# 5 Kombinatorik

Im Folg: $A \neq \emptyset$ Menge, $k \in \mathbb{N}$ fest

? k-Tupel
k-Ketten $\leadsto$ Anordnungen
k-Teilmengen

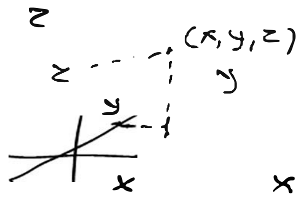
## 5.1 Das k-fache kartesische Produkt

5.1.1 <u>Def</u>: $A^k := A \times \dots \times A$ k Faktoren
$:= \{(a_1, \dots, a_k) \mid a_1, \dots, a_k \in A\}$

$(a_1, \dots, a_k)$ heißt <u>"k-Tupel über A"</u> oder "A-Folge der Länge k"

$(a_1, \dots, a_k) = (b_1, \dots, b_k) :\Leftrightarrow a_i = b_i$ für $i = 1, \dots, k$

Beisp: $\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}$




$(1,4,2) \neq (1,5,2) \in \mathbb{R}^3$
$(1,4,2) \neq (4,1,2)$

5.1.2 <u>Satz</u>: Ist A endl. mit $|A| = n$, so gilt:
$$|A^k| = n^k$$

<u>Bew</u>: Induktion nach k.

IA) $k=1$: $A^1 = \{(a) \mid a \in A\} \Rightarrow |A^1| = |A| = n = n^1$ ✓

IS) sei nun $k \geq 1$ und $|A^k| = n^k$ (IV)

Es gilt: $(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}) \in A^{k+1} \Leftrightarrow (a_1, \dots, a_k) \in A^k \wedge a_{k+1} \in A$

$\Rightarrow |A^{k+1}| = \underline{|A^k|}\,|A| \underset{IV}{=} \underline{n^k}\,|A| = n^k n = n^{k+1}$ ✓

<u>Beisp</u>: 1) Anzahl der $\{0,1\}$-Folgen der Länge 10 ist $2^{10} = 1024$
2) " " $\{w,f\}$-Folgen " " 3 ist $2^3 = 8$
3) " " Zustände von 6 Ampeln an Kreuzung
$|\{\text{rot}, \text{gelb}, \text{grün}\}^6| = 3^6 = 729$

5.1.3 Wichtig: Deutung von k-Tupeln als Abbildungen

$\mathrm{Abb}(\{1,\dots,k\},A) := \{$ alle Abbild. $\alpha:\{1,\dots,k\}\to A\}$

Satz: Es gibt eine (natürliche) Bijektion

$$A^k \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} \mathrm{Abb}(\{1,\dots,k\},A)$$

$$(a_1,\dots,a_k) \longmapsto \left(\alpha:\{1,\dots,k\}\to A,\ i \longmapsto a_i\right)$$

| $i$ | 1 | 2 | $\cdots$ | $k$ |
|---|---|---|---|---|
| $\alpha(i)$ | $a_1$ | $a_2$ | $\cdots$ | $a_k$ |

$$(\alpha(1),\alpha(2),\dots,\alpha(k)) \longleftarrow\!\!\shortmid\ (\alpha:\{1,\dots,k\}\to A)$$

## 5.2 k-Ketten

5.2.1 Def: $(a_1,\dots,a_k)\in A^k$ k-Kette über $A$ $:\iff$

$a_1,\dots,a_k$ paarweise verschied., d.h. $a_i\neq a_j$ für $i\neq j$

$A^{\underline{k}} := \{$ alle k-Ketten über $A\}$

$= \{(a_1,\dots,a_k)\in A^k \mid a_1,\dots,a_k$ paarw. verschied.$\}$

Bem: 1) Unter der Bijektion 5.1.3 korrespondieren die k-Ketten zu den injektiven Abb. $\alpha:\{1,\dots,k\}\to A$

2) Zusammenhang mit Urnenmodell

Urne mit n Kugeln


Ziehung von k Kugeln mit Beachtung der Reihenfolge


Mögl. Ziehungsresultate entsprechen:

k-Tupeln bei Szenario "mit Zurücklegen"

k-Ketten " " "ohne Zurücklegen"

5.2.2 Satz: Ist $A$ endl. mit $|A| = n$ und $k \leq n$, so gilt:

$$|A^{\underline{k}}| = n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1) \qquad k \text{ Faktoren}$$

Bew: Indukt. nach $k$.

