Wiederholung: Analysis 1

18.6.24

§ 2 Folgen

① **Def** (2.1) Eine Folge in $\mathbb{R}$ ist eine Abb. $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$

n	1	2	3	4	5	...
a_n	$1/2$	$2/3$	$3/4$	$4/5$	$5/6$	...

Notation: $(a_n)_n$ oder $(a_1, a_2, a_3, \dots)$

Beisp: $a_n = 1/n \qquad (1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots)$

$a_n = (-1)^n \qquad (-1, 1, -1, 1, \dots)$

Def (2.4, 2.13) Sei $(a_n)_n$ Folge in $\mathbb{R}$

$(a_n)_n$ beschränkt $:\Longleftrightarrow \exists K > 0\ \forall n \in \mathbb{N}: |a_n| \leq K$

$\Longleftrightarrow \exists r, s \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}: r \leq a_n \leq s$

$(a_n)_n$ monoton steigend (bzw. mon. fallend) $:\Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq a_{n+1}$ (bzw $a_{n+1} \leq a_n$)

$(a_n)_n$ monoton $\Longleftrightarrow$ $(a_n)_n$ mon. steig. oder mon. fall.

Beisp

1) $a_n = \frac{3n+1}{n+2}$, $n \in \mathbb{N}$

Ist $(a_n)_n$ beschränkt?

$\forall n \in \mathbb{N}: 3n+1 \geq 0$ und $n+2 > 0 \implies a_n = \frac{3n+1}{n+2} \geq 0$

$\forall n \in \mathbb{N}: a_n = \frac{3n+1}{n+2} \underset{n \leq n+2}{\leq} \frac{3n+1}{n} = \frac{3n}{n} + \frac{1}{n} = 3 + \frac{1}{n} \leq 3 + 1 = 4$

Also: $\forall n \in \mathbb{N}: 0 \leq a_n \leq 4$, d.h. $(a_n)_n$ ist beschränkt

Ist $(a_n)_n$ monoton?

$a_1 = \frac{4}{3}$; $a_2 = \frac{7}{4}$; $a_3 = \frac{10}{5} = 2$

Vermutung: $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq a_{n+1}$

$$a_n \leq a_{n+1} \Longleftrightarrow \frac{3n+1}{n+2} \leq \frac{3(n+1)+1}{(n+1)+2} = \frac{3n+4}{n+3}$$

$$\Longleftrightarrow \underbrace{(3n+1)(n+3)}_{3n^2+10n+3} \leq \underbrace{(3n+4)(n+2)}_{3n^2+10n+8}$$

$$\Longleftrightarrow 3 \leq 8 \quad \text{Das ist richtig!}$$

Also: $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq a_{n+1}$, d.h. $(a_n)_n$ ist **mon.** steigend

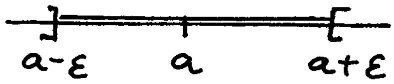
2) Beh: $(b_n = (-1)^n + \sin(n))_n$ ist beschränkt

$\forall n \in \mathbb{N}: |b_n| = |(-1)^n + \sin(n)|$

$$\underset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \underbrace{|(-1)^n|}_{=1} + \underbrace{|\sin(n)|}_{\leq 1} \leq 1 + 1 = 2$$

② **Def** (2.2) Eine Folge $(a_n)_n$ **konvergiert gegen** $a \in \mathbb{R}$:$\Longleftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$$



$\mathcal{U}_\varepsilon(a)$

d.h. $\forall \varepsilon > 0$: $\mathcal{U}_\varepsilon(a)$ enthält fast alle Folgenglieder

Notation: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ oder $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$

Beisp.

1) $(a_n = a)_n = (a, a, a, \ldots)$ konstante Folge
 $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a = a$

2) $(a_n = \frac{1}{n})_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, d.h. $(\frac{1}{n})_n$ ist **Nullfolge**

3) $-1 < q < 1$, $(a_n = q^n)_{n \geq 0} = (1, q, q^2, \ldots)$
 $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, d.h. $(q^n)_n$ ist Nullfolge

Zusammenhang: Konvergenz, Beschränkth., Monotonie

2.4 **Satz**: Jede konvergente Folge ist beschränkt

2.13 **Satz**: Jede monotone und beschränkte Folge ist konvergent.

