV)}}}{A(n)} \Rightarrow A(n+1))$ — Indukt. schritt

<u>Beisp</u>

1) Sei $x \in \mathbb{R}$, $x \geq -1$. Dann gilt:

$$\forall n \geq 1 : (1+x)^n \geq 1 + nx$$

<u>Bernoulli-Ungleich.</u>

<u>Bew</u>: mit Indukt.

IA) <u>$n=1$</u>: $(1+x)^1 \geq 1 + 1 \cdot x$ ✓

IS) Sei nun $n \geq 1$, und $(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x$ (IV)

<u>zu zeigen</u>: $(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$

$$(1+x)^{n+1} = \underbrace{(1+x)}_{\geq 0,\ \text{da } x \geq -1} (1+x)^n \underset{\text{IV}}{\geq} (1+x)\underline{(1+nx)} = 1 + x + nx + \underbrace{nx^2}_{\geq 0}$$

$$\geq 1 + (n+1)x \quad ✓$$

2) Sei $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$. Dann gilt:

$$\forall n \geq 0 : \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

<u>Geometr. Summe</u>

<u>Bew</u>: mit Indukt.

IA) <u>$n=0$</u>: $q^0 = 1 = \frac{1-q}{1-q}$ ✓

IS) Sei nun $n \geq 0$ und Beh. $A(n)$ richtig (IV)

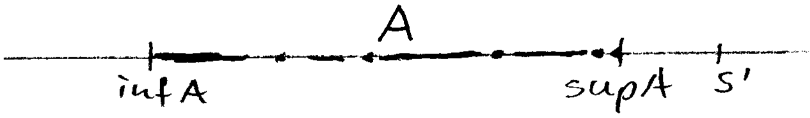
$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1} \underset{\text{IV}}{=} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} \cdot \frac{1-q}{1-q}$$

$$= \frac{1}{1-q}\left(1 - \cancel{q^{n+1}} + \cancel{q^{n+1}} - q^{n+2}\right) = \frac{1 - q^{n+2}}{1-q}$$

Also gilt: $\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$, d.h. $A(n+1)$ ✓

Vollständigkeit

Im Folg: K geord. Körper



1.8 Def: Sei $\emptyset \neq A \subset K$ und $s \in K$.

1) s <u>obere Schranke</u> von A $(A \leq s) :\Leftrightarrow \forall a \in A : a \leq s$
2) A <u>nach oben beschränkt</u> (n.o.b.) $:\Leftrightarrow \exists s' \in K : A \leq s'$
3) s <u>Maximum</u> von A $(s = \max A) :\Leftrightarrow s \in A \wedge A \leq s$
   (größtes Elem.)
4) s <u>Supremum</u> von A $(s = \sup A) :\Leftrightarrow$
   $s =$ kleinste obere Schranke von A
   $= \min\{t \in K \mid A \leq t\}$
   d.h. $A \leq s \wedge \forall t \in K : (A \leq t \Rightarrow s \leq t)$

1')–4') Analog mit $\geq$ statt $\leq$: "<u>untere Schranke</u> $(r \leq A)$", "nach unten beschr. (n.u.b)", "<u>Minimum</u> $(\min A)$" und "<u>Infimum</u>" $\inf A = \max\{r \in K \mid r \leq A\} =$ größte untere Schranke von A.

<u>Bemerk</u>: Max, Sup, Min und Inf sind eindeut. bestimmt, falls sie existieren.

Für Max: Seien s, s' Maxima von A

$$\Rightarrow \begin{matrix} s \in A \\ s' \in A \end{matrix} \begin{matrix} A \leq s' \Rightarrow s \leq s' \\ A \leq s \Rightarrow s' \leq s \end{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \underset{\text{antisymm}}{\Rightarrow} s = s'$$

1.9 Lemma: Für $\emptyset \neq A \subset K$ und $r, s \in K$ gilt:

1) Hat A ein Max, so hat A ein Sup, und es gilt:
   $\sup A = \operatorname{Max} A$
2) $s = \sup A \Leftrightarrow A \leq s \wedge \forall t < s \;\exists a \in A : t < a$
   d.h. $\left\{\begin{array}{l}\text{s ist obere Schranke von A und} \\ \text{jedes } t < s \text{ wird von einem } a \in A \text{ übertroffen}\end{array}\right.$

1') $r = \min A \Rightarrow r = \inf A$

2') $r = \inf A \Leftrightarrow r \leq A \wedge \forall t > r \;\exists a \in A : a < t$

Bew

1) Sei $s = \max A \Rightarrow s \in A \wedge A \leq s$
sei weiter $t \in K$ mit $A \leq t \Rightarrow s \leq t$ } d.h. $s = \sup A$

2) $s = \sup A \Leftrightarrow A \leq s \wedge \forall t \in K : (A \leq t \Rightarrow s \leq t)$

$$\neg(s \leq t) \Rightarrow \neg(\underbrace{A \leq t}_{\forall a \in A : a \leq t})$$

$$t < s \Rightarrow \exists a \in A : t < a$$

$\Leftrightarrow A \leq s \wedge \forall t \in K : (t < s \Rightarrow \exists a \in A : t < a)$ ✓

Beisp

1) $A \subset K$, A endl. $\neq \emptyset \Rightarrow A$ hat Max und Min.

Indukt. und
$\max\{a_1, \ldots, a_{n+1}\} = \max\{\max\{a_1, \ldots, a_n\}, a_{n+1}\}$!

2) $A = [r, s] := \{x \in K \mid r \leq x \leq s\}$, wobei $r, s \in K$, $r < s$
$\Rightarrow s = \max A$ und $s = \sup A$ (Lemma, 1))

3) $A = [r, s[:= \{x \in K \mid r \leq x < s\}$

Beh: $s = \sup A$, aber A hat kein Max.

$s = \sup A$: klar $A \leq s$

Zeigen: $\forall t < s \ \exists a \in A : t < a$ ((Lemma, 2))

Sei $t < s$.

Fall $t \leq r$: $\Rightarrow t \leq r < \underbrace{\frac{r+s}{2}}_{=: a} < s$ (Aufg. 1.2)

Fall $r < t$: $\Rightarrow r < t < \underbrace{\frac{t+s}{2}}_{=: a} < s$

Kein Max: Anderenfalls wäre

$$s = \sup A \underset{\text{Lemma, 1)}}{=} \max A \underset{\text{Def. Max}}{\in} A,$$ d.h. $s \in A = [r, s[$

Wid. !

1.10 Def: Ein geord. Körper K heißt vollständig, falls er das "Vollständigkeitsaxiom" erfüllt:

VOLL: Jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge A von K hat ein Supremum (in K).

Bemerk: K vollst, $A \subset K$, $A \neq \emptyset$ nach unten beschr.
$\Rightarrow$ A hat Infimum

[$A' := \{-a \mid a \in A\} \neq \emptyset$, nach oben beschr. ← Übung
$\Rightarrow A'$ hat Sup., und $-\sup A' = \inf A$ ←]

Satz (Dedekind 1831–1916) Es gibt (bis auf Isomorphie) genau einen vollst. geord. Körper; dieser wird mit $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ bezeichnet.

Beisp: $3{,}1415926\ldots$
In welchem Sinn beschreibt das eine reelle Zahl?
$A :=$ Menge mit den Elementen
$3{,}1,\ 3{,}14,\ 3{,}141,\ 3{,}1415,\ 3{,}14159,\ \ldots$
$\Rightarrow$ $A \neq \emptyset$ und nach oben beschr., z.B $A \leq 4$
$\underset{\text{VOLL}}{\Longrightarrow}$ $s = \sup A$ existiert in $\mathbb{R}$
s "realisiert $3{,}1415926\ldots$"

Allgem: seien $m \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, a_3, \ldots \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$
$A := \{m + \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot \frac{1}{10^i} \mid k \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$ und n.o.b. z.B $A \leq m+1$
$\underset{\text{VOLL}}{\Longrightarrow}$ $s := \sup A$ existiert in $\mathbb{R}$
s "realisiert $m, a_1 a_2 a_3 \ldots$"

Erste Konsequenzen aus VOLL

1.11 Satz: 1) $\mathbb{N}$ ist nicht nach oben beschränkt,
d.h. $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}: x < n$ (Archimedes)
2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n} < \varepsilon$ (Eudoxos)

Bew: 1) Ann: $\mathbb{N}$ ist n.o.b.

$\mathbb{N} \neq \emptyset \underset{\text{VOLL}}{\Longrightarrow}$ $\mathbb{N}$ hat Sup $s = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$

$s - 1 < s \underset{1.9,2)}{\Longrightarrow} \exists n \in \mathbb{N}: s - 1 < n$, d.h. $s < \underbrace{n+1}_{\in \mathbb{N}}$ Wid zu $\mathbb{N} \leq s$

$$\left.\begin{array}{l} \text{2) Sei } \varepsilon > 0 \Rightarrow 1/\varepsilon > 0 \\ \text{Archim. } \exists n \in \mathbb{N}: \frac{1}{\varepsilon} < n \end{array}\right\} \underset{\substack{\text{Kehrwert} \\ \text{Aufg 1,2}}}{\Longrightarrow} \frac{1}{n} < \varepsilon$$

✓

1.12 Satz: $\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$, d.h. für je zwei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gibt es ein $q \in \mathbb{Q}$ mit

$$a < q < b$$

Bew: sei $0 \leq a < b$
↑ o.E. (ohne Einschränkung)

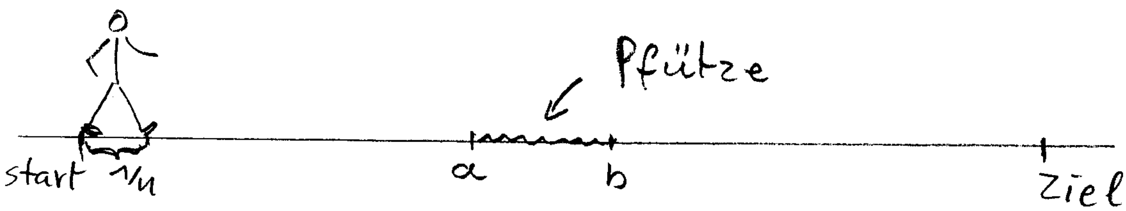
$b - a > 0 \underset{\text{Eudox.}}{\Longrightarrow} \exists n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n} < b - a$, d.h. $a + \frac{1}{n} < b$ (*)

Archim: $\exists m \in \mathbb{N}: m > na$, d.h. $\frac{m}{n} > a$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Wähle } \underline{\text{kleinstes}}\ m \in \mathbb{N} \text{ mit } \frac{m}{n} > a \\ \frac{m}{n} - \frac{1}{n} = \frac{m-1}{n} \leq a \Rightarrow \frac{m}{n} \leq a + \frac{1}{n} \underset{(*)}{<} b \end{array}\right\} \Rightarrow a < \frac{m}{n} < b$$

✓

Idee



wenn Schrittlänge $<$ Pfützenbreite, dann tritt er in die Pfütze
$1/n$ $\qquad$ $b-a$

1.13 <u>Intervalle</u>: Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$

beschränkt			unbeschränkt
$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ abg.			$\mathbb{R}_{\geq a} := [a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$
$]a,b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ offen			$\mathbb{R}_{> a} :=]a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$
$[a,b[$	$\leq$	$<$	$\mathbb{R}_{\leq b} =]-\infty, b]$
$]a,b]$	$<$	$\leq$	$\mathbb{R}_{< b} =]-\infty, b[$

$[a,b]$ heißt auch <u>kompaktes</u> Intervall.

1.14 <u>Potenzen</u> (und Wurzeln)

Sei $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$

$$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-mal}} \quad \underline{n\text{-te Potenz}} \text{ von } a$$

$$a^0 := 1$$

<u>Bemerk</u>: 1) <u>Potenzgesetze</u>

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n, \quad (a^m)^n = a^{m \cdot n}, \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

2) Für $n = 2k$ gerade: $(-a)^n = ((-a)^2)^k = (a^2)^k = a^n$,

d.h. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \mapsto a^n$ ist nicht injektiv

Betrachten daher die <u>Potenzfunktion</u> nur auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$

$$P_n : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad P_n(a) = a^n$$

3) Für alle $a, b \geq 0$ gilt:

$$a < b \Rightarrow a^n < b^n$$

d.h. P_n ist <u>streng monoton steigend</u>, insbes. injektiv

Indukt.: IA) $n = 1$ ✓

IS) Sei $n \geq 1$, $a < b$ und $a^n < b^n$ (IV)

$$a < b \underset{a^n \cdot}{\Rightarrow} a^{n+1} \leq a^n \cdot b \overset{\cdot b}{<} b^{n+1} \Rightarrow a^{n+1} < b^{n+1}$$

1.15 Satz: $P_n: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $P_n(a) = a^n$, ist bijektiv, d.h. für jedes $b \geq 0$ gibt es genau ein $a \geq 0$ mit $a^n = b$.

Notation: $\sqrt[n]{b} := a$ <u>n-te Wurzel</u> aus b

für $n=2$: $\sqrt{b} := \sqrt[2]{b}$ (Quadrat-) Wurzel

<u>Bew. für $n=2$</u>: Sei $b \geq 0$. Gesucht: $a \geq 0$ mit $a^2 = b$

klar für $b \in \{0,1\}$: $0^2 = 0$, $1^2 = 1$

<u>Fall $b > 1$</u>: Betrachte $A := \{x > 0 \mid x^2 < b\}$

$A \neq \emptyset$ und n.o.b., z.B. $1 \in A \wedge A \overset{?}{\leq} b$

⌈ sei $x \in A$. <u>Ann</u>: $x > b$. $\Rightarrow x^2 > b^2 \underset{b>1}{>} b$, d.h. $x^2 > b$ ↯.

$\underset{(\text{VOLL})}{\Longrightarrow}$ $a := \sup A$ existiert

<u>Behaupt.</u>: $a^2 = b$

zeigen: $a^2 < b$ und $a^2 > b$ führen jeweils zu Wid ($\underset{\text{Trich}}{\Longrightarrow}$ Beh)

<u>Ann $a^2 < b$</u>: zeigen: $\exists n \in \mathbb{N}: a + \frac{1}{n} \in A$ (Wid zu $A \leq a$)

⌈ $(a+\frac{1}{n})^2 = a^2 + \frac{1}{n}(2a + \frac{1}{n}) \underset{\frac{1}{n} \leq 1}{\leq} a^2 + \frac{1}{n}\underbrace{(2a+1)}_{>0} < b$ für $\frac{1}{n} < \frac{b-a^2}{2a+1}$

<u>Ann $a^2 > b$</u>: zeigen: $\exists n \in \mathbb{N}: (a - \frac{1}{n})^2 > b$ (*)

⌈ $(a-\frac{1}{n})^2 = a^2 - \frac{1}{n}2a + \frac{1}{n^2} > a^2 - \frac{1}{n}2a \geq b$ für $\frac{1}{n} < \frac{a^2-b}{2a}$

$a - \frac{1}{n} < a = \sup A \underset{1.9,2)}{\Rightarrow} \exists x \in A: a - \frac{1}{n} < x \underset{1.14,3)}{\Rightarrow} (a-\frac{1}{n})^2 < x^2 \underset{x \in A}{<} b$ ↯ zu (*)

<u>Fall $0 < b < 1$</u>: $\Rightarrow 1 < \frac{1}{b} \Rightarrow \exists a' > 0: (a')^2 = \frac{1}{b}$

$a := \frac{1}{a'} \Rightarrow a^2 = \frac{1}{(a')^2} = b$ ✓

<u>Folgerung</u>: $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ ist nicht vollständig

⌈ $A := \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0 \wedge x^2 < 2\}$ hat kein Sup. in $\mathbb{Q}$.

