6 Axiomatische Beschreibung v. $\mathbb{R}$

Ziel: Regeln für das Arbeiten mit reellen Zahlen

Axiomensystem

"$\mathbb{R}$ ist ein vollständig ③ geordneter ② Körper ①."

① Grundrechenarten

②, ③ $\mathbb{R}$ als Zahlengerade

neg 0 pos

6.1 Körper

6.1.1 Def: Ein Körper ist eine Menge K mit zwei Abbild. "Verknüpf. auf K"

$+ : K \times K \longrightarrow K, \ (a,b) \longmapsto a+b := +(a,b)$ "Addition"

$\cdot : K \times K \longrightarrow K, \ (a,b) \longmapsto a \cdot b \ (= ab) := \cdot(a,b)$ "Multiplikation",

die folgende Bedingungen erfüllen.
(Körperaxiome)

	Addition	Multiplikation
Kommutativ Ges.	$a+b = b+a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Assoziativ Ges	$(a+b)+c = a+(b+c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Existenz von neutral. Elem	$\bigvee_{0 \in K} \bigwedge_{a \in K} a+0 = a$	$\bigvee_{1 \in K} \bigwedge_{a \in K} a \cdot 1 = a$
Existenz von inversen Elem.	$\bigwedge_{a \in K} \bigvee_{-a \in K} a+(-a) = 0$	$\bigwedge_{a \neq 0} \bigvee_{a^{-1} \in K} a \cdot a^{-1} = 1$
Distrib. Ges.	$a \cdot (b+c) = a \cdot b + ac$	

Dabei gelte Komm.-, Assoz-, Distrib. Ges für alle $a, b, c \in K$

Beisp

1) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ sind Körper

2) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ kein Körper, da für $a \neq 1, -1$ kein multiplik. Inverses.

3) $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ lies: 0 = "gerade", 1 = "ungerade"

+	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Achtung: $1+1=0$

$(\mathbb{F}_2, +, \cdot)$ ist Körper.

6.1.2 <u>Satz</u>: In jedem Körper K gilt für alle $a, b \in K$
($\neq 0$ falls nötig)

1) Die neutr. Elem 0 und 1 sind eindeutig bestimmt.

$\bigwedge_{a(\neq 0)}$ die Inversen $-a$ " a^{-1} " " "

2) Rechenregeln

$-0 = 0$ $\quad -(-a) = a \quad -(a+b) = -a+(-b)$

$1^{-1} = 1 \quad (a^{-1})^{-1} = a \quad (a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$

$a \cdot 0 = 0 \quad -a \cdot b = -(a \cdot b) \quad (-a) \cdot (-b) = a b$

3) Nullteilerfrei: $a \cdot b = 0 \Longrightarrow a = 0 \vee b = 0$

4) Jede Gleichung $a + x = b$ ist eindeut. lösbar
" " $a \cdot x = b$ " " " für $a \neq 0$.

<u>Bew</u>: z.B 1) "0" 2) "$a \cdot 0 = 0$"

1) Seien $0, 0' \in K$ mit $a + 0 = a = a + 0'$ für alle $a \in K$.

$$\Rightarrow 0 \underset{0' \text{ neutr.}}{=} 0 + 0' \underset{\text{komm}}{=} 0' + 0 \underset{0 \text{ neutr.}}{=} 0', \text{ d.h. } 0 = 0'$$

2) <u>Zeigen</u> $a \cdot 0 = 0$

$$x := a \cdot 0 \underset{0 \text{ neutr.}}{=} a \cdot (0 + 0) \underset{\text{Distrib}}{=} a \cdot 0 + a \cdot 0 = x + x$$

$$\underset{+(-x)}{\Rightarrow} \quad 0 \underset{\text{inv}}{=} x + (-x) = (x + x) + (-x) \underset{\text{ass}}{=} x + \underbrace{(x + (-x))}_{\overset{\text{inv}}{=} 0}$$

$$= x + 0 \underset{\text{neutr.}}{=} x$$

also $a \cdot 0 = x = 0$

6.2 Geordneter Körper

6.2.1 **Def**: 1) Eine Ordnung auf einer Menge $K \neq \emptyset$ ist eine Relation $x<y$ (lies: "x kleiner y") auf K mit folgenden Eigenschaften:

Total: Für je zwei $a,b \in K$ gilt genau eine der Aussagen:

$$a<b\,,\quad a=b\,,\quad b<a$$

Transitiv: $\bigwedge_{a,b,c\in K} a<b \wedge b<c \Rightarrow a<c$

2) Ein geordneter Körper ist ein Körper $(K,+,\cdot)$ mit einer Ordnung $<$ auf K, sodass für alle $a,b,c \in K$ gilt:

Mon+: $a<b \Rightarrow a+c<b+c$

Mon·: $a<b \wedge 0<c \Rightarrow a\cdot c<b\cdot c$

Beisp: 1) $(\mathbb{R},+,\cdot,<)$, $(\mathbb{Q},+,\cdot,<)$

2) $(\mathbb{F}_2,+,\cdot)$ lässt sich nicht ordnen (zu geord. Körper)