Im Bild

$$\boxed{\begin{array}{l}(a_n)_n \text{ monot.}\\ \text{und beschr.}\end{array}} \xRightarrow[2.13]{} \boxed{(a_n)_n \text{ konverg.}} \xRightarrow[2.4]{} \boxed{(a_n)_n \text{ beschr.}}$$

Bemerk: Die Umkehrungen sind i. Allg. nicht richtig
z.B. $(a_n = \frac{(-1)^n}{n})_n$ ist konverg, aber nicht monoton
und $(a_n = (-1)^n)_n$ ist beschr., aber nicht konverg.

2.5 **Lemma**: $(a_n)_n$ Nullfolge, $(b_n)_n$ beschr. $\Rightarrow (a_n b_n)_n$ Nullfolge

③ Grenzwertsätze

2.6 <u>Satz</u>: Seien $(a_n)_n, (b_n)_n$ Folgen mit $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$, $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$

Dann: $a_n \pm b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \pm b$, $\alpha a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha a$ für $\alpha \in \mathbb{R}$

$a_n \cdot b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \cdot b$, $\dfrac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{a}{b}$ falls $b \neq 0 \neq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$

<u>Beisp</u>

1) Für $c \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{N}$: $\dfrac{c}{n^r} = c \cdot \underbrace{\dfrac{1}{n} \cdots \dfrac{1}{n}}_{r\text{-mal}} \xrightarrow[n\to\infty]{} c \cdot 0 \cdots 0 = 0$

2) $\dfrac{3n^2 - n}{n^2+2} = \dfrac{n^2(3 - 1/n)}{n^2(1 + 2/n^2)} = \dfrac{3 - 1/n}{1 + 2/n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{3-0}{1+0} = \dfrac{3}{1} = 3$

2.7 <u>Satz</u>: Seien $(a_n)_n, (b_n)_n, (c_n)_n$ Folgen mit $a_n \leq b_n \leq c_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$

Dann gilt:

1) $a \leq c$

2) $a = c \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$ "Sandwich-Prinzip"

2.8 <u>Wichtige Beisp.</u>

1) Für $a > 0$: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

<u>Def</u> (2.9) <u>Bestimmte Divergenz</u>

$\lim a_n = +\infty$ $(-\infty)$ $:\Longleftrightarrow \forall K > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 : a_n > K$ $(a_n < -K)$

<u>Beisp</u>

1) Für $r \in \mathbb{N}$: $\lim\limits_{n\to\infty} n^r = +\infty$

2) Für $q \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{für } |q| < 1 \\ 1 & \text{''} \quad q = 1 \\ +\infty & \text{''} \quad q > 1 \\ \text{existiert nicht} & \text{für } q \leq -1 \end{cases}$$

§ 3 Reihen

④ **Def (3.1)** Sei $(a_k)_k$ Folge in $\mathbb{R}$

$s_n := a_1 + \dots + a_n$ <u>n-te Partialsumme</u>

<u>Reihe</u> $\sum_{k=1}^{\infty} a_k := (s_n)_n$ Folge der Partialsummen

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ <u>konvergiert</u> $:\Longleftrightarrow$ $(s_n)_n$ konvergiert

In diesem Fall:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{\underline{Wert} der Reihe}$$

3.2 <u>Lemma</u>: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverg. $\Longrightarrow$ $(a_k)_k$ ist Nullfolge

<u>Bem</u>:
1) Die Umkehrung gilt i. Allg. nicht (z.B $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$)
2) Kontrapos.: $(a_k)_k$ keine Nullfolge $\Longrightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverg.

3.4 <u>Satz</u> (Rechenregeln): Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = A$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = B$ und $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = A + B \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \alpha a_k = \alpha A$$

⑤ <u>Drei wichtige Reihen</u>

<u>Geometrische Reihe</u> für $q \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{falls } |q| < 1 \\ \text{diverg., } & \text{falls } |q| \geq 1 \end{cases}$$

<u>Harmonische Reihe</u>: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverg.