<u>Ann</u>: $a = \sup A \in \mathbb{Q}$ exist. $\xrightarrow[\text{obiger Bew. in } \mathbb{Q}]{} a^2 = 2$ ↯

1.16 Rechenregeln: Für $n, m \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt:

1) $a < b \Rightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$

2) $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

3) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

4) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

Bew: 1)

$(?)^n$ mon steig (1.14, 3))

$$\sqrt[n]{b} \leq \sqrt[n]{a} \Longrightarrow \underbrace{(\sqrt[n]{b})^n}_{b} \leq \underbrace{(\sqrt[n]{a})^n}_{a}$$

Das ist die Kontrapos von 1).

2) $((\sqrt[n]{a})^m)^n = (\sqrt[n]{a})^{m \cdot n} = ((\sqrt[n]{a})^n)^m = a^m$

$$\underset{\text{Def } \sqrt[n]{\ }}{\Longrightarrow} (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

3), 4) folgen aus entsprech. Pot.ges. (1.14, 1))

Bemerk: Für $m, n \in \mathbb{N}$ setzt man noch:

Für $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$: $\quad a^{-m} := \frac{1}{a^m} = (\frac{1}{a})^m$

Für $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$: $\quad a^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{a}$, $a^{\frac{m}{n}} := (\sqrt[n]{a})^m$

Dann gelten die Potenzgesetze für rationale Exponenten.

§ 2 Folgen

(Augustin Louis Cauchy 1798 – 1857
Karl Weierstraß 1815 – 1897)

Konvergenz

2.1 Def: Eine <u>Folge</u> in $\mathbb{R}$ ist eine Abb. $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \longmapsto a_n$

Notation: $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(a_n)_n$ (oder (a_n))

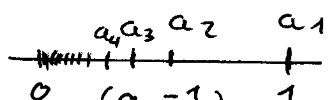
a_n heißt <u>n-tes Folgenglied</u>

<u>Beisp.</u>: $a_n = \frac{1}{n}$ $\quad (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots)$

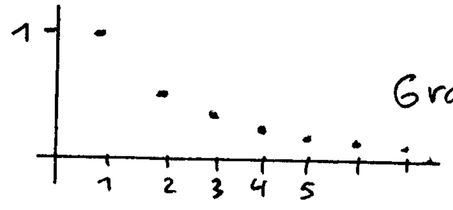
$a_n = (-1)^n$ $\quad (-1, 1, -1, 1, \ldots)$

$a_n = n$-te Primzahl $\quad (2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots)$

$a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{a_n} + 1$ für $n \geq 1$ $\quad (1, 2, 3/2, 5/3, 8/5, \ldots)$



$(a_n = \frac{1}{n})_n$



Graph von $(a_n = \frac{1}{n})_n$

<u>Zur Konvergenz-Definition</u>

$a_1 = 1$, $a_{n+1} = (1/a_n) + 1$ für $n \geq 1$

n	a_n	n	a_n
1	1	16	1, 618 034 447
2	2	17	1, 618 033 813
3	1, 5	18	1, 618 034 055
4	1, 666 666 666	19	1, 618 033 963
5	1, 6	20	1, 618 033 998
6	1, 625	21	1, 618 033 985
7	1, 615 384 615	22	1, 618 033 990
8	1, 619 047 619	23	1, 618 033 988
9	1, 617 647 058	24	1, 618 033 988
10	1, 618 181 818	25	1, 618 033 988
11	1, 617 977 528	26	1, 618 033 988
12	1, 618 055 555	27	1, 618 033 988
13	1, 618 025 751	28	1, 618 033 988
14	1, 618 037 135	29	1, 618 033 988
15	1, 618 032 786	30	1, 618 033 988

<u>Beobachtung</u>: Folgenglieder scheinen sich der Zahl $a = 1,618\,033\,988 \ldots$ zu nähern.

Fragen:

1) Woran machen wir das fest, d.h. was beobachten wir?

2) Wie können wir die Beobachtung so genau fassen, dass sie zu einer allgemeinen Definition von „$(a_n)_n$ konvergiert gegen a" taugt?

Zur Konvergenz-Definition

$a_1 = 1$, $a_{n+1} = (1/a_n) + 1$ für $n \geq 1$

n	a_n	n	a_n
1	1	16	1, 618 034 447
2	2	17	1, 618 033 813
3	1, 5	18	1, 618 034 055
4	1, 666 666 666	19	1, 618 033 963
5	1, 6	20	1, 618 033 998
6	1, 625	21	1, 618 033 985
7	1, 615 384 615	22	1, 618 033 990
8	1, 619 047 619	23	1, 618 033 988
9	1, 617 647 058	24	1, 618 033 988
10	1, 618 181 818	25	1, 618 033 988
11	1, 617 977 528	26	1, 618 033 988
12	1, 618 055 555	27	1, 618 033 988
13	1, 618 025 751	28	1, 618 033 988
14	1, 618 037 135	29	1, 618 033 988
15	1, 618 032 786	30	1, 618 033 988

k	n_0
1	4
2	7
3	12
4	12
5	14
6	19
7	19
8	23
9	23

20	50
50	122

Folgenglieder scheinen sich der Zahl a = 1, 618 033 988 … zu nähern.

Genauer:

Für jedes k = 1,…,9 gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt:
a_n und a sind bis zur k-ten Nachkommastelle gleich, d.h. $|a_n - a| < \frac{1}{10^k}$

$$\forall\, k \in \mathbb{N}\ \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \ \forall\, n \geq n_0 :\ |a_n - \mathrm{a}| < \frac{1}{10^k}$$

$$\forall\, \varepsilon \in \{\frac{1}{10^k} \mid k \in \mathbb{N}\}\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \ \forall\, n \geq n_0 :\ |a_n - \mathrm{a}| < \varepsilon$$

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\ \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \ \forall\, n \geq n_0 :\ |a_n - \mathrm{a}| < \varepsilon$$

2.2 Def: Sei $(a_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$.

$(a_n)_n$ <u>konvergiert gegen</u> a $:\Longleftrightarrow$

$$\underbrace{\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : \underbrace{|a_n - a| < \varepsilon}_{①}}_{②}$$

a heißt dann <u>Grenzwert</u> von $(a_n)_n$

Notation: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a = \lim a_n$ oder $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$

$(a_n)_n$ <u>Nullfolge</u> $:\Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

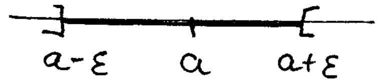
$(a_n)_n$ <u>konvergent</u> $:\Longleftrightarrow \exists b \in \mathbb{R}: \lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$

$(a_n)_n$ <u>divergent</u> $:\Longleftrightarrow (a_n)_n$ nicht konvergent

① $\underset{1.5}{\Longleftrightarrow}$ Abstand von a_n zu a ist $< \varepsilon$

$\Longleftrightarrow a_n \in \,]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\, =: \mathcal{U}_\varepsilon(a)$

ε-<u>Umgebung</u> von a



② $\Longleftrightarrow$ ab einem Index n_0 liegen alle a_n in $\mathcal{U}_\varepsilon(a)$

$\Longleftrightarrow$ es gibt nur endl. viele $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n \notin \mathcal{U}_\varepsilon(a)$

$\Longleftrightarrow$ für <u>fast alle</u> $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_n \in \mathcal{U}_\varepsilon(a)$

$\Updownarrow$

"alle bis auf endl. viele"

<u>Fazit</u>: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Longleftrightarrow$ Jede ε-Umgeb. von a enthält fast alle Folgenglieder

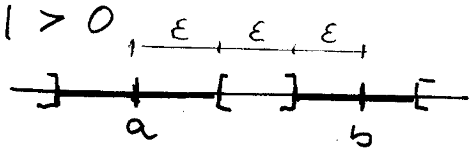
<u>Bemerk</u>:

1) Von "$\forall \varepsilon > 0$" sind nur die "belieb. kleinen $\varepsilon > 0$" relevant.
2) n_0 hängt von ε ab: "$n_0(\varepsilon)$"
3) je kleiner ε, desto größer $n_0(\varepsilon)$ (i. Allg.)

<u>Lemma</u>: Konvergiert $(a_n)_n$ gegen a und gegen b, so gilt $a = b$.

<u>Bew</u>: <u>Ann</u>: $a \neq b$. $\Longrightarrow \varepsilon := \frac{1}{3}|a-b| > 0$

$\Longrightarrow \mathcal{U}_\varepsilon(a) \cap \mathcal{U}_\varepsilon(b) = \emptyset$ (*)



$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \Longrightarrow$ fast alle $a_n \in \mathcal{U}_\varepsilon(a)$

$\underset{(*)}{\Longrightarrow}$ nur endl. viele $a_n \in \mathcal{U}_\varepsilon(b)$ Wid zu $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$ ✓

2.3 Beisp

1) $a \in \mathbb{R}$, $(a_n = a)_n = (a, a, a, \dots)$ konst. Folge $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a = a$

$\forall \varepsilon > 0 \ \forall n \geq 1: \ |a_n - a| = |\underbrace{a-a}_{0}| < \varepsilon$

2) $(1/n)_n = (1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots)$

Beh: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Sei $\varepsilon > 0$. Gesucht: $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$

Eudoxos: $\left.\begin{array}{l} \exists n_0 \in \mathbb{N}: \frac{1}{n_0} < \varepsilon \\ \forall n \geq n_0: \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$

3) Sei $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$

Beh: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[r]{n}} = 0$

Sei $\varepsilon > 0$. Gesucht: $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|\frac{1}{\sqrt[r]{n}} - 0| < \varepsilon$ für $n \geq n_0$

Archimed.: $\exists n_0 \in \mathbb{N}: n_0 > \frac{1}{\varepsilon^r}$

$n \geq n_0 \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon^r} = (\frac{1}{\varepsilon})^r \underset{\sqrt[r]{\ }\text{ streng mon. steig.}}{\Longrightarrow} \sqrt[r]{n} > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[r]{n}} < \varepsilon$

4) Beh: $(a_n = (-1)^n)_n = (-1, 1, -1, 1, \dots)$ ist divergent

Ann: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ für ein $a \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ für $\varepsilon = 1$: $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0: a_n \in \mathcal{U}_1(a)$

o.E. n_0 gerade $\Longrightarrow a_{n_0} = 1$, $a_{n_0+1} = -1$

$\Rightarrow \quad a - 1 < -1 < 1 < a + 1$

$+1 \Downarrow \qquad \Downarrow -1$

$a < 0 \qquad 0 < a \quad \lightning$.

5) Beh: $(a_n = n)_n = (1, 2, 3, 4, \dots)$ ist divergent

Ähnlich wie 4) mit $\varepsilon = 1/2$.

Ann: $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ für $\varepsilon = \frac{1}{2}$: $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0: a_n = n \in \mathcal{U}_{\frac{1}{2}}(a)$

$\Rightarrow \quad a - \frac{1}{2} < n_0 < n_0 + 1 < a + \frac{1}{2}$

$+1/2 \Downarrow \qquad \Downarrow -1/2$

$a < n_0 + \frac{1}{2} < a \quad \lightning$.

Bemerke + MERKE: Für Folge $(a_n)_n$ in $\mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$ gilt:

$(a_n)_n$ konvergiert gegen a $\iff$ $(a_n - a)_n$ ist Nullfolge

$$\ulcorner \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : \ |a_n - a| < \varepsilon$$
$$|a_n - a| = |(a_n - a) - 0|$$

✓

2.4 Def: Eine Folge $(a_n)_n$ heißt beschränkt $:\iff$

$$\exists K \in \mathbb{R}_{>0} \ \forall n \in \mathbb{N} : \ |a_n| \leq K$$

Beisp.: 1) $(a_n = (-1)^n)_n$ ist beschränkt. $(K = 1)$

2) $(a_n = n)_n$ ist nicht beschr.. (Archimedes)

Satz: $(a_n)_n$ konvergent $\Longrightarrow$ $(a_n)_n$ beschränkt

Bew: Sei $a = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$

Für $\varepsilon = 1$ gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < 1$ für alle $n \geq n_0$.

$$\Longrightarrow \forall n \geq n_0 : \ |a_n| = |a_n - a + a| \underset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} |a_n - a| + |a| < |a| + 1$$

Sei $K := \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0 - 1}|, |a| + 1\}$

$$\Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : \ |a_n| \leq K$$ ✓

2.5 Lemma: $\left.\begin{array}{l} (a_n)_n \text{ Nullfolge} \\ (b_n)_n \text{ beschränkt} \end{array}\right\} \Longrightarrow (a_n b_n)_n$ Nullfolge

Bew: Sei $\varepsilon > 0$.

$(b_n)_n$ beschr. $\Longrightarrow$ es gibt $K > 0$ mit $|b_n| \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$

$(a_n)_n$ Nullfolge $\Longrightarrow$ " " $n_0 \in \mathbb{N}$ " $|a_n| < \frac{\varepsilon}{K}$ " " $n \geq n_0$

$$\Longrightarrow \forall n \geq n_0 : \ |a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| < \frac{\varepsilon}{K} \cdot K = \varepsilon$$ ✓

Beisp.

$$\frac{(-1)^n \cdot 100}{n} = \underbrace{(-1)^n \cdot 100}_{\substack{\text{beschr.} \\ (K = 100)}} \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{\substack{\text{Null-} \\ \text{folge}}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Grenzwertsätze

"lim ist verträglich mit $+,-,\cdot,\div$ und $\leq$"

2.6 **Satz**: Seien $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ Folgen in $\mathbb{R}$ mit $\lim a_n = a$ und $\lim b_n = b$. Dann gilt:

1) $\lim(a_n+b_n) = a+b$
2) $\lim(a_n-b_n) = a-b$
3) $\lim(a_n\cdot b_n) = a\cdot b$
4) $\lim(a_n/b_n) = a/b$, falls $b \neq 0 \neq b_n$ für alle n
5) $\lim(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha a + \beta b$, wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Bew: 1) sei $\varepsilon > 0$,

$a_n \to a \Rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_1 : |a_n - a| < \varepsilon/2$

$b_n \to b \Rightarrow \exists n_2 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_2 : |b_n - b| < \varepsilon/2$

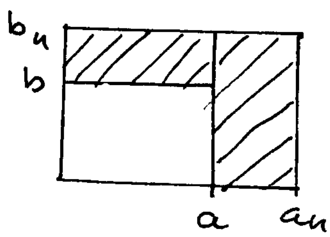
Dann gilt für alle $n \geq n_0 := \max\{n_1, n_2\}$

$$|(a_n+b_n)-(a+b)| = |(a_n-a)+(b_n-b)|$$
$$\underset{\Delta\text{Ung.}}{\leq} |a_n-a|+|b_n-b| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

3) $a_n b_n - ab = (a_n-a)b_n + (b_n-b)a$

$= \text{0-Folge} \cdot \text{beschr.} + \text{0-Folge} \cdot \text{beschr.}$

$\underset{2.5}{=} \text{0-Folge} + \text{0-Folge} \underset{1)}{=} \text{0-Folge}$



5) Wende 3) auf $(a_n)_n, (\alpha)_n$ bzw. $(b_n)_n, (\beta)_n$ an, und dann 1).