Annahme: doch $\underset{\text{total}}{\Rightarrow}$ $\begin{cases} 0<1 \overset{+1}{\underset{\text{Mon+}}{\Rightarrow}} 1=0+1<1+1=0, \overset{\text{d.h.}}{} 1<0 \ \lightning \\ \text{oder} \\ 1<0 \underset{+1}{\Rightarrow} 0=1+1<0+1=1, \text{d.h. } 0<1 \ \lightning \end{cases}$

6.2.2 **Satz**: In jedem geordneten Körper gilt für alle $a,b,c\in K$

1) $0<a \Leftrightarrow -a<0$
2) $a<b \wedge c<0 \Rightarrow b\cdot c<a\cdot c$
3) $a\neq 0 \Rightarrow a^2:=a\cdot a>0$, Insbes. $1=1\cdot 1>0$
4) $0<a<b \Rightarrow 0<b^{-1}<a^{-1}$

Bew: z.B. 1) und 3)

1) $0<a \underset{+(-a)}{\Rightarrow} -a=0+(-a)\underset{\text{Mon+}}{<}a+(-a)\underset{\text{inv}}{=}0$, d.h. $-a<0$

Rückrichtung ähnlich

3) $a\neq 0 \underset{\text{total}}{\Rightarrow} a>0 \vee a<0$

Fall $a>0$: $\underset{\cdot a}{\Rightarrow} a^2:=a\cdot a\underset{\text{Mon}\cdot}{>}a\cdot 0 \overset{6.1.2,2)}{=} 0$, $a^2>0$

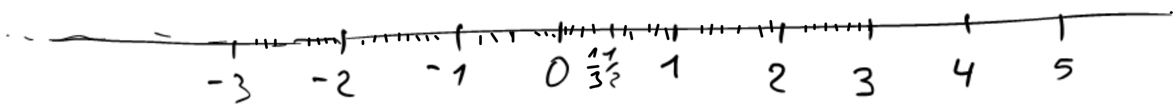
Fall $a<0$: $\underset{1)}{\Rightarrow} -a>0 \Rightarrow \underset{a^2}{\overset{=}{}}a\cdot a = (-a)\cdot(-a) \overset{\text{1. Fall}}{>} 0$, d.h. $a^2>0$ ✓

<u>Folgerung</u>: $(\mathbb{C},+,\cdot)$ lässt sich nicht anordnen.

<u>Bew</u>: Für die komplexe Zahl $i \in \mathbb{C}$ gilt: $i^2 = -1$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Annahme: } \mathbb{C} \text{ lasst sich ordnen } \underset{6.2.2,3}{\Longrightarrow} \quad 0 < i^2 \overset{\downarrow}{=} -1 \\ 6.2.2,3) \quad 1 > 0 \underset{6.2.2,1)}{\Longrightarrow} \quad -1 < 0 \end{array}\right\} \text{Wid.}$$

Bild für geordneten Körper



Was hat $\mathbb{R}$, was $\mathbb{Q}$ nicht hat?

6.3 Das Vollständigkeitsaxiom

Sei $(K,+,\cdot,<)$ ein geordneter Körper

Def: Sei $A \subset K$, $A \neq \emptyset$

"kleiner oder $=$"

$t \in K$ obere Schranke von A $:\Longleftrightarrow \bigwedge_{a \in A} a \leq t$

A ist nach oben beschränkt $:\Longleftrightarrow$ A hat obere Schranke

$s \in K$ Supremum von A (Notation $s = \sup A$)

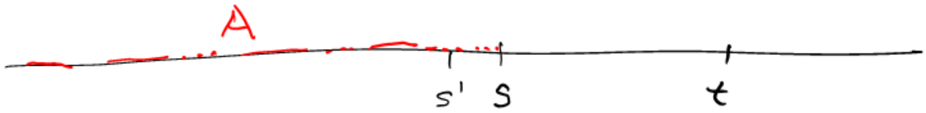
$:\Longleftrightarrow$ s ist kleinste obere Schranke von A

$\Longleftrightarrow \begin{cases} s \text{ ist obere Schranke von } A \\ \text{Jedes } s' < s \text{ wird von mind. einem } a \in A \text{ übertroffen.} \end{cases}$

Beisp: $K = \mathbb{R}$, $A_1 = [0,1[\;\Rightarrow\; 1 = \sup A_1,\; 1 \notin A_1$

$A_2 = [0,1] \;\Rightarrow\; 1 = \sup A_2,\; 1 \in A_2$

$\left([a,b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}\right)$



Def: Ein geordneter Körper K heißt vollständig wenn er das Vollständigkeitsaxiom VOLL erfüllt.

VOLL: $\boxed{\text{Jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge von } K \text{ hat ein Supremum (in } K)}$

Satz: Es gibt (im Wesentlichen) genau einen vollständig geordneten Körper, nämlich $\mathbb{R}$.

Zur Abgrenzung: $\mathbb{Q}$ ist nicht vollständig

Betrachte z.B. $A := \{a \in \mathbb{Q} \mid a > 0, a^2 < 2\}$

Man kann zeigen:

$B := \{t \in \mathbb{Q} \mid t \text{ ist obere Schranke von } A\}$

$= \{t \in \mathbb{Q} \mid t > 0, t^2 > 2\}$

und B hat kein kleinstes Element.

Also hat A kein Supremum in $\mathbb{Q}$.