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konverg. (allg. für $r \geq 2$: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^r}$ konverg.)

<u>Beisp</u>: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k+3}}{4^k} = ?$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k+3}}{4^k} \underset{\text{Ind. Trans.}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{k+4}}{4^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{2^4}{4}}_{4} \cdot \underbrace{\frac{2^k}{4^k}}_{(1/2)^k} \underset{3.4}{=} 4 \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^k}_{\text{geom. Reihe, } q=\frac{1}{2}}$$

$$= 4 \cdot \frac{1}{1-1/2} = 4 \cdot \frac{1}{1/2} = 4 \cdot 2 = \underline{\underline{8}}$$

⑥ Konvergenz-Kriterien

3.7 **Satz**: Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ Reihen mit
$0 \le a_k \le b_k$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$

1) Majoranten-Krit.: $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konverg $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverg.

2) Minoranten-Krit.: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverg. $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ diverg.

Beisp: Ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^2-5}{k^2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k$ konverg?

$\forall k \in \mathbb{N}$: $\frac{3k^2-5}{k^2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \le \frac{3k^2}{k^2}\left(\frac{1}{2}\right)^k = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k$

$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ konverg. $\underset{3.4}{\Longrightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k$ konverg
(geom. Reihe, $q = \frac{1}{2}$)

$\underset{\text{Majo-Krit}}{\Longrightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^2-5}{k^2} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ konverg.

3.9 **Def**: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konverg. $:\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konverg.

Satz: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ abs. konv. $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konv.

3.10 **Quotienten-Kriterium**

$$r := \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \begin{cases} < 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ absolut konverg.} \\ > 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ diverg.} \\ = 1 \Rightarrow \text{keine Aussage} \end{cases}$$

3.11 **Wurzel-Kriterium**

ähnl. wie Quot.-Krit. mit $r := \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$

3.14 **Leibniz-Kriterium**

$(a_k)_k$ mon. fall. Nullfolge $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ konverg.

Beisp: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^2}$, $a_k = \frac{2^k}{k^2}$

Quot: $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{2^{k+1}}{(k+1)^2} \cdot \frac{k^2}{2^k} = 2 \cdot \left(\frac{k}{k+1}\right)^2 = 2 \cdot \left(\frac{k}{k(1+1/k)}\right)^2$

$= 2 \cdot \frac{1}{(1+1/k)^2} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 2 \cdot \frac{1}{(1+0)^2} = 2 \cdot \frac{1}{1^2} = 2$

$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = 2 > 1 \underset{\text{Quot.-Krit}}{\Longrightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^2}$ divergiert.

Wann welches Konvergenzkriterium? (Daumen-regel)

Gegeben: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Fall $a_k \neq \frac{\text{Polynom}}{\text{Polynom}}$: Versuche Quot- oder Wurzel-Krit.

Fall $a_k = \frac{\text{Polynom}}{\text{Polynom}}$: Sei $r :=$ Zählergrad
$s :=$ Nennergrad

z.B. $a_k = \frac{k^2+5}{k^3+k}$, $r = 2$, $s = 3$

Fall $r \geq s$: Versuche Kontrapos. von 3.2

z.B. $a_k = \frac{k^2+3}{2k^2-k} = \frac{\cancel{k^2}(1+3/k^2)}{\cancel{k^2}(2-1/k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{1+0}{2-0} = \frac{1}{2}$!

$\Rightarrow (a_k)_k$ keine 0-Folge, d.h. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent

Fall $s = r+1$: Versuche Minor.-Kriterium mit Minorante $\sum_{k=1}^{\infty} c\frac{1}{k}$, $c > 0$

Fall $s \geq r+2$: Versuche Major.-Kriterium mit Majorante $\sum_{k=1}^{\infty} c\frac{1}{k^2}$, $c > 0$

§5 Grenzwerte von Funktionen, Stetigkeit

Sei $D \subset \mathbb{R}$

$\overline{D} := \{\lim_{n\to\infty} x_n \mid (x_n)_n$ konverg. Folge in $D\}$ Abschluss von D

z.B. $\overline{]0,1[} = [0,1]$, $\overline{\mathbb{R}\setminus\{0\}} = \mathbb{R}$