2) folgt aus 5): $\alpha = 1, \beta = -1$

4) reicht zu zeigen: $\lim 1/b_n = 1/b$

<u>zeigen zuerst</u>: $(1/b_n)_n$ ist beschränkt

$b_n \to b \neq 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |b_n - b| < \frac{|b|}{2}$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0 : |b| = |b - b_n + b_n| \leq |b_n - b| + |b_n| < \frac{|b|}{2} + |b_n|$

also: $\frac{|b|}{2} < |b_n|$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0 : 1/|b_n| < 2/|b|$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : 1/|b_n| \leq \max\left\{\frac{1}{|b_1|}, \ldots, \frac{1}{|b_{n_0-1}|}, \frac{2}{|b|}\right\}$

$$\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} = \frac{b-b_n}{b_n \cdot b} = \underbrace{\frac{1}{b_n}}\cdot\underbrace{\frac{1}{b}}\cdot\underbrace{(b-b_n)}_{\text{0-Folge}} \underset{2.5}{\Rightarrow} \left(\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b}\right)_n \text{ 0-Folge} \checkmark$$

beschränkt

<u>Beisp</u>: 1) sei $c \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{N}$

$$\frac{c}{n^r} = c \cdot \underbrace{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{n}}_{r\text{-mal}} \xrightarrow[n\to\infty]{} c \cdot 0 \cdot 0 \cdots 0 = 0$$

2) $$\frac{3n^2-7n+2}{2n^2+5} \underset{\frac{1/n^2}{1/n^2}}{=} \frac{3-7\frac{1}{n}+2\frac{1}{n^2}}{2+5\frac{1}{n^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{3-0+0}{2+0} = \frac{3}{2}$$

2.7 <u>Satz</u>: Seien $(a_n)_n, (b_n)_n, (c_n)_n$ Folgen in $\mathbb{R}$ mit
$a_n \le b_n \le c_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$
$\lim a_n = a$ und $\lim c_n = c$.

Dann gilt:

1) $a \le c$

2) $a = c \Rightarrow \lim b_n = a$ "Sandwich-Prinzip"

<u>Bew</u>: Sei $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $a_n \le b_n \le c_n$ für alle $n \ge n_1$.

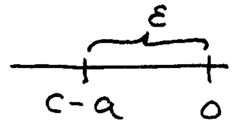
1) Betrachte $d_n := c_n - a_n$

$\Rightarrow d_n \ge 0$ für alle $n \ge n_1$ $(*)$

und $d_n \to c-a$ (nach 2.6)

<u>Ann</u>: $c - a < 0$

$\Rightarrow \varepsilon := a - c > 0$ und $U_\varepsilon(c-a) \subset \mathbb{R}_{<0}$



$\underset{(*)}{\Rightarrow} \forall n \ge n_1: d_n \notin U_\varepsilon(c-a)$ Wid zu $d_n \to c-a$

Also gilt: $c - a \ge 0$, d.h. $a \le c$

2) Sei $\varepsilon > 0$. Gesucht: $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $b_n \in U_\varepsilon(a)$ für alle $n \ge n_0$

$\lim a_n = \lim c_n = a \Rightarrow \exists n_2 \in \mathbb{N}\ \forall n \ge n_2: a_n, c_n \in U_\varepsilon(a)$

$\Rightarrow \forall n \ge n_0 := \max\{n_1, n_2\}$:

$a - \varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < a + \varepsilon$, d.h. $b_n \in U_\varepsilon(a)$ ✓

<u>Achtung</u>: $a_n < c_n$ für alle n $\not\Rightarrow$ $\lim a_n < \lim c_n$

z.B. $0 < \frac{1}{n}$ für alle n, aber $0 = \lim \frac{1}{n}$

2.8 Beisp

1) Beh: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Betrachte $x_n := \sqrt{\frac{2}{n-1}} > 0$ für $n \geq 2$

Erinn (2.3, 3)): $x_n = \sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{n-1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{2}\cdot 0 = 0 \quad (*)$

$$(1+x_n)^n \underset{\text{Bin. Form.}}{=} \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x_n^k \underset{x_n>0}{\geq} \binom{n}{2}x_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{2}{n-1} = n > 1$$

Also: $(1+x_n)^n > n > 1$

$$\underset{\sqrt[n]{\ }\text{ mon}}{\Longrightarrow} \quad \underset{\substack{\downarrow (*)\\ 1}}{1+x_n} > \underset{\substack{\downarrow\\ 1}}{\sqrt[n]{n}} > \underset{\substack{\downarrow\\ 1}}{\sqrt[n]{1}} = 1 \qquad (n\to\infty)$$

Sandwich.

2) Beh: $\forall a \in \mathbb{R}_{>0}: \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

Fall $a \geq 1$: $\exists n_0 \in \mathbb{N}: n_0 \geq a$ (Archimed.)

$\Rightarrow \forall n \geq n_0: \quad n \geq a \geq 1$, also $\underset{\substack{1)\downarrow\\ 1}}{\sqrt[n]{n}} \geq \underset{\substack{\downarrow\\ 1}}{\sqrt[n]{a}} \geq \underset{\substack{\downarrow\\ 1}}{1}$

sandwich

Fall $0<a<1$: $\Rightarrow 1 < \frac{1}{a}$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{\frac{1}{1/a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{1/a}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{1} = 1 \quad \text{(nach 2.6 u. Fall I)}$$

3) Sei $(a_n)_n$ konverg. Folge in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ und $a = \lim a_n$

Beh: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n} = \sqrt{a}$

Fall $a>0$: $$\underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{0} \leq \underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{|\sqrt{a_n}-\sqrt{a}|} \underset{\cdot\frac{\sqrt{a_n}+\sqrt{a}}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a}}}{=} \frac{|a_n-a|}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a}} \leq \underset{\substack{\downarrow \lim a_n = a\\ 0}}{\frac{|a_n-a|}{\sqrt{a}}}$$

← sandwich

Fall $a=0$: d.h. $(a_n)_n$ 0-Folge

Zu $\varepsilon>0$ gibt es $n_0\in\mathbb{N}$ mit $a_n<\varepsilon^2$ für alle $n\geq n_0$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0: \sqrt{a_n} < \varepsilon$ ✓

Bestimmte Divergenz

2.9 Def: Sei $(a_n)_n$ Folge in $\mathbb{R}$.

$(a_n)_n$ heißt bestimmt divergent gegen $\underset{(-\infty)}{+\infty}$ $:\Longleftrightarrow$

$\forall K > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 : \; a_n > K$
$(< -K)$

Notation: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \underset{(-\infty)}{+\infty}$ oder $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \underset{(-\infty)}{+\infty}$

Beisp: 1) $r \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^r = +\infty$ (da $n^r \geq n$ und Archim.)

2) $((-1)^n)_n$ ist diverg., aber nicht bestimmt diverg.

2.10 Satz: Für $q \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{N}_0$ gilt:

1) $1 < q \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{q^n}{n^r} = +\infty$, insbes. $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$

2) $-1 < q < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^r q^n = 0$, insbes $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$

Bew: 1) $1 < q \Rightarrow 1 < \sqrt[r+1]{q} = 1 + x$ für ein $x > 0$

$\Rightarrow q^n = ((1+x)^{r+1})^n = (\underbrace{(1+x)^n}_{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \, > \, nx \; (k=1)})^{r+1} > n^{r+1} x^{r+1}$

$\Rightarrow \frac{q^n}{n^r} > n x^{r+1}$ (∗)

Sei $K > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{K}{x^{r+1}}$ (Archimed.)

$\Rightarrow \forall n \geq n_0 : \frac{q^n}{n^r} \underset{(*)}{>} n x^{r+1} > \frac{K}{x^{r+1}} \cdot x^{r+1} = K$

2) Können annehmen $q \neq 0$.

Sei $\varepsilon > 0$.

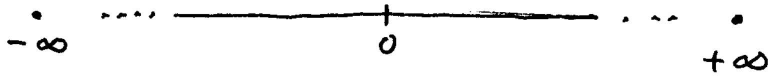
$|q| < 1 \Rightarrow \frac{1}{|q|} > 1 \Rightarrow \frac{1}{|n^r q^n|} = \frac{1}{n^r} \left(\frac{1}{|q|}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ (nach 1))

$\Rightarrow$ für $K = \frac{1}{\varepsilon}$: $\exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 : \frac{1}{|n^r q^n|} > \frac{1}{\varepsilon}$

d.h. $|n^r q^n| < \varepsilon$ ✓

2.11 Exkurs: Erweiterung von $\mathbb{R}$ durch $+\infty, -\infty$

$+\infty, -\infty \notin \mathbb{R}$, $\quad \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$



I) Ordnung

Def: $-\infty < a < +\infty$ für alle $a \in \mathbb{R}$

$-\infty < +\infty$

Dann gilt:

-) Jedes $A \subset \mathbb{R}$ hat Sup und Inf in $\overline{\mathbb{R}}$

z.B. $\sup \mathbb{Z} = +\infty$, $\inf \mathbb{Z} = -\infty$

-) Satz: Seien $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ Folgen in $\mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \underset{(-\infty)}{+\infty}$ und $a_n \underset{(\geq b_n)}{\leq} b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$

Dann gilt: $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = \underset{(-\infty)}{+\infty}$

II) Add. und Mult.

Def: $\pm\infty + a = a + (\pm\infty) := \pm\infty$ für alle $a \in \mathbb{R}$

$$\pm\infty \cdot a = a \cdot (\pm\infty) := \begin{cases} \pm\infty & \text{falls } a > 0 \\ \mp\infty & \text{\quad " } \quad a < 0 \end{cases}$$

$$\underset{(-)}{(+\infty)} + \underset{(-)}{(+\infty)} := \underset{(-)}{+\infty}$$

$$(+\infty) \cdot (+\infty) := +\infty =: (-\infty) \cdot (-\infty)$$

$$(+\infty) \cdot (-\infty) := -\infty$$

$$a/\pm\infty := 0 \quad \text{für alle } a \in \mathbb{R}$$

Nicht def.!: $(+\infty) + (-\infty)$, $(\pm\infty) \cdot 0$, $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Satz: Seien $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ Folgen in $\mathbb{R}$ und $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ mit $\lim a_n = a$ und $\lim b_n = b$.

Dann gilt (falls rechte Seite definiert ist):

$$\lim_{n \to \infty} (a_n \square b_n) = a \square b, \text{ wobei } \square = +, -, \cdot \text{ oder } \div$$

[siehe Grieser S. 100/101]

Beisp: Sei $(a_n)_n$ mit $a_n > 2n^2 - 10n$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Beh: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$

$$2n^2 - 10n = 2n(n-5)$$

$$\left.\begin{array}{l} n \longrightarrow +\infty \\ 2 \longrightarrow 2 \\ -5 \longrightarrow -5 \end{array}\right\} \underset{\text{Satz}}{\Longrightarrow} 2n(n-5) \longrightarrow \underbrace{2\cdot(+\infty)}_{+\infty}\cdot\underbrace{((+\infty)+(-5))}_{+\infty} = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} 2n^2 - 10n \longrightarrow +\infty \\ a_n > 2n^2 - 10n \end{array}\right\} \underset{\text{I) Satz}}{\Longrightarrow} a_n \longrightarrow +\infty$$

2.12 Satz: Seien $p(n) = \sum\limits_{i=0}^{r} a_i n^i$ mit $a_i \in \mathbb{R}$, $a_r \neq 0$

$$q(n) = \sum_{j=1}^{s} b_j n^j \text{ mit } b_j \in \mathbb{R},\ b_s \neq 0$$

Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{q(n)} = \begin{cases} +\infty & \text{falls } r > s,\ a_r/b_s > 0 \\ -\infty & \text{"} \quad r > s,\ a_r/b_s < 0 \\ a_r/b_s & \text{"} \quad r = s \\ 0 & \text{"} \quad r < s \end{cases}$$

Bew: $\dfrac{p(n)}{q(n)} = \dfrac{n^r}{n^s} \cdot \dfrac{a_r + a_{r-1}\frac{1}{n} + \cdots + a_0 \frac{1}{n^r}}{b_s + b_{s-1}\frac{1}{n} + \cdots + b_0 \frac{1}{n^s}}$

$$= \frac{n^r}{n^s}\cdot B_n, \text{ wobei } \lim_{n\to\infty} B_n = \frac{a_r}{b_s} \quad \text{(nach 2.6)}$$

und weiter:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^r}{n^s} = \begin{cases} \lim n^{r-s} = +\infty & \text{falls } r > s \\ 1 & \text{falls } r = s \\ \lim \frac{1}{n^{s-r}} = 0 & \text{falls } r < s \end{cases}$$

2.13 Monotone Folgen

Def: $(a_n)_n$ monoton steigend (fallend) $:\Longleftrightarrow$
$\forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq a_{n+1}$ (bzw. $a_n \geq a_{n+1}$)

Satz: $(a_n)_n$ monoton und beschränkt
$\Rightarrow (a_n)_n$ konvergent

Bew: Sei etwa $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots$
$A := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$ nach oben beschränkt

$(a_n)_n$ beschr: $\exists K > 0\ \forall n \in \mathbb{N}: |a_n| \leq K$ (2.4)
$a_n \leq |a_n|$

$\underset{\text{VOLL}}{\Rightarrow}$ $a := \sup A$ exist.

zeigen: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

Sei $\varepsilon > 0$,
$a - \varepsilon < a = \sup A \underset{1.9}{\Rightarrow} \exists n_0 \in \mathbb{N}: a - \varepsilon < a_{n_0}$

Außerdem: $\forall n \geq n_0: a_{n_0} \underset{\text{mon.}}{\leq} a_n \underset{A \leq a}{\leq} a < a + \varepsilon$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0: a_n \in U_\varepsilon(a)$ ✓

2.14 Beisp

1) $a_1 := 1$, $a_{n+1} := \sqrt{2 + a_n}$ für $n \geq 1$

Beh: i) $(a_n)_n$ mon. steig. und beschr.
ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$

Bew: i) zeigen mit Indukt: $\forall n \in \mathbb{N}: a_n < a_{n+1} < 2$

IA) $n = 1$: $a_1 = 1 < \underbrace{\sqrt{2+1}}_{a_2} < 2$ ✓

IS) Sei $n \geq 1$ und $a_n < a_{n+1} < 2$ (IV)

$\underset{2+}{\Rightarrow}$ $2 + a_n < 2 + a_{n+1} < 2 + 2 = 4$

$\underset{\sqrt{\ }}{\Rightarrow}$ $\underbrace{\sqrt{2 + a_n}}_{a_{n+1}} < \underbrace{\sqrt{2 + a_{n+1}}}_{a_{n+2}} < \sqrt{4} = 2$ ✓

ii) Nach i) und Satz 2.13 ist $(a_n)_n$ konvergent

$$a := \lim a_n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Trick}}}{=} \lim a_{n+1} = \lim \sqrt{2+a_n}$$

$$\underset{2.8,3)}{=} \sqrt{\lim(2+a_n)} \underset{2.6}{=} \sqrt{2+a}$$

Also: $a = \sqrt{2+a}$

$\Rightarrow a^2 = 2+a$, d.h. $0 = a^2 - a - 2 = (a+1)(a-2)$

$\Rightarrow a \neq -1$ oder $\underline{\underline{a = 2}}$

da alle $a_n \geq 1$

2) <u>Die Eulersche Zahl e</u>

$$e_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

n	1	2	3	4	5	10	100	1000
e_n	2	2,25	2,37	2,44	2,49	2,59	2,705	2,717

<u>Beh</u>: $(e_n)_n$ ist mon. steig. und beschr.

<u>Bew</u>: Erinn (1.7,1)): $-1 < x \neq 0 \Rightarrow \forall n \geq 2: (1+x)^n > 1+nx$ $(*)$

<u>mon. steig</u>: <u>zeigen</u>: $\forall n \geq 2$: $e_n/e_{n-1} > 1$

$$e_n/e_{n-1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} = \left(\frac{n+1}{n} \cdot \frac{n-1}{n}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1}$$

$$= \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1}$$

$$\underset{(*)}{>} \left(1 - n\frac{1}{n^2}\right) \cdot \frac{n}{n-1} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{n}{n-1} = 1$$

<u>beschränkt</u>:

$$e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{k}}_{\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}$$

$$\leq 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \underset{1.7,2)}{=} 1 + \frac{1-(1/2)^n}{1-1/2} < 1 + \frac{1}{1/2} = 3$$

$\underset{2.13}{\Longrightarrow}$ $(e_n)_n$ konvergiert

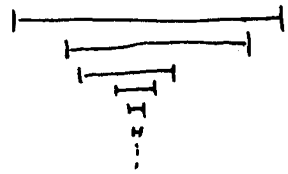
$$\boxed{e := \lim_{n \to \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \approx 2{,}71828\,1828$$

2.15 Prinzip der Intervallschachtelung

Satz: Sei $(I_n = [a_n, b_n])_n$ eine Folge kompakter Intervalle mit folg. Eigenschaften:

i) $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$

ii) $(\underbrace{b_n - a_n}_{=: |I_n| \text{ Intervallänge}})_n$ ist 0-Folge



Dann gibt es genau ein $c \in \mathbb{R}$ mit $c \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, kurz:
$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{c\}$$

Beisp: $I_n = [1, 1 + \frac{1}{n}]$, $|I_n| = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$
$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [1, 1 + \tfrac{1}{n}] = \{1\}$$

Bem: Für offene Intervalle gilt das nicht:
$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}}]1, 1 + \tfrac{1}{n}[= \emptyset$$

Bew des Satzes:

Wegen i) sind $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ monoton und beschr.
$$a_1 \le a_2 \le a_3 \le \dots \le b_3 \le b_2 \le b_1$$
$$\underset{2.13}{\Longrightarrow} \quad a := \lim_{n \to \infty} a_n \quad \text{und} \quad b := \lim_{n \to \infty} b_n \quad \text{existieren}$$
$$\Longrightarrow \quad 0 \underset{ii)}{=} \lim_{n \to \infty} (b_n - a_n) \underset{2.6}{=} b - a, \quad \text{d.h. } b = a$$

zeigen: $c \in [a_n, b_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ $\Longleftrightarrow$ $c = a$

„$\Longrightarrow$": Sei $c \in \mathbb{R}$ mit $a_n \le c \le b_n$ für alle n
$$\underset{2.7}{\Longrightarrow} \quad a \le c \le b = a, \quad \text{d.h. } c = a$$

„$\Longleftarrow$": zeigen: $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \le a = b \le b_n$

$a = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \Longrightarrow a_n \le a$ für alle $n \in \mathbb{N}$

$b = \inf\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\} \Longrightarrow b \le b_n$ " " $n \in \mathbb{N}$

✓

2.16 Def: Eine Teilfolge einer Folge $(a_n)_n$ in $\mathbb{R}$ ist eine Folge der Form $(a_{n_k})_k$, wobei

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots$$

eine streng monoton steig. Folge in $\mathbb{N}$ ist.

Beisp: $(a_n = \frac{1}{n})_n = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots)$

$(n_k = 2k-1)_k = (1, 3, 5, 7, \dots)$

$(a_{n_k})_k = (1, 1/3, 1/5, 1/7, \dots)$

$$\mathbb{N} \xrightarrow{(n_k)_k} \mathbb{N} \xrightarrow{(a_n)_n} \mathbb{R}$$

$$k \longmapsto 2k-1,\quad n \longmapsto 1/n$$

$$k \underset{(a_{n_k})_k}{\longmapsto} 1/2k-1$$

Lemma: Jede Teilfolge einer konvergenten Folge ist konvergent mit dem gleichen Grenzwert.

Bew: Sei $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $(a_{n_k})_k$ Teilfolge von $(a_n)_n$

Sei $\varepsilon > 0$. Gesucht: $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$ für alle $k \geq k_0$

$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$

$(n_k)_k$ streng mon. steig. $\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}: n_k \geq k$

$$\begin{matrix} n_1 & < & n_2 & < & n_3 & < & \dots \\ \rotatebox{90}{$\leq$} & & \rotatebox{90}{$\leq$} & & \rotatebox{90}{$\leq$} \\ 1 & & 2 & & 3 \end{matrix}$$

Wähle $k_0 := N$. Dann gilt für alle $k \geq k_0 = N$

$n_k \geq k \geq N$ und damit $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$ ✓

Anwendung: Divergenznachweis

Beh: Die Folge $(a_n = (-1)^n(1+\frac{1}{n}))_n$ konvergiert nicht

Betrachte die Teilfolgen

$(a_{2k} = 1 + \frac{1}{2k})_k = (1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{6}, \dots)$

$(a_{2k-1} = -1 - \frac{1}{2k-1})_k = (-1-1, -1-\frac{1}{3}, -1-\frac{1}{5}, \dots)$

Es gilt: $\lim_{k\to\infty} a_{2k} = 1 \neq -1 = \lim_{k\to\infty} a_{2k-1}$

$\underset{\text{Lemma}}{\Longrightarrow}$ $(a_n)_n$ nicht konvergent

1781–1848 1815–1897

2.17 Satz (Bolzano–Weierstraß): Jede beschränkte Folge $(a_n)_n$ in $\mathbb{R}$ hat eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_k$

Bew: 1) Konstruiere induktiv

$$(I_k = [u_k, v_k])_k \quad , \quad (a_{n_k})_k$$

mit i) $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$

ii) $|I_{k+1}| = \frac{1}{2} |I_k|$ $\Big\} \Rightarrow (I_k)_k$ Intervallschacht.

iii) I_k enthält unendl. viele Folgenglieder a_n

iv) $a_{n_k} \in I_k$

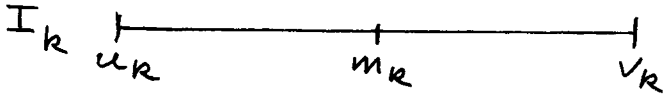
$(a_n)_n$ beschränkt $\Rightarrow \exists K > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq K$

k=1: $I_1 = [u_1, v_1] := [-K, K]$

$n_1 := 1$, d.h. $a_{n_1} = a_1$

Sei nun $k \geq 1$ und $I_k = [u_k, v_k]$, a_{n_k} bereits konstruiert (mit Eigensch. i) – iv))

$m_k := \frac{1}{2}(u_k + v_k)$



$$I_{k+1} := \begin{cases} [u_k, m_k] & \text{falls } [u_k, m_k] \text{ unendl. viele } a_n \text{ enthält} \\ [m_k, v_k] & \text{sonst} \end{cases}$$

$\Rightarrow I_{k+1} \subset I_k$, $|I_{k+1}| = \frac{1}{2} |I_k|$ und I_{k+1} enthält unendl. viele a_n

Setze $n_{k+1} := \min \{ n \in \mathbb{N} \mid n > n_k, a_n \in I_{k+1} \}$

2) **zeigen**: $(a_{n_k})_k$ konvergiert

$(I_k = [u_k, v_k])_k$ ist Intervallschachtelung

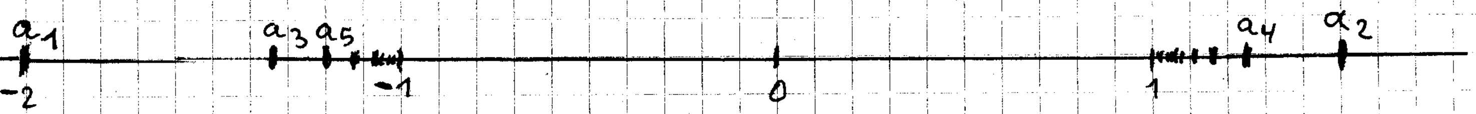
$$\overset{2.15}{\Longrightarrow} \left. \begin{array}{l} \lim\limits_{k \to \infty} u_k = \lim\limits_{k \to \infty} v_k =: c \\ \forall k \in \mathbb{N} : u_k \leq a_{n_k} \leq v_k \end{array} \right\} \underset{\text{sandwich}}{\Longrightarrow} \lim_{k \to \infty} a_{n_k} = c \quad \checkmark$$

Zum Satz v. Bolzano-Weierstraß

Beispiel zum Beweis.

für die Folge $a_n = (-1)^n (1 + \frac{1}{n})$

$$a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$



$I_1 = [-2, 2]$ $\quad a_{n_1} = a_1 = -2$

$I_2 = [-2, 0]$ $\quad a_{n_2} = a_3 = -4/3$

$I_3 = [-2, -1]$ $\quad a_{n_3} = a_5 = -6/5$

$I_4 = [-\frac{3}{2}, -1]$ $\quad a_{n_4} = a_7 = -8/7$

$I_5 = [-\frac{5}{4}, -1]$ $\quad a_{n_5} = a_9 = -10/9$

$I_6 = [-\frac{9}{8}, -1]$ $\quad a_{n_6} = a_{11} = -12/11$

$I_7 = [-\frac{17}{16}, -1]$ $\quad a_{n_7} = a_{17} = -18/17$

$I_8 = [-\frac{33}{32}, -1]$ $\quad a_{n_8} = a_{33} = -34/33$

$$\lim_{k \to \infty} a_{n_k} = -1$$

2.18 Anwend.: Häufungspunkte, Cauchy-Folgen

I) Def: $a \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt von $(a_n)_n :\Longleftrightarrow$

es gibt Teilfolge $(a_{n_k})_k$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$

$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : a_n \in U_\varepsilon(a)$ für unendl. viele $n \in \mathbb{N}$

$\mathcal{H} := \{ a \in \mathbb{R} \mid a$ Häufungspunkt von $(a_n)_n \}$

S.v. Bolz-Weierstr.: $(a_n)_n$ beschr. $\Rightarrow \mathcal{H} \neq \emptyset$

Satz: $(a_n)_n$ beschr. $\Rightarrow \mathcal{H}$ hat ein Max. und ein Min.

$\max \mathcal{H} =: \limsup a_n$ "Limes superior"
$\min \mathcal{H} =: \liminf a_n$ "Limes inferior"

[s. Grieser 7.6.3]

Beisp: $a_n = (-1)^n (1 + \frac{1}{n}) \Rightarrow \mathcal{H} = \{-1, 1\}$

II) Def: Folge $(a_n)_n$ in $\mathbb{R}$ heißt Cauchy-Folge $:\Longleftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n, m \geq n_0 : |a_n - a_m| < \varepsilon$

Satz: Für Folge $(a_n)_n$ in $\mathbb{R}$ gilt:

$(a_n)_n$ Cauchy-Folge $\Longleftrightarrow (a_n)_n$ konvergent

[„$\Leftarrow$": leicht
„$\Rightarrow$": mit Satz v. B-W. s. Grieser 7.6.4]

$\rightsquigarrow$ alternative Formulierung von Vollständigkeit

Satz: Für $(K, +, \cdot, <)$ geord. Körper gilt:

VOLL $\Longleftrightarrow \begin{cases} \text{I) Archimedes-Axiom: } \forall x \in K \ \exists n \in \mathbb{N} : x < n \\ \text{II) Jede Cauchy-Folge in } K \text{ konvergiert.} \end{cases}$

§ 3 Reihen

3.1 Was ist eine Reihe?

Sei $(a_k)_k$ Folge in $\mathbb{R}$

$$\sum_{k=1}^{\infty \leftarrow ?} a_k = \underbrace{\underbrace{\underbrace{a_1}_{= s_1} + a_2}_{s_2} + a_3}_{s_3} + a_4 + \dots ?$$

Def: $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ n-te Partialsumme

Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k := (s_n)_n$ Folge der Partialsummen

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert $:\Longleftrightarrow$ $(s_n)_n$ konvergiert

In diesem Fall: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n \to \infty} s_n = s$ Wert der Reihe

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergiert $:\Longleftrightarrow$ $(s_n)_n$ divergiert

Die Folge $(a_k)_k$ heißt Folge der Reihenglieder

Merke: "$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$" bezeichnet zwei Dinge:

-) Folge $(s_n)_n$ $\rightsquigarrow$ konverg./diverg. ?

-) Wert $\lim s_n$, falls existiert

Beisp

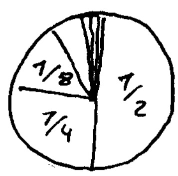
1) $(a_k = \frac{1}{2^k})_k = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots)$

$s_1 = \frac{1}{2}$, $s_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, $s_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{4+2+1}{8} = \frac{7}{8}$

$s_4 = s_3 + \frac{1}{16} = \frac{7}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$, ..., $s_n = \frac{2^n - 1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = (1 - \frac{1}{2^n})_n$ konvergiert mit Wert

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \lim_{n \to \infty} (1 - \frac{1}{2^n}) \underset{\uparrow \atop 2.10}{=} 1 - 0 = 1$$



2) $(a_k = (-1)^k)_{k \geq 0} = (1, -1, 1, -1, 1, \dots)$

$(s_n)_n = (1, \underbrace{1-1}_{0}, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$ divergiert.

3.2 Lemma (Notwendige Beding. für Konvergenz):

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konverg.} \Rightarrow (a_k)_k \text{ ist 0-Folge}$$

Bew: $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k \Rightarrow a_{n+1} = s_{n+1} - s_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverg. $\Rightarrow s := \lim_{n\to\infty} s_n$ existiert

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (s_{n+1} - s_n) = \underbrace{\lim s_{n+1}}_{s} - \underbrace{\lim s_n}_{s} = 0 \quad \checkmark$$

Beisp u. Bem.