7 Def (5.2) sei $f: D \to \mathbb{R}$ Funktion, $p \in \overline{D}$, $q \in \mathbb{R}$

$\lim_{x\to p} f(x) = q :\Longleftrightarrow$ Für jede Folge $(x_n)_n$ in D mit $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} p$ gilt: $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} q$

(5.3) Einseit. Grenzwerte $\lim_{x\nearrow p} f(x)$, $\lim_{x\searrow p} f(x)$ ähnlich

Beisp

$f = c$ konst. Funkt. $\Longrightarrow \lim_{x\to p} c = c$

$f = id$ ident. Funkt. $\Longrightarrow \lim_{x\to p} x = p$

5.4 Grenzwertsätze: Seien $f, g: D \to \mathbb{R}$, $p \in \overline{D}$, $\lim_{x\to p} f(x) = q$ und $\lim_{x\to p} g(x) = r$. Dann gilt:

1)–4) $\lim_{x\to p} (f+g)(x) = q+r$ und analog für $f-g$, $f\cdot g$, $\frac{f}{g}$

5) $f(x) \le g(x)$ in Umgeb. von p $\Rightarrow q \le r$

6) Sandwich-Prinzip: $f(x) \le h(x) \le g(x)$, $q = r$ $\Rightarrow \lim_{x\to p} h(x) = q$

Beisp

1) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-8}{x^2-x-2} \underset{\substack{5.4\\1)-4)}}{=} \frac{1^3-8}{1^2-1-2} = \frac{-7}{-2} = \underline{\underline{\frac{7}{2}}}$

2) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x^2-x-2} \left(= \frac{2^3-8}{2^2-2-2} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} \right)$ d.h. Grenzwertsatz klappt nicht

Zerlege Zähler und Nenner

$$x^3-8 = (x^2+2x+4)(x-2)$$
$$x^2-x-2 = (x+1)(x-2)$$
gemeinsamer Faktor

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x^2-x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2+2x+4}{x+1} \underset{5.4}{=} \frac{2^2+2\cdot 2+4}{2+1} = \frac{12}{3} = \underline{\underline{4}}$$

Uneigentliche Grenzwerte

Def (5.6) Sei $f: D \to \mathbb{R}$ Funktion, $p \in \overline{D}$ oder $p \in \{\pm\infty\}$, falls D nicht nach oben bzw. unten beschr., und sei $q \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

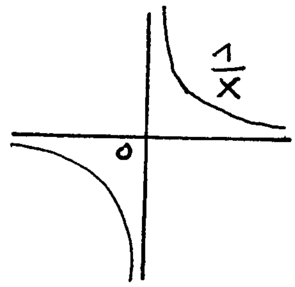
$\lim\limits_{x \to p} f(x) = q :\iff$ Für jede Folge $(x_n)_n$ in D mit $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} p$ gilt: $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} q$

Bem: Analog zu 5.4 gelten Grenzwertsätze

Beisp

1) $\lim\limits_{x \searrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x \nearrow 0} \frac{1}{x} = -\infty$

   $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$



2) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x+1}{x-3} = ?$

$$\frac{2x+1}{x-3} = \frac{x(2+1/x)}{x(1-3/x)} = \frac{2+\frac{1}{x}}{1+3\cdot\frac{1}{x}} \xrightarrow[\substack{x \to +\infty \\ (\text{Beisp } 1))}]{} \frac{2+0}{1+3\cdot 0} = \frac{2}{1} = \underline{\underline{2}}$$

⑧ Stetigkeit

Def (5.7) Sei $f: D \to \mathbb{R}$ eine Funktion

f stetig in $p \in D :\iff \lim\limits_{x \to p} f(x) = f(p)$

f stetig $:\iff f$ stetig in jedem $p \in D$

Beisp (5.10, 5.18)

Polynome, exp, sin, cos, ln
Betragsfunktion $|\cdot|: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
Wurzel-funktion $\sqrt{\ }: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$
} sind stetig

5.8 **Satz**: Seien $f, g: D \to \mathbb{R}$ stetig (in $p \in D$) und $\alpha \in \mathbb{R}$
$\implies f+g, f-g, f\cdot g, \alpha f$ und f/g sind stetig (in p)

5.9 **Satz**: Kompositionen stetiger Funktionen sind stetig.