1) $\sum_{k=1}^{\infty} 1$ divergiert, da $(a_k = 1)_k$ keine 0-Folge

2) Beding. ist im Allg. nicht hinreichend, d.h.

$$(a_k)_k \text{ 0-Folge } \not\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konverg}$$

3.3 Drei wichtige Reihen

1) Geometrische Reihe für $q \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots$$

Beh: i) Für $|q| < 1$ konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ mit Wert

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

ii) Für $|q| \geq 1$ divergiert $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$

Bew: i) $|q| < 1 \underset{2.10}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} q^n = 0$

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k \underset{1.7,2)}{=} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1-0}{1-q} = \frac{1}{1-q}$$

ii) $|q| \geq 1 \Rightarrow (q^k)_{k\geq 0}$ ist konst. Folge 1 oder diverg., also keine 0-Folge

$$\underset{3.2}{\Rightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} q^k \text{ nicht konverg.} \quad \checkmark$$

Beisp: $\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{3}{4}\right)^k$ geom. Reihe für $q = -\frac{3}{4}$

$\left|-\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4} < 1 \Rightarrow$ Reihe konvergiert mit Wert

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{3}{4}\right)^k = \frac{1}{1-(-3/4)} = \frac{1}{1+3/4} = \frac{1}{7/4} = \underline{\underline{\frac{4}{7}}}$$

2) Harmonische Reihe $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$

Beh: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=+\infty$ (bestimmt divergent)

Bew: $(s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k})_n$ ist monoton steigend

zeigen: $(s_n)_n$ hat best. divergente Teilfolge $(s_{2^m})_m$

$$s_{2^m}=1+\underbrace{\frac{1}{2}}_{1/2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{\geq 1/2}+\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}_{\geq 1/2}+\cdots$$

$$+\underbrace{\frac{1}{2^{m-1}+1}+\frac{1}{2^{m-1}+2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{m-1}+2^{m-1}}}_{\geq 2^{m-1}\cdot\frac{1}{2^m}=\frac{1}{2}}$$

$$\geq 1+m\cdot\frac{1}{2}\xrightarrow[m\to\infty]{}+\infty$$

✓

3) Beh: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots\overset{!}{=}1$

Bew: $s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$ "Teleskop-Summe"

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}1$$

✓

3.4 Satz: Seien $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty}b_k$ konvergente Reihen mit Grenzwerten A bzw. B. Dann gilt:

1) $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)=A+B$, $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha a_k=\alpha A$ für $\alpha\in\mathbb{R}$

2) $a_k\leq b_k$ für alle k $\Rightarrow A\leq B$

Bew: 1) $s_n=\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Komm. Ges}}}{=}\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}s_n\underset{2.6}{=}\lim\sum_{k=1}^{n}a_k+\lim\sum_{k=1}^{n}b_k=A+B$$

Für Mult mit α benutze Distrib. Ges. und 2.6

2) folgt aus "$\leq$ +-verträgl." und 2.7 ✓

3.5 Beisp

1) Sei $m \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{R}$ mit $|q|<1$. Dann gilt:

$$\sum_{k=m}^{\infty} q^k = \sum_{k=0}^{\infty} q^m \cdot q^k \underset{3.4}{=} q^m \sum_{k=0}^{\infty} q^k \underset{3.3,1)}{=} q^m \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{q^m}{1-q}$$

2) Beh: $0,999\ldots = 1$

Bew: $0,999\ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{10^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{10^k}$

$$= \frac{9}{10} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k \underset{3.3,1)}{=} \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1-1/10} = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{9/10} = 1 \checkmark$$

3) $$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^{k+3} + 6\left(\tfrac{1}{3}\right)^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^3\left(\tfrac{1}{2}\right)^k + 6\left(\tfrac{1}{3}\right)^k\right)$$

$$\underset{3.4}{=} \frac{1}{8} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^k + 6 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{\underbrace{1-1/2}_{2}} + 6 \cdot \frac{1}{\underbrace{1-1/3}_{3/2}} = \frac{1}{4} + 9$$

Konvergenz-Kriterien

-) Majoranten-/Minor.-Krit.
-) Quotienten-/Wurzel-Krit. ← Absolute Konvergenz
-) Leibniz-Krit.

3.6 Lemma 1: Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ Reihe mit $a_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
Dann gilt:

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert $\iff$ die Folge $(s_n)_n$ der Partialsummen ist beschränkt

Bew: „⇒": $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverg. $\underset{Def}{\iff}$ $(s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k)$ konverg.
$\underset{2.4}{\Longrightarrow}$ $(s_n)_n$ ist beschränkt

„⇐": $\forall k \in \mathbb{N}: 0 \leq a_k$
$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: s_n \leq s_n + a_{n+1} = s_{n+1}$
$\Rightarrow$ $(s_n)_n$ mon. steig. $\left.\right\}$
Vorauss.: $(s_n)_n$ beschr. $\left.\right\}$ $\underset{2.13}{\Longrightarrow}$ $(s_n)_n$ konvergent,
d.h. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverg. ✓

Lemma 2: Für $k_0 \in \mathbb{N}$ und Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konverg.} \iff \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \text{ konverg.}$$

Bew: Für alle $n \geq k_0$ gilt:

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k = \underbrace{\sum_{k=1}^{k_0-1} a_k}_{=:c} + \underbrace{\sum_{k=k_0}^{n} a_k}_{=:s'_n} = c + s'_n \quad (*)$$

Also: $(s_n)_{n\geq 1}$ konv. $\iff$ $(s_n)_{n\geq k_0}$ konv. $\overset{(*)}{\iff}$ $(s'_n)_{n \geq k_0}$ konv.

$\Updownarrow$ Def. $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\Updownarrow$ Def.

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konv. $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ konv ✓

3.7 Satz: Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ Reihen mit

$$0 \leq a_k \leq b_k \quad \text{für fast alle } k \in \mathbb{N}$$

Dann gilt:

1) Majoranten-Kriterium:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ konverg} \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konverg.}$$

2) Minoranten-Kriterium:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ diverg.} \implies \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ diverg.}$$

Bew: 1) $\exists k_0 \in \mathbb{N}\ \forall k \geq k_0: \ 0 \leq a_k \leq b_k$

Setze $s_n := \sum_{k=k_0}^{n} a_k$ und $t_n := \sum_{k=k_0}^{n} b_k$

$$\implies \forall n \geq k_0: \ 0 \leq s_n \leq t_n \qquad (*)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ konverg} \underset{\text{Lem 2}}{\implies} \sum_{k=k_0}^{\infty} b_k \text{ konverg.}$$

$$\underset{\text{Lem 1}}{\implies} (t_n)_{n\geq k_0} \text{ beschr.}$$

$$\underset{(*)}{\implies} (s_n)_{n \geq k_0} \text{ beschr.}$$

$$\underset{\text{Lem 1}}{\implies} \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \text{ konverg.}$$

$$\underset{\text{Lem 2}}{\implies} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konverg}$$

2) ist Kontraposition von 1) ✓

3.8 Beisp

1) Beh: $\forall r \geq 2: \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r}$ konvergiert

Bew: $\forall k \geq 2: k^r \geq k^2 \geq k^2 - k > 0$

$\Rightarrow \forall k \geq 2: \frac{1}{k^r} \leq \frac{1}{k^2-k} = \frac{1}{(k-1)k}$

$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ konverg (3.3,3)) $\Big\}$ $\underset{\text{Majo}}{\Longrightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r}$ konverg. ✓

Bem: Wert von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r}$ nur für $r \in \mathbb{N}$ gerade bekannt

Euler (1707–1783): $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (Baseler Problem)

2) Beh: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ divergiert

Bew: folgt mit Minor.-Krit. aus

$\forall k \geq 1: \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{k}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverg. (3.3, 2)) ✓

3) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+\sin(k)}{k^3+2}$ konverg.?

$\forall k \geq 1: \frac{k+\sin(k)}{k^3+2} \leq \frac{k+1}{k^3+2} \underset{\substack{\uparrow \\ k^3+2 \geq k^3}}{\leq} \frac{k+1}{k^3} \leq \frac{k+k}{k^3} = \frac{2k}{k^3} = 2 \cdot \frac{1}{k^2}$

$\sum_{k=1}^{\infty} 2 \cdot \frac{1}{k^2}$ konverg. (nach 1)) $\underset{\text{Majo}}{\Longrightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+\sin(k)}{k^3+2}$ konverg.

4) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-3}{k^2+2}$ diverg.?

$\forall k \geq 1: \frac{k-3}{k^2+2} \underset{\substack{\uparrow \\ k^2+2 \leq k^2+2k^2 = 3k^2}}{\geq} \frac{k-3}{3k^2} \overset{\text{für } k \geq 6}{\geq} \frac{k/2}{3k^2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{k}{k^2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{k}$

Also: $\forall k \geq 6: \frac{k-3}{k^2+2} \geq \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{k}$

3.3, 2)): $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{6} \frac{1}{k}$ diverg. $\Big\}$ $\underset{\text{Mino.}}{\Longrightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-3}{k^2+2}$ diverg.

3.9 Def: Sei $(a_k)_k$ Folge in $\mathbb{R}$

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ <u>absolut konvergent</u> $:\Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergent

<u>Bem</u>: Falls $a_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ absolut konv.} \Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konverg.}$$

<u>Satz</u>: Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent.

<u>Bew</u>: Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ abs. konv, d.h. $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konverg.

$\forall k \in \mathbb{N}: \ -|a_k| \leq a_k \leq |a_k|$

$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}: \quad 0 \leq a_k + |a_k| \leq 2|a_k| \qquad (*)$

$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konverg $\underset{3.4}{\Longrightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} 2|a_k|$ konverg

$\underset{(*),\text{ Majo}}{\Longrightarrow} \left.\begin{array}{l} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + |a_k|) \text{ konverg} \\ \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} -|a_k| \text{ konverg} \end{array}\right\}$

$\underset{3.4}{\Longrightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} (\underbrace{a_k + |a_k| - |a_k|}_{a_k})$ konverg ✓

<u>Beisp</u>

1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2+k}$ ist absolut konvergent

$\left[\ \left|\frac{(-1)^k}{k^2+k}\right| = \frac{1}{k^2+k} = \frac{1}{k(k+1)}\right.$, und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ ist konv nach 3.3, 3) $\Big]$

2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k)}{k^2}$ ist absolut konverg.

$\left[\ \left.\begin{array}{l} \forall k \in \mathbb{N}: \left|\frac{\sin(k)}{k^2}\right| = |\sin(k)| \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k^2} \\ \text{Nach 3.8, 1) ist } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \text{ konverg.} \end{array}\right\} \underset{\text{Majo}}{\Longrightarrow} \text{Beh.}\ \Big]\right.$

3) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$ ist konverg (siehe 3.14) aber <u>nicht</u> abs. konv,

da $\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^k}{k}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverg. (nach 3.3, 2))

3.10 Satz (Quotienten-Kriterium)

Sei $(a_k)_k$ Folge in $\mathbb{R}$. Dann gilt:

1) Falls $\underline{\text{Quot}_1}$: $\exists q<1, k_0\in\mathbb{N}\ \forall k\geq k_0: \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|\leq q$,
dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent

2) Falls $\underline{\text{Quot}_2}$: $\exists k_0\in\mathbb{N}\ \forall k\geq k_0: \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|\geq 1$,
dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent

3) Falls $r:=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$ existiert, so gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \begin{cases} \text{konverg. abs.,} & \text{falls } r<1 \\ \text{divergiert}, & \text{falls } r>1 \end{cases}$$

keine Aussage, falls $r=1$.

<u>Achtung!</u>: In 1) reicht <u>nicht</u>: $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|<1$ für alle $k\geq k_0$.

z.B. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$: $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{1/k+1}{1/k} = \frac{k}{k+1}<1$, aber $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ diverg.

<u>Bew</u>

1) Sei $q<1$ und $k_0\in\mathbb{N}$ mit $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|\leq q$ für alle $k\geq k_0$
d.h. $|a_{k+1}|\leq q|a_k|$

$\Rightarrow |a_{k_0+1}|\leq q|a_{k_0}|$
$|a_{k_0+2}|\leq q|a_{k_0+1}|\leq q^2|a_{k_0}|$
$|a_{k_0+3}|\leq q|a_{k_0+2}|\leq q^3|a_{k_0}|$
$\vdots$

$\Rightarrow \forall \ell\geq 0: |a_{k_0+\ell}|\leq q^\ell|a_{k_0}|$

$0\leq q<1 \underset{3.3}{\Rightarrow} \sum_{\ell=0}^{\infty} q^\ell$ konv. $\underset{3.4}{\Rightarrow} \sum_{\ell=0}^{\infty} q^\ell|a_{k_0}|$ konv.

$\underset{\text{Majo}}{\Longrightarrow} \sum_{k=k_0}^{\infty}|a_k| = \sum_{\ell=0}^{\infty}|a_{k_0+\ell}|$ konverg.

$\underset{3.6,\ \text{Lemma 2}}{\Longrightarrow} \sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ konverg, d.h. $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ konverg. abs.

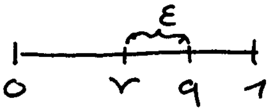
2) $\forall k\geq k_0: \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|\geq 1$, d.h. $|a_{k+1}|\geq|a_k|$

$\Rightarrow \forall k\geq k_0: |a_{k+1}|\geq|a_{k_0}|>0$ Konstante

$\Rightarrow (a_k)_k$ keine 0-Folge

$\underset{3.2}{\Longrightarrow} \sum_{k=1}^{\infty}a_k$ divergiert

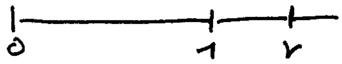
3) Sei $r := \lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$

<u>Fall $r<1$</u>:  setze $q := \frac{r+1}{2} < 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = r < q$

$\Rightarrow$ zu $\varepsilon := q-r$: $\exists k_0 \in \mathbb{N}\ \forall k \geq k_0: \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < r+\varepsilon = q$

$\underset{1)}{\Longrightarrow} \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konverg. abs.

<u>Fall $r>1$</u>: 

$\lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = r > 1$

$\Rightarrow$ zu $\varepsilon := r-1$: $\exists k_0 \in \mathbb{N}\ \forall k \geq k_0: \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > r-\varepsilon = 1$

$\underset{2)}{\Longrightarrow} \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ divergiert. ✓

3.11 <u>Beisp</u>

1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k^2}{2^k}$, $\quad a_k = (-1)^k \frac{k^2}{2^k}$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{(-1)^{k+1}\frac{(k+1)^2}{2^{k+1}}}{(-1)^k \frac{k^2}{2^k}}\right| = \left|(-1)\frac{(k+1)^2}{2^{k+1}}\cdot\frac{2^k}{k^2}\right| = \frac{1}{2}\cdot\frac{(k+1)^2}{k^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{k+1}{k}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{k}\right)^2 \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{1}{2}\cdot(1+0)^2 = \frac{1}{2}$$

$\frac{1}{2} < 1 \underset{3.10,3)}{\Longrightarrow} \sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k^2}{2^k}$ konverg. absolut

2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k!}$, $\quad a_k = \frac{k^k}{k!}$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{(k+1)^{k+1}/(k+1)!}{k^k/k!} = \frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!}\cdot\frac{k!}{k^k} = \frac{(k+1)^k(k+1)}{k!\,(k+1)}\cdot\frac{k!}{k^k}$$

$$= \frac{(k+1)^k}{k^k} = \left(\frac{k+1}{k}\right)^k = \left(1+\frac{1}{k}\right)^k \xrightarrow[k\to\infty]{} e \quad (2.14, 2))$$

$e > 1 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k!}$ divergiert

3) Wissen: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist diverg. und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konverg.

Bei beiden Reihen versagt das Quot.-Krit.

✓ Für $r=1,2$:

$$\frac{1/(k+1)^r}{1/k^r} = \frac{k^r}{(k+1)^r} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^r = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^r} \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{1}{(1+0)^r} = 1$$

<u>MERKE</u>: Aus $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = 1$ folgt nichts!

3.12 Satz (Wurzel-Kriterium)

Sei $(a_k)_k$ Folge in $\mathbb{R}$. Dann gilt:

1) $\exists q<1, k_0\in\mathbb{N}\ \forall k\geq k_0: \sqrt[k]{|a_k|}\leq q \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konv. abs.

2) $\exists k_0\in\mathbb{N}\ \forall k\geq k_0: \sqrt[k]{|a_k|}\geq 1 \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergiert

3) Falls $r:=\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}$ existiert, so gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \begin{cases} \text{konverg. absolut} & \text{, falls } r<1 \\ \text{divergiert} & \text{, falls } r>1 \end{cases}$$

Keine Aussage, falls $r=1$.

Bew: Ähnl. wie 3.10, Vergleich mit geom. Reihe ✓

3.13 Beisp

1) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4^k k^2}{5^k}$, $\quad a_k=\frac{4^k k^2}{5^k}=\left(\frac{4}{5}\right)^k k^2$

$$\sqrt[k]{|a_k|}=\sqrt[k]{\left(\frac{4}{5}\right)^k k^2}=\frac{4}{5}\sqrt[k]{k^2}=\frac{4}{5}\left(\sqrt[k]{k}\right)^2\xrightarrow[k\to\infty]{}\frac{4}{5}\cdot 1^2=\frac{4}{5}<1$$

$\underset{3.12}{\Rightarrow}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4^k k^2}{5^k}$ konvergiert absolut

2) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}$, $\quad a_k=\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}=\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k\cdot k}=\left(\left(\frac{k}{k+1}\right)^k\right)^k$

$$\sqrt[k]{|a_k|}=\left(\frac{k}{k+1}\right)^k=\left(\frac{1}{1+1/k}\right)^k=\frac{1}{(1+1/k)^k}\xrightarrow[k\to\infty]{}\frac{1}{e}<1$$

$\underset{3.12}{\Longrightarrow}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}$ konverg. abs.

3) Es gilt:

Quot-Krit anwendbar $\Longrightarrow$ Wurz-Krit anwendbar

Die Umkehrung gilt im Allg. nicht:

z.B. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit $a_k=\begin{cases} 1/2^k & \text{, falls } k \text{ gerade} \\ 1/3^k & \text{, '' } k \text{ ungerade} \end{cases}$

$\Longrightarrow \forall k\geq 1: \sqrt[k]{|a_k|}\leq\frac{1}{2}$, also ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ abs. konverg.

Aber:

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|=\begin{cases}\frac{1}{3^{k+1}}\cdot\frac{2^k}{1}=\left(\frac{2}{3}\right)^k\cdot\frac{1}{3}<1 & \text{, falls } k \text{ gerade} \\ \frac{1}{2^{k+1}}\cdot\frac{3^k}{1}=\left(\frac{3}{2}\right)^k\cdot\frac{1}{2}>1 & \text{, falls } k\geq 3 \text{ unger.}\end{cases}$$

d.h. Quot-Krit liefert nichts.

3.14 **Satz** (Leibniz-Kriterium)

Sei $(a_k)_k$ monot. fallende 0-Folge in $\mathbb{R}$.
Dann gilt:

1) Die <u>alternierende Reihe</u> $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$ konvergiert.

2) Für den Grenzwert s gilt:
$$\left|s-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k\right| \le a_{n+1} \quad \text{für alle } n\in\mathbb{N}$$

<u>Bew</u>: 1) $s_n := \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k$

$$\Rightarrow \forall n\geq 3: s_n-s_{n-2} = (-1)^n(\underbrace{a_{n-1}-a_n}_{\substack{\vee\!/\\ 0}}) \begin{cases} \ge 0 & \text{für } n \text{ gerade} \\ \le 0 & \text{" } n \text{ ungerade}\end{cases}$$

da $(a_n)_n$ mon. fallend.

$\Rightarrow (s_{2k})_k$ ist mon. steig. und (s_{2k-1}) mon. fallend.

Außerdem gilt für n gerade:
$$s_{n+1}-s_n = (-1)^{n+2}a_{n+1} = a_{n+1}\geq 0, \text{ d.h. } s_n \le s_{n+1}$$

$\Rightarrow s_2 \le s_4 \le s_6 \le \dots \quad \dots \le s_5 \le s_3 \le s_1$

$\Rightarrow (I_k = [s_{2k}, s_{2k+1}])_k$ ist Intervallschachtelung

$\underset{2.15}{\Rightarrow} \lim_{k\to\infty} s_{2k} = \lim_{k\to\infty} s_{2k+1} =: s = \lim_{n\to\infty} s_n$

2) $\forall n\in\mathbb{N}$: s liegt zwischen s_n und s_{n+1}

$$\Rightarrow |s-s_n| \le |s_{n+1}-s_n| = a_{n+1} \quad ✓$$

<u>Beisp.</u>

$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots$ <u>altern. harmon. Reihe</u>

$(\frac{1}{k})_k$ ist mon. fall. 0-Folge $\underset{\text{Leibniz}}{\Rightarrow} \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}$ konverg.

Aber: $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}$ ist nicht absolut konvergent,

da $\sum_{k=1}^{\infty}\left|(-1)^{k+1}\frac{1}{k}\right| = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ divergent (3.3, 2))

Es gilt: $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\dots = \ln 2$ (ohne Bew.)

3.15 <u>Def</u>: Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe und
$\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung

Dann heißt: $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ <u>Umordnung</u> von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

<u>Achtung</u>: Bei Umordnung einer konv. Reihe kann sich ihr Wert ändern.

<u>Beisp</u>:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = \ln 2 \quad \text{(siehe 3.14)}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \cdots$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
$\varphi(n)$	1	2	4	3	6	8	5	10	12	7	14	16	...
	u	g	g	u	g	g	u	g	g	u	g	g	

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} = \underbrace{1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}}_{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}}_{\frac{1}{6} - \frac{1}{8}} + \underbrace{\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}}_{\frac{1}{10} - \frac{1}{12}} + \underbrace{\frac{1}{7} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16}}_{\frac{1}{14} - \frac{1}{16}} + \cdots$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{1}{2} \ln 2$$

Das kann nur bei Reihen passieren, die nicht absolut konvergent sind.

<u>Satz</u> (Umordnungssatz)

1) Jede Umordnung einer absolut konvergenten Reihe ist konvergent mit gleichem Wert.

2) Ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverg, aber nicht abs. konv, so gilt:

$$\forall c \in \mathbb{R}\ \exists \varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ bijekt.}: \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} = c$$

<u>Bew</u>: siehe Grieser 8.3

✓

3.16 Produktsatz von Cauchy

Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ Reihen in $\mathbb{R}$

$$(a_0+a_1+a_2+\cdots)\cdot(b_0+b_1+b_2+\cdots) = ?$$

$$\underbrace{a_0 b_0}_{=:c_0} + \underbrace{a_0b_1+a_1b_0}_{=:c_1} + \underbrace{a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0}_{=:c_2} + \cdots$$

Allgem. $\quad c_k := \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$

$\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ Cauchy-Produkt von $\sum a_k$, $\sum b_k$

Satz: Sind $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ absol. konv. mit Wert A bzw B, so ist auch das Cauchy-Prod. absol. konv mit Wert

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = A\cdot B$$

Bew: siehe Forster §8, Satz 3 ✓

Beisp: $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ geom. Reihe, $|q|<1$

Cauchy-Prod. $\left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k$,

$$c_k = \sum_{i=0}^{k} q^i q^{k-i} = \sum_{i=0}^{k} q^k = (k+1)\, q^k$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\, q^k \underset{\text{Satz.}}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{1}{1-q}\cdot\frac{1}{1-q} = \frac{1}{(1-q)^2}$$

$$\underset{\cdot q}{\Rightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\, q^{k+1} = \frac{q}{(1-q)^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} k\, q^k = \frac{q}{(1-q)^2}$$

Dezimalbruchentwicklung

3.17 Satz: 1) Für jede reelle Zahl $x \geq 0$ gibt es $a_0 \in \mathbb{N}_0$ und $a_1, a_2, a_3, \ldots \in \{0,1,\ldots,9\}$ mit

$$x = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} =: a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots$$

Dezimalbruchentwicklung von x

2) Für alle $a_0 \in \mathbb{N}_0$, $a_1, a_2, \ldots \in \{0,1,\ldots,9\}$ konvergiert die Reihe $a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$

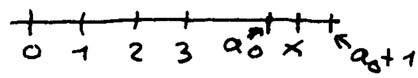
Bew: 1) Sei $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$

Konstruieren induktiv $a_0, a_1, a_2, \ldots$ mit folg. Eigensch.

$$0 \leq x - \left(a_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k}\right) < \frac{1}{10^n} \qquad (*)$$

Dann folgt die Beh. mit dem Sandwich-Prinzip.

$n=0$: $a_0 := \max\{m \in \mathbb{N}_0 \mid m \leq x\}$

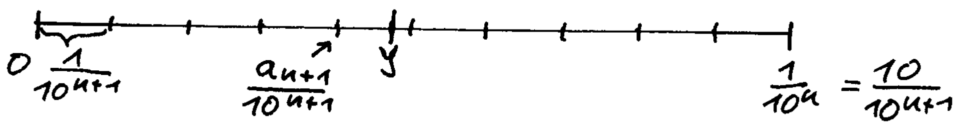


$$\Rightarrow a_0 \leq x < a_0 + 1$$

$$\underset{-a_0}{\Rightarrow} 0 \leq x - a_0 < 1 = \frac{1}{10^0}, \quad \text{d.h. } (*)$$

Sei nun $n \geq 0$ und $a_0 \in \mathbb{N}_0$, $a_1, \ldots, a_n \in \{0,1,\ldots,9\}$ mit

$$0 \leq y := x - \left(a_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k}\right) < \frac{1}{10^n} \qquad (IV)$$



$$a_{n+1} := \max \underbrace{\left\{m \in \mathbb{N}_0 \;\middle|\; \frac{m}{10^{n+1}} \leq y\right\}}_{=:M}$$

$$a_{n+1} \in M \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} \leq y \underset{IV}{<} \frac{1}{10^n} = \frac{10}{10^{n+1}} \underset{\cdot 10^{n+1}}{\Longrightarrow} a_{n+1} \leq 9$$

$$a_{n+1} = \max M \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} \leq y < \frac{a_{n+1}+1}{10^{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{1}{10^{n+1}}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \underbrace{y - \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}}}_{x - \left(a_0 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_k}{10^k}\right)} < \frac{1}{10^{n+1}}, \quad \text{d.h. } (*)$$

2) $\forall k \geq 1$: $\frac{a_k}{10^k} \leq \frac{9}{10^k} \leq \frac{10}{10^k} = \frac{1}{10^{k-1}}$

$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k$ konverg

$\Bigg\} \underset{\text{Majo.}}{\Longrightarrow} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$ konverg. ✓

3.18 <u>Satz</u>: Eine reelle Zahl $x>0$ hat genau dann mehr als eine Dezimalbruchentwickl., wenn gilt:

$$x = \frac{a}{10^r} \quad \text{für ein } a \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{N}_0,\ 10 \nmid a$$

In diesem Fall hat x genau zwei Dez.bruch.entw.

$$x = a_0, a_1 \ldots a_{r-1}\, a_r\, 0\,0\,0 \ldots$$
$$x = a_0, a_1 \ldots a_{r-1}\, (a_r - 1)\, 9\,9\,9 \ldots$$

z.B. $x = \frac{325}{100} = 3{,}25000\ldots = 3{,}24999\ldots$

<u>Bew</u>: „$\Leftarrow$": Sei $x = \frac{a}{10^r} = a_0, a_1 \ldots a_{r-1} a_r 000\ldots$

zeigen: $x = a_0, a_1 \ldots a_{r-1} (a_r - 1) 999\ldots$

dazu reicht es zu zeigen: $\sum\limits_{k=r+1}^{\infty} \frac{9}{10^k} = \frac{1}{10^r}$

$$\sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{9}{10^k} = \frac{9}{10^{r+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k = \frac{9}{10^{r+1}} \cdot \frac{1}{1 - 1/10} = \frac{9}{10^{r+1}} \cdot \frac{10}{9} = \frac{1}{10^r}$$

„$\Rightarrow$": Seien $x = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots$
$x = b_0, b_1 b_2 b_3 \ldots$ verschied. Dez.bruch.entw.

und $r \in \mathbb{N}_0$ minimal mit $a_r \neq b_r$, o.E. $a_r > b_r$

d.h. $a_i = b_i$ für $i = 0, \ldots, r-1$ und $b_r + 1 \leq a_r$ $(*)$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow x &= b_0, b_1 \ldots b_r\ b_{r+1}\ b_{r+2}\ b_{r+3} \ldots \\
① &\leq b_0, b_1 \ldots b_r\ 9\ 9\ 9 \ldots \\
\text{Bew „}\Leftarrow\text{"} &= b_0, b_1 \ldots (b_r+1)\ 0\ 0\ 0 \ldots \\
② &\underset{(*)}{\leq} a_0, a_1 \ldots a_r\ 0\ 0\ 0 \ldots \\
③ &\leq a_0, a_1 \ldots a_r\ a_{r+1}\ a_{r+2}\ a_{r+3} \ldots \\
&= x
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ alle drei "$\leq$" sind "$=$"

„② =" $\Rightarrow$ $b_r + 1 = a_r$, d.h. $b_r = a_r - 1$

„③ =" $\Rightarrow$ $\forall k > r$: $a_k = 0$

„① =" $\Rightarrow$ $\forall k > r$: $b_k = 9$ ✓

<u>Bem</u>: Die Zahlen $\frac{a}{10^r}$ ($a \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{N}_0$) sind genau die gekürzten Brüche $\frac{p}{q}$, für die q höchstens die Primteiler 2 oder 5 hat.

z.B. $\frac{3}{8} = \frac{3}{2^3} = \frac{3 \cdot 5^3}{10^3} = 0.375$

§ 4 Exponentialfunktion

Zur Motivation der Def.

Sei $a > 0$

$f(x) = a^x$? Kennen Bedeutung für $x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$.

$$a^m = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{m\text{-mal}}, \quad a^{-m} = \underbrace{a^{-1} \cdot \dots \cdot a^{-1}}_{m\text{-mal}}, \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Aber was ist a^x für $x \notin \mathbb{Q}$, z. B. $a^{\sqrt{2}}$?