Beisp

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{\exp(2x^2+3)+5}{x^2+1}+\sin^2(x)$

Ist f stetig?

Die Polynome $2x^2+3$, x^2+1 und 5 sind stetig, und die Funktionen exp und sin sind stetig. f ist aus diesen zusammengesetzt durch die algebr. Operationen $+$, $\cdot$ und $\div$ und die Komposition von Funktionen. Also ist f stetig.

5.11 Lemma: Sei $D\subset\mathbb{R}$ Intervall, $p\in D$ innerer Punkt. Dann gilt: $f:D\to\mathbb{R}$ ist stetig in $p\in D$ $\iff$

$$\lim_{x\nearrow p} f(x) = f(p) = \lim_{x\searrow p} f(x)$$

Beisp

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases}\cos(x^2+x) & \text{für } x<0\\ \sqrt{x+1} & \text{für } x\geq 0\end{cases}$$

Ist f stetig in $p=0$?

$f(0)=\sqrt{0+1}=\sqrt{1}=1$

$$\lim_{x\nearrow 0} f(x) = \lim_{x\nearrow 0}\cos(x^2+x) \underset{\substack{\uparrow\\ \cos(x^2+x)\text{ stetig}}}{=} \cos(0^2+0)=\cos(0)=1=f(0)$$

$$\lim_{x\searrow 0} f(x) = \lim_{x\searrow 0}\sqrt{x+1} \underset{\substack{\uparrow\\ \sqrt{x+1}\text{ stetig}}}{=} \sqrt{0+1} = f(0)$$

Also: $\lim\limits_{x\nearrow 0} f(x) = f(0) = \lim\limits_{x\searrow 0} f(x)$, d.h. f stetig in $p=0$.

Wichtige Sätze über stetige Funktionen

5.13 Zwischenwertsatz

5.15 Satz vom Minimum und Maximum

Anwendung von ZWS

Beh: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-5+\cos(x^2)$ hat mind. eine Nullstelle

Bew: f ist stetig mit

$$\left.\begin{aligned} f(0)&=3\cdot 0-5+\cos(0)=-5+1=-4<0\\ f(3)&=3\cdot 3-5+\underbrace{\cos(9)}_{\geq -1}\geq 9-5-1=3>0\end{aligned}\right\}\ \text{d.h. } f(0)<0<f(3)$$

$\overset{}{\underset{\text{ZWS}}{\Longrightarrow}}\ \exists p\in[0,3]: f(p)=0$

§ 6 Differentialrechnung

Im Folg.: $D \subset \mathbb{R}$ mit $p \in \overline{D \setminus \{p\}}$ für alle $p \in D$

(9) **Def** (6.1) Sei $f: D \to \mathbb{R}$ Funktion

f differenzierbar in $p \in D$:$\Leftrightarrow$ folg. Grenzwert existiert

$$f'(p) := \lim_{x \to p} \underbrace{\frac{f(x) - f(p)}{x - p}}_{\text{Differenzenquotient}} \in \mathbb{R} \quad \text{Ableitung von } f \text{ in } p$$

f differenzierbar :$\Leftrightarrow$ f diff.bar in jedem $p \in D$.

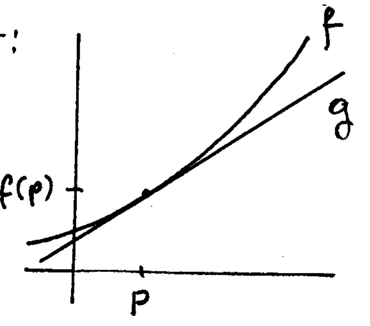
Dann: $f': D \to \mathbb{R}$, $p \mapsto f'(p)$ Ableitung von f

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ diff.bar in $p \in D$. Dann gilt:

6.3 f ist stetig in p

6.2 f hat lineare Approximation in p

$$g(x) = f(p) + f'(p)(x-p)$$



Wichtige Ableitungen (6.4, 6.8)