Wissen: $a^0 = 1$, $\forall x \in \mathbb{Q}: a^{2x} = (a^x)^2 = a^x \cdot a^x$

Gesucht: Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(0) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}: f(2x) = f(x) \cdot f(x) \qquad (*)$$

Ansatz: $f(x) = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$ (Potenzreihe)

dabei sind $a_1, a_2, a_3, \dots \in \mathbb{R}$ zu finden

$$\underset{(*)}{\Longrightarrow} \begin{cases} f(2x) = 1 + 2a_1 x + 4a_2 x^2 + 8a_3 x^3 + \dots \\ f(x) f(x) = 1 + 2a_1 x + (2a_2 + a_1^2) x^2 + (2a_3 + 2a_1 a_2) x^3 + \dots \end{cases}$$

Koeff. vergleich liefert

$$\begin{array}{lll}
2a_1 = 2a_1 & \Rightarrow a_1 \text{ frei} & \\
4a_2 = 2a_2 + a_1^2 & \Rightarrow 2a_2 = a_1^2 & \Rightarrow a_2 = \frac{a_1^2}{2} \\
8a_3 = 2a_3 + 2a_1 a_2 & \Rightarrow 6a_3 = a_1^3 & \Rightarrow a_3 = \frac{a_1^3}{6} \\
16a_4 = 2a_4 + 2a_1 a_3 + a_2^2 & \Rightarrow 14 a_4 = \frac{a_1^4}{3} + \frac{a_1^4}{4} & \Rightarrow a_4 = \frac{a_1^4}{24} \\
32 a_5 = 2a_5 + 2a_1 a_4 + 2a_2 a_3 & \Rightarrow \dots & \Rightarrow a_5 = \frac{a_1^5}{120}
\end{array}$$

allgem. $a_k = \frac{a_1^k}{k!}$

$$\Rightarrow f(x) = 1 + \frac{a_1 x}{1!} + \frac{(a_1 x)^2}{2!} + \frac{(a_1 x)^3}{3!} + \dots$$

für $a_1 = 1$: $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

4.1 <u>Def</u>: $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ <u>Exponentialfunktion</u>

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots$$

<u>Lemma</u>: $\forall x \in \mathbb{R}: \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ konvergiert absolut

<u>Bew</u>: Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ fest und $a_k := \frac{x^k}{k!}$ für alle $k \geq 0$.

<u>zeigen</u>: Quot.-Krit. 3.10, 1) mit $q = \frac{1}{2}$

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \left| \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{x^k} \right| = \frac{|x|}{k+1} \leq \frac{1}{2} \quad \text{für } k \geq 2|x| - 1 \ \checkmark$$

4.2 <u>Satz</u>: 1) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$$

2) $\exp(1) = e \quad \Big(\underset{\substack{\uparrow \\ 2.14, 2)}}{=} \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n \Big)$

<u>Bew</u>:

1) $$\exp(x+y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (x+y)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \overbrace{\binom{k}{i}}^{\frac{k!}{i!(k-i)!}} x^i y^{k-i}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!} \cdot \frac{y^{k-i}}{(k-i)!}$$

$$= \text{Cauchy-Prod. von } \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \text{ und } \sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^j}{j!}$$

$$\underset{3.16}{=} \exp(x) \cdot \exp(y)$$

2) $$\exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1^k}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

$e = \lim_{n \to \infty} e_n$, wobei $e_n = (1 + \frac{1}{n})^n$

<u>zu zeigen</u>: $\exp(1) = e$

„$\geq$": $$e_n = (1 + \tfrac{1}{n})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \underbrace{\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}}_{\leq 1} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leq \exp(1)$$

$$\underset{2.7}{\Longrightarrow} \quad e = \lim_{n \to \infty} e_n \leq \exp(1)$$

„$\le$": <u>zeigen</u>: $\forall\, m \ge 1: \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \le e \quad \left(\underset{2.7}{\Longrightarrow} \exp(1) \le e\right)$

Sei <u>$m \ge 1$ fest</u>: Betrachte Folge $(a_n)_{n \ge m}$

$$a_n := \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \cdot \underbrace{\frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{n}}_{\text{höchstens } m \text{ Faktoren mit } \lim\limits_{n\to\infty} = 1} \le e_n$$

$$a_n \xrightarrow{n\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \underset{2.7}{\le} e \xleftarrow{n\to\infty} e_n$$

<u>Folg</u>: $\forall\, n \in \mathbb{N}_0: \quad \exp(n) = e^n$

<u>Bew</u>: $\exp(0) = 1 + 0 + 0 + \cdots = 1 = e^0$

$\exp(n) = \exp(\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n\text{-mal}}) \underset{\uparrow\ \text{Satz}}{=} \exp(1)^n = e^n$

4.3 <u>Satz</u>: 1) $\exp(x) \cdot \exp(-x) = 1$
2) $\exp(x) > 0$
} für alle $x \in \mathbb{R}$

3) $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist streng mon. steigend, d.h.

$$x < y \implies \exp(x) < \exp(y)$$

4) $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ ist bijektiv.

<u>Bew</u>:

1) $\exp(x) \cdot \exp(-x) \underset{4.2,1)}{=} \exp(\underbrace{x + (-x)}_{0}) = 1$

2) $x > 0 \implies \exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots > 1 \qquad (*)$

$x < 0 \implies -x > 0 \implies \exp(x) \underset{1)}{=} \frac{1}{\exp(-x)} > 0$

3) $x < y \implies y - x > 0 \underset{(*)}{\Longrightarrow} 1 < \exp(y-x)$

$\underset{\cdot \exp(x)}{\Longrightarrow} \exp(x) < \exp(y-x) \cdot \exp(x) = \exp(\underbrace{y-x+x}_{y})$

4) <u>injekt.</u>: klar wegen 3)

<u>surjekt.</u>: Sei $y \in \mathbb{R}_{>0}$

$e > 1 \implies \lim e^n = +\infty \implies \exists\, n \in \mathbb{N}: y < \exp(n)$

$\frac{1}{e} < 1 \implies \lim \frac{1}{e^n} = 0 \implies \exists\, m \in \mathbb{N}: \exp(-m) < y$

In §5 zeigen wir: exp ist stetig, und es gilt der Zwischenwertsatz:

$$\exp(-m) < y < \exp(n) \underset{\text{ZWS}}{\Longrightarrow} \exists\, x \in \mathbb{R}: y = \exp(x)$$

4.4 $$e \underset{4.2,2)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}}_{=: s_n} + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}}_{=: r_n}$$

n-te Partialsumme n-ter Rest

<u>Satz</u>: 1) $\forall n \geq 1: \ 0 < r_n < \frac{1}{n!}$, d.h. $s_n < e < s_n + \frac{1}{n!}$

2) e ist irrational.

<u>Bew</u>

1) $$0 < r_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!(n+2)} + \frac{1}{(n+1)!(n+2)(n+3)} + \dots$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \underbrace{\frac{1}{n+2}}_{<\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{(n+2)(n+3)}}_{<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)}}_{<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} + \dots\right)$$

$$< \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot 2$$

$$= \frac{1}{n!} \cdot \frac{2}{n+1} \leq \frac{1}{n!}$$

2) <u>Ann</u>: $e = \frac{m}{n}$, wobei $m, n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow n!\, e = n! \frac{m}{n} = (n-1)!\, m \in \mathbb{Z}$$

aber $$n!\, e = n!(s_n + r_n) = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + n!\, r_n$$

$$= \underbrace{\left(\frac{n!}{0!} + \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \dots + \frac{n!}{n!}\right)}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{n!\, r_n}_{\overset{1)}{\in}]0,1[} \notin \mathbb{Z}$$ Wid.

<u>Approximation von e</u>

n	$e_n = (1+\frac{1}{n})^n$	$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$
2	2,25	2,5
4	2,44	2,71
6	2,52	2,718
8	2,57	2,71828
10	2,59	2,7182818
100	2,7048	ca 160 Stellen

<u>Übung</u>: $\forall n \in \mathbb{N}_0: \ s_n = \frac{a_n}{n!}$, wobei

$a_0 := 1$ und $a_{n+1} := a_n \cdot (n+1) + 1$ für $n \geq 0$

(Fakultät) $0! := 1$ und $(n+1)! := n! \cdot (n+1)$ für $n \geq 0$

Wissen (4.3): $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ ist bijektiv

$\Longrightarrow$ exp hat eine Umkehrfunktion (Alg Zth. 1, S. 42/43 (E 14))

4.5 <u>Satz + Def</u>: Die Umkehrfunktion von exp

$$\ln : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{heißt } \underline{\text{Logarithmusfunktion}}$$
$$x \longmapsto \ln x$$

und hat folgende Eigenschaften:

1) $\forall x \in \mathbb{R} : \ln(\exp(x)) = x$

$\forall y \in \mathbb{R}_{>0} : \exp(\ln y) = y$

2) ln ist streng monoton steigend.

3) $\left.\begin{aligned} \ln(x \cdot y) &= \ln x + \ln y \\ \ln(x/y) &= \ln x - \ln y \end{aligned}\right\}$ für alle $x, y > 0$

<u>Bew</u>

1) Nach Def. "Umkehrfkt." gilt für alle $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}_{>0}$:

$$\exp(x) = y \iff x = \ln y \qquad (*)$$

Also: $\begin{cases} \exp(x) = y \Rightarrow \ln(\exp(x)) = \ln y \underset{(*)}{=} x \\ \ln y = x \Rightarrow \exp(\ln y) = \exp(x) \underset{(*)}{=} y \end{cases}$

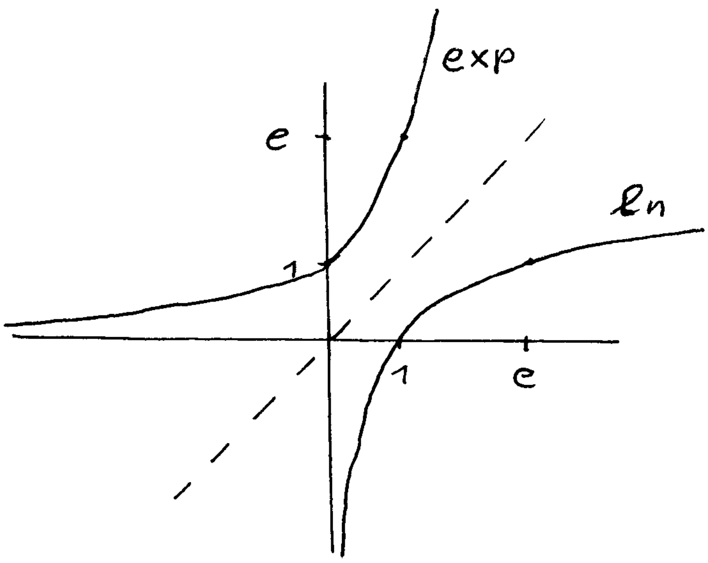
2) sei $0 < x < y$

<u>Ann</u>: $\ln x \geq \ln y$. $\underset{4.3}{\Longrightarrow} \underbrace{\exp(\ln x)}_{x} \geq \underbrace{\exp(\ln y)}_{y}$ Wid.

3) $x \cdot y = \exp(\ln x) \cdot \exp(\ln y) \underset{4.2}{=} \exp(\ln x + \ln y)$

$\underset{\ln}{\Longrightarrow} \ln(x \cdot y) = \ln(\exp(\ln x + \ln y)) \underset{1)}{=} \ln x + \ln y$

$\ln(x/y) + \ln y = \ln(\frac{x}{y} \cdot y) = \ln x \underset{-\ln y}{\Longrightarrow}$ Beh. ✓



4.6 Def: sei $a>0$ und $x \in \mathbb{R}$.

$$a^x := \exp(x \cdot \ln a)$$

insbes $e^x = \exp(x \cdot \underbrace{\ln e}_{1}) = \exp(x)$

Satz: Für $a, b > 0$, $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

1) $a^{x+y} = a^x a^y$ 2) $(a^x)^y = a^{xy}$

3) $(a \cdot b)^x = a^x b^x$

4) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ 5) $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

Bew:

1) $a^{x+y} = \exp(\underbrace{(x+y)\ln a}_{x \ln a + y \ln a}) \underset{4.2}{=} \underbrace{\exp(x \ln a)}_{a^x} \cdot \underbrace{\exp(y \ln a)}_{a^y}$

2) $(a^x)^y = \exp(y \ln(a^x)) = \exp(y \underline{\ln(\exp(x \ln a))})$
$= \exp(y x \ln a) = a^{yx} = a^{xy}$

3) ähnl. 1) Aufg 6.3

4) $a^{-x} = \exp(-x \ln a) \underset{4.3}{=} \frac{1}{\exp(x \ln a)} = \frac{1}{a^x}$

5) $\underbrace{a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{n}} \dots a^{\frac{1}{n}}}_{n\text{-mal}} = (a^{\frac{1}{n}})^n \underset{2)}{=} a \Rightarrow a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ ✓

4.7 Satz: Für $a>0, a \neq 1$, gilt:

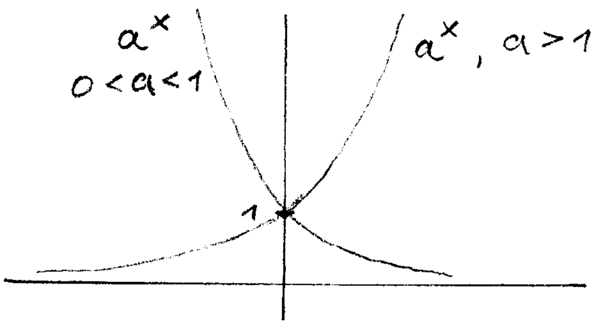
1) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$, $x \mapsto a^x$ ist bijekt. und strengmon $\begin{cases} \text{steig.}, & \text{falls } a>1 \\ \text{fall.}, & \text{"} \quad a<1 \end{cases}$

2) Die Umkehrfunkt. ist $\log_a : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $y \mapsto \frac{\ln y}{\ln a}$

Bew: 1) $\mathbb{R} \xrightarrow{\cdot \ln a} \mathbb{R} \xrightarrow{\exp} \mathbb{R}_{>0}$
$x \underset{\text{bij.}}{\longmapsto} x \cdot \ln a \underset{\text{bij.}}{\longmapsto} \exp(x \cdot \ln a) = a^x$

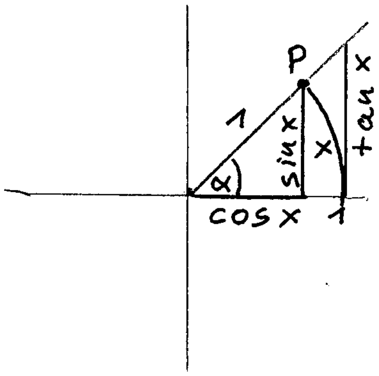
und $\ln a > 0$, falls $a>1$, und $\ln a < 0$, falls $a<1$.

2) Umkehrabb: $\mathbb{R} \xleftarrow{/\ln a} \mathbb{R} \xleftarrow{\ln} \mathbb{R}_{>0}$: $\log_a$
$\frac{\ln y}{\ln a} \longleftarrow \ln y \longleftarrow y$ ✓



4.8 sin und cos

Def:
$$\cos x := 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$
$$\sin x := x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$



$$\frac{x}{2\pi} = \frac{\alpha}{360}$$

α	$45°$	$90°$	$180°$	$360°$
x	$\pi/4$	$\pi/2$	π	2π

$$P = (\cos x, \sin x)$$

$$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{für } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Eigenschaften

1) $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

2) $\cos(-x) = \cos x$, $\sin(-x) = -\sin x$

3) $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$

4) $\left.\begin{array}{l} \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \end{array}\right\}$ Additionstheoreme

5) $\sin(x+y) - \sin(x-y) = 2 \cos x \sin y$

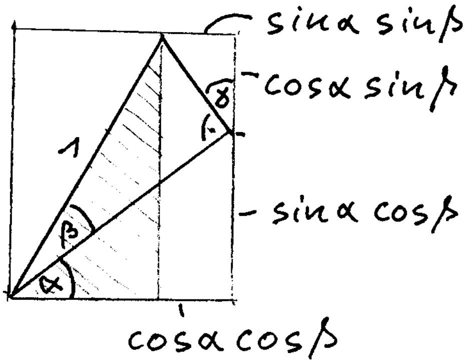
6) $|\sin x| \leq |x| \leq |\tan x|$ für $|x| < \frac{\pi}{2}$

Bew: 1), 2) gelten nach Konstruktion

3) Satz von Pythagoras

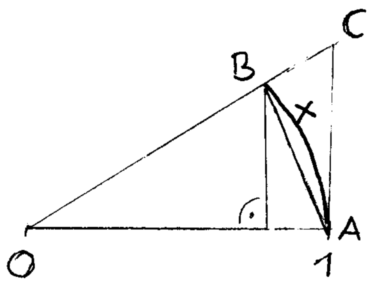
5) folgt aus 4) und 2)

4)



$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$$

6)



Fläche $\triangle OAB = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x$

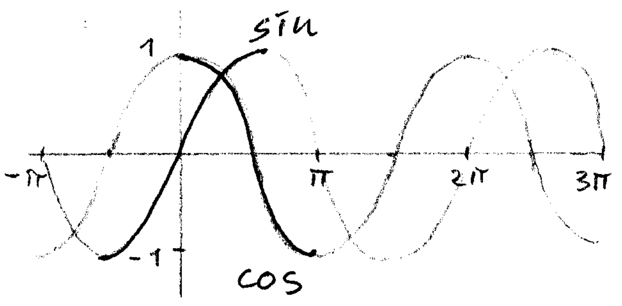
$\wedge$

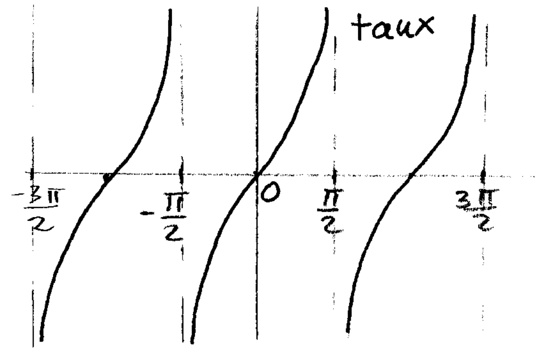
Fläche $\triangle OAB = \frac{x}{2\pi} \cdot \pi 1^2 = \frac{1}{2} x$

$\wedge$

Fläche $\triangle OAC = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x$

4.9 $\sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\tan : \mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi) \longrightarrow \mathbb{R}$





Folgende Einschränkungen sind streng monoton und surjektiv

$\sin|: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1, 1]$ steigend

$\cos|: [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$ fallend

$\tan|:]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$ steigend

Die Umkehrabb. heißen arcsin, arccos und arctan.

$\underline{\sin}$: Seien $-\frac{\pi}{2} \leq x < y \leq \frac{\pi}{2}$

$$\overset{\hphantom{a}}{x} \quad a \quad \underbrace{\quad}_{b} \quad y$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = a+b \\ x = a-b \end{cases}, \text{ wobei } \begin{array}{l} a := \frac{1}{2}(x+y) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ b := \frac{1}{2}(y-x) \in]0, \frac{\pi}{2}] \end{array}$$

$$\Rightarrow \sin y - \sin x = \sin(a+b) - \sin(a-b)$$

$$\underset{4.8,5)}{=} 2 \underbrace{\cos a}_{>0} \underbrace{\sin b}_{>0} > 0$$

Also: $\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ streng monot. steig.

sin surjekt.: später

$\underline{\cos}$: $[0, \pi] \xrightarrow[\text{bijekt.}]{\text{s.m.f}} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \xrightarrow{\sin} [-1, 1]$

$$x \longmapsto \frac{\pi}{2} - x$$

$\underline{\tan}$: Seien $-\frac{\pi}{2} < x < y < \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow$ $y - x \in]0, \pi[$ und $\cos x, \cos y > 0$

$\Rightarrow$ $0 < \sin(y-x) = \sin y \cos x - \cos y \sin x$

$\Rightarrow$ $\cos y \sin x < \sin y \cos x$

$\Rightarrow$ $\frac{\sin x}{\cos x} < \frac{\sin y}{\cos y}$

Also: $\tan|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}$ streng mon. steig.

tan surj.: später

§5 Grenzwerte von Funktionen, Stetigkeit

Gegeben: $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-2}$

$p \in \mathbb{R}$

Frage: Was macht $f(x)$, wenn "x gegen p geht"?

Idee: Nimm Folge $(x_n)_n$ mit $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} p$ und untersuche Bildfolge $(f(x_n))_n$

Beisp $p = 0$: Für $(x_n = \frac{1}{n})_n$ gilt:

$$f(\tfrac{1}{n}) = \frac{3 \cdot 1/n + 1}{1/n - 2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{3\cdot 0 + 1}{0-2} = -\frac{1}{2}$$

und für $(x_n)_n$ beliebige 0-Folge in $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ gilt:

$$f(x_n) = \frac{3x_n + 1}{x_n - 2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{3\cdot 0+1}{0-2} = -\frac{1}{2} \qquad \text{"}\lim_{x\to 0} f(x) = -\tfrac{1}{2}\text{"}$$

Beisp $p = 2$: Für $(x_n = 2 + \frac{1}{n})_n$ und $(y_n = 2 - \frac{1}{n})_n$ gilt:

$$f(2+\tfrac{1}{n}) = \frac{3(2+\frac{1}{n})+1}{2+\frac{1}{n}-2} = \frac{7 + 3\cdot 1/n}{1/n} = 7n+3 \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty \notin \mathbb{R}$$

$$\neq$$

$$f(2-\tfrac{1}{n}) = \; \ldots\ldots\ldots \; = -7n+3 \longrightarrow -\infty \notin \mathbb{R}$$

"$\lim_{x\to 2} f(x)$ existiert nicht"

5.1 Def: Sei $D \subset \mathbb{R}$

$$\overline{D} := \{p \in \mathbb{R} \mid \text{es gibt Folge } (x_n)_n \text{ in } D \text{ mit } \underbrace{x_n \to p}_{\lim_{n\to\infty} x_n = p}\}$$

heißt Abschluss von D in $\mathbb{R}$.

Bem: $D \subset \overline{D}$

$\ulcorner p \in D \Rightarrow$ konst. Folge $(p, p, p, \ldots)$ konverg. gegen p //

Beisp

1) $D =]2,5[= \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5\} \Rightarrow \overline{D} = [2,5]$

$\ulcorner (2+\frac{1}{n})_n$ Folge in D mit $2 + \frac{1}{n} \to 2$

$(5 - \frac{1}{n})_n$ " " D " $5 - 1/n \to 5$ //

2) $p \in \mathbb{R}$, $D = \mathbb{R}\setminus\{p\} \Rightarrow \overline{D} = \mathbb{R}$

$\ulcorner (p + \frac{1}{n})_n$ Folge in $\mathbb{R}\setminus\{p\}$ mit $p + \frac{1}{n} \to p$ //

Im Folg stets: $D \subset \mathbb{R}$

5.2 Def: Sei $f: D \to \mathbb{R}$ Funktion, $p \in \overline{D}$, $q \in \mathbb{R}$

f hat bei p den Grenzwert q $:\Longleftrightarrow$

Für jede Folge $(x_n)_n$ in D mit $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} p$ gilt:

$$f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} q$$

Notation: $\lim\limits_{x \to p} f(x) = q$ oder $f(x) \xrightarrow[x\to p]{} q$

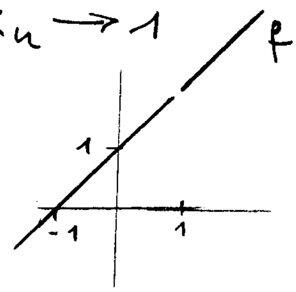
Beisp

1) $f: \mathbb{R}\setminus\{2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-2}$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\frac{1}{2} \\ \text{und } \lim\limits_{x\to 2} f(x) \text{ existiert nicht} \end{array}\right\} \text{ siehe Vorspann}$$

2) $f: \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$, $p = 1$

Beh: $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$



$\ulcorner$ Sei $(x_n)_n$ belieb. Folge in $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ mit $x_n \to 1$

$\Rightarrow \dfrac{x_n^2-1}{x_n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \text{"}\dfrac{0}{0}\text{"}$ undefiniert!

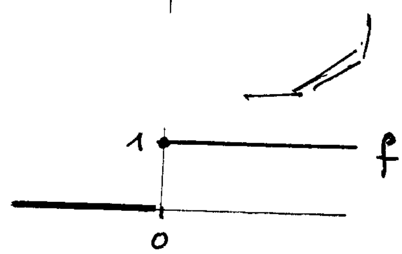
Abhilfe: $f(x) = \dfrac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x+1$

$\Rightarrow f(x_n) = x_n + 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1+1 = 2$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$ //

3) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$p = 0$ $\qquad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{" } x \geq 0 \end{cases}$



Beh: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existiert nicht.

$\ulcorner$ 1. Beweis

Die Folgen $(x_n = \frac{1}{n})_n$ und $(y_n = -\frac{1}{n})_n$ sind 0-Folgen

aber: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$

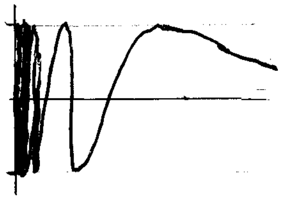
und $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(-\frac{1}{n}) = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$ $\lightning$

2. Beweis

$(z_n = (-1)^n \frac{1}{n})_n = (-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots)$ ist 0-Folge

aber $(f(z_n))_n = (0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$ konvergiert nicht //

4) $f: \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$



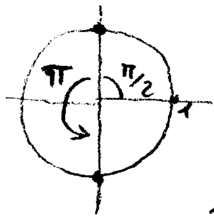
<u>Beh</u>: $\lim\limits_{x \to 0} \sin(\frac{1}{x})$ existiert nicht

Betrachte $\left(x_n = \frac{1}{\pi/2 + n \cdot \pi}\right)_n$

$$\Rightarrow x_n = \frac{1}{n(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{n} + \pi)} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\pi + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{n}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \cdot \frac{1}{\pi + 0} = 0$$

d.h. $(x_n)_n$ ist 0-Folge

Aber: $f(x_n) = \sin(\frac{1}{x_n}) = \sin(\frac{\pi}{2} + n\pi)$
$= (-1)^n$ konvergiert nicht.



5.3 <u>Def</u>: Sei $f: D \to \mathbb{R}$ Funktion, $p, q \in \mathbb{R}$

$D_{>p} := \{x \in D \mid x > p\}$, $D_{<p} := \{x \in D \mid x < p\}$

<u>Rechtsseitiger Grenzwert</u>: $\lim\limits_{x \searrow p} f(x) = q \;:\Longleftrightarrow$
$p \in \overline{D_{>p}}$, und $\forall (x_n)_n$ Folge in $D_{>p}$: $(x_n \to p \Rightarrow f(x_n) \to q)$

<u>Linksseit. Grenzw.</u>: $\lim\limits_{x \nearrow p} f(x) = q$ analog mit $D_{<p}$ statt $D_{>p}$

<u>Bem</u>: Für $D \subset \mathbb{R}$ Intervall und $p \in D$ innerer Punkt gilt:

$$\lim_{x \to p} f(x) = q \Rightarrow \lim_{x \searrow p} f(x) = q = \lim_{x \nearrow p} f(x)$$

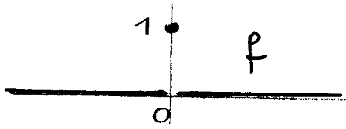
<u>Beisp</u>

1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{"} \; x \geq 0 \end{cases}$ (siehe 5.2, Beisp. 3))

$\Rightarrow \lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = 1$ und $\lim\limits_{x \nearrow 0} f(x) = 0$

$(x_n)_n$ belieb. 0-Folge in $\mathbb{R}_{>0} \Rightarrow \lim f(x_n) = \lim 1 = 1$
$(x_n)_n$ " " " $\mathbb{R}_{<0} \Rightarrow \lim f(x_n) = \lim 0 = 0$

2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq 0 \\ 1 & \text{"} \; x = 0 \end{cases}$



$\Rightarrow \lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \nearrow 0} f(x)$

aber $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ existiert nicht.

$(x_n = 1/n)_n$ und $(y_n = 0)_n$ sind 0-Folgen in $\mathbb{R}$ mit

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} f(\tfrac{1}{n}) = \lim_{n \to \infty} 0 = 0$$
$$\lim_{n \to \infty} f(y_n) = \lim_{n \to \infty} f(0) = \lim_{n \to \infty} 1 = 1$$
$\not\Downarrow$

5.4 <u>Grenzwertsätze</u>: Seien $f, g: D \to \mathbb{R}$, $p \in \overline{D}$,
$\lim\limits_{x\to p} f(x) = q$ und $\lim\limits_{x\to p} g(x) = r$. Dann gilt:

1) $\lim\limits_{x\to p} (f(x)+g(x)) = q+r$
2) $\lim\limits_{x\to p} (f(x)\cdot g(x)) = q\cdot r$
3) $\lim\limits_{x\to p} f(x)/g(x) = q/r$, falls $r \neq 0$
4) $\lim\limits_{x\to p} (\alpha f(x)) = \alpha q$, wobei $\alpha \in \mathbb{R}$
5) $f(x) \leq g(x)$ in Umgebung von p $\Rightarrow q \leq r$
d.h. $\forall x \in U_\delta(p)$ für ein $\delta > 0$
6) <u>Sandwich-Prinzip</u>: sei $h: D \to \mathbb{R}$ mit
$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ in Umgeb. von p
Dann gilt: $q = r \Rightarrow \lim\limits_{x\to p} h(x) = q$
7) $\lim\limits_{h\to 0} f(p+h) = q$ (Transformationsregel)

<u>Bew</u>: 1) – 6) folgen aus 2.6 und 2.7
z.B. 1) sei $(x_n)_n$ belieb. Folge in D mit $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} p$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to p} f(x) = q \\ x_n \longrightarrow p \\ \lim\limits_{x\to p} g(x) = r\end{array}\right\} \begin{array}{l}\Rightarrow f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} q \\ \\ \Rightarrow g(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} r\end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l}a\\b\\c\end{array}}\right\} \underset{2.6}{\Rightarrow} f(x_n)+g(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} q+r$$

7) sei $(h_n)_n$ Folge mit $p+h_n \in D$ und $h_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow p+h_n \xrightarrow[n\to\infty]{} p \\ \lim\limits_{x\to p} f(x) = q\end{array}\right\} \Rightarrow f(p+h_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} q \quad \checkmark$$

<u>Bem</u>: Analoge Aussagen gelten für $\lim\limits_{x\searrow p}$ und $\lim\limits_{x\nearrow p}$.

<u>Beisp</u>

1) $$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-2}{x-1} \underset{\lim\limits_{x\to 2} x = 2}{\overset{}{=}} \frac{2^2+2-2}{2-1} = \frac{4}{1} = \underline{\underline{4}}$$

2) $$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x-1} \underset{7)}{=} \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2+(1+h)-2}{(1+h)-1}$$
(GWS 1)-3) geht nicht "$\frac{0}{0}$")
$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^2+2h+\cancel{1}+\cancel{1}+h-\cancel{2}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} (h+3) = 0+3 = \underline{\underline{3}}$$