$(\text{const})' = 0$, $\quad (x^n)' = n x^{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $\quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

$\exp' = \exp$, $\quad \ln'(x) = \frac{1}{x}$

$\sin' = \cos$, $\quad \cos' = -\sin$

6.5 **Satz** (Ableitungsregeln) Seien $D \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} E \xrightarrow{h} \mathbb{R}$ diff bar, $\alpha \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $f+g$, αf, $f \cdot g$, f/g und $h \circ g$ sind diff.bar, und es gilt:

$(f+g)' = f' + g'$		Summenregel
$(\alpha f)' = \alpha f'$		Faktorregel
$(f \cdot g)' = f' g + f \cdot g'$		Produktregel
$(f/g)' = \frac{f'g - f \cdot g'}{g^2}$		Quotientenregel
$(h \circ g)' = (h' \circ g) \cdot g'$		Kettenregel

Beisp: $f(x) = \sin(3x)\, e^{x^2 - 7x}$ ist diff.bar mit

$$f'(x) \underset{\substack{\text{Prod.- u.} \\ \text{Kett.reg.}}}{=} 3\cos(3x) \cdot e^{x^2-7x} + \sin(3x)(2x-7)e^{x^2-7x}$$

$$= (3\cos(3x) + (2x-7)\sin(3x))\, e^{x^2-7x}$$

⑩ Anwendungen: Monotonie, lokale Extrema

Def (6.14) $f: D \to \mathbb{R}$ monoton steigend (bzw. fallend) $:\Longleftrightarrow$

$$\forall x,y \in D: (x<y \Rightarrow f(x) \le f(y))$$
$$(\text{bzw } f(x) \geq f(y))$$

Satz: Für $D \subset \mathbb{R}$ Intervall und $f: D \to \mathbb{R}$ diffbar gilt:

$$f \text{ mon. steig. (bzw. fall.)} \Longleftrightarrow \forall x \in D: f'(x) \geq 0 \ (\text{bzw} \le 0)$$

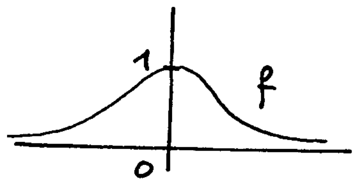
Beisp

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x^2}$ diff.bar

$f'(x) = -2x \underbrace{e^{-x^2}}_{>0}$ für alle $x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f'(x) \begin{cases} \geq 0 & \text{für } x \le 0 \\ \le 0 & \text{"} \ x \geq 0 \end{cases}$

$\underset{\text{Satz}}{\Longrightarrow} f \text{ mon} \begin{cases} \text{steigend auf } \mathbb{R}_{\le 0} \\ \text{fallend " } \mathbb{R}_{\geq 0} \end{cases}$



Insbes. hat f in $p=0$ ein (globales) Maximum

Lokale Extrema

Sei $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ 2-mal diff.bar. Dann gilt:

$$\boxed{\begin{matrix} f'(p)=0 \\ f''(p) \neq 0 \end{matrix}} \underset{6.17}{\Longrightarrow} \boxed{\begin{matrix} f \text{ hat in } p \\ \text{lok. Extr.} \end{matrix}} \underset{6.10}{\Longrightarrow} \boxed{f'(p)=0}$$

hinreich. Beding. $\qquad\qquad\qquad\qquad$ notwend. Beding.

Beisp: $f(x) = e^{-x^2}$

$$f'(x) = -2x\, e^{-x^2}$$
$$f''(x) = -2e^{-x^2} - 2x(-2x)e^{-x^2}$$
$$= (4x^2 - 2)e^{-x^2}$$

Notw. Beding.

$$f'(p) = 0 \Longleftrightarrow -2p \underbrace{e^{-p^2}}_{>0} = 0 \Longleftrightarrow p = 0$$

Hinreich. Beding.

$$f'(0) = 0$$
$$f''(0) = (4 \cdot 0^2 - 2)e^{-0^2} = -2e^0 = -2 < 0$$

$\Rightarrow f$ hat in $p=0$ ein lokales Maximum.