IA) $k = 1$: $|A^{\underline{1}}| = |A| = n$

IS) Sei $1 \leq k < n$ (sonst $k+1 > n$) und Beh. richtig für $k$ (IV)

Es gilt: $(a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}) \in A^{\underline{k+1}} \iff \begin{cases} (a_1, \ldots, a_k) \in A^{\underline{k}} \wedge \\ a_{k+1} \in A \setminus \{a_1, \ldots, a_k\} \end{cases}$

$$\Rightarrow |A^{\underline{k+1}}| = |A^{\underline{k}}| \underbrace{|A \setminus \{a_1, \ldots, a_k\}|}_{n-k} \underset{IV}{=} n(n-1) \cdots (n-k+1)(n-k) \quad \checkmark$$

Beisp: 1) Die Anz. der Beleg. der ersten drei Plätze bei Wettkampf von 10 Sportler. ist $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.

2) Anz. der Wörter der Länge 4 über dem Alphabet $\{a, b, c, d, e\}$ ohne Wiederhol. von Buchstaben. $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$.

## 5.3 Anordnungen und Permutionen

5.3.1 Betrachte nun den Fall $k = n = |A|$

Satz: Sei $A$ endl. mit $|A| = n$. Dann gilt:

$$A^{\underline{n}} = \{(a_1, \ldots, a_n) \in A^n \mid a_1, \ldots, a_n \text{ paarweise verschied.}\}$$
$$= \{\text{"Anordnungen" der Elemente von } A\}$$

und $|A^{\underline{n}}| = n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1 = n!$

Bew: 5.2.2 mit $k = n$ ✓

Beisp: $A = \{a, b, c\}$

$$A^{\underline{3}} = \{(a,b,c), (a,c,b), (b,c,a), (b,a,c), (c,b,a), (c,a,b)\}$$

$$|A^{\underline{3}}| = 3! = 6$$

5.3.2 Def: Eine Permutation von $1, \ldots, n$ ist eine bijektive Abbildung

$$\sigma : \{1, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, \ldots, n\}$$

Notation: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$

$S_n := \{\text{alle Permutationen von } 1, \dots, n\}$

$\Rightarrow |S_n| = |\{1, \dots, n\}^{\underline{n}}| \underset{5.3.1}{=} n!$

Beisp: $S_3$ hat folgende 6 Elemente

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Bemerk: Komposition von Abb. liefert Verknüpfung auf $S_n$

$$\circ : S_n \times S_n \longrightarrow S_n$$
$$(\sigma, \rho) \longmapsto \sigma \circ \rho$$

z.B. $\sigma_1 \circ \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \sigma_1(\tau_2(1)) & \sigma_1(\tau_2(2)) & \sigma_1(\tau_2(3)) \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \tau_1$$

$(S_n, \circ)$ ist Gruppe, und heißt symmetrische Gruppe vom Grad $n$

## 5.4 k-Teilmengen

Sei nun $|A| = n$ und $k \le n$

Def: $\mathrm{Pot}_k(A) := \{ B \subset A \mid |B| = k \} \subset \mathrm{Pot}(A)$

Menge aller $k$-elementigen Teilmengen von $A$.

Beisp

$A = \{1, 2, 3, 4\}$

$\mathrm{Pot}_2(A) = \{ \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\} \}$

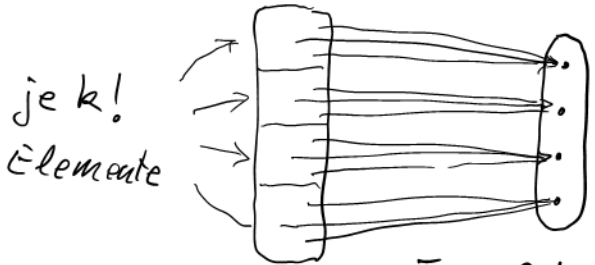
**Satz:** $\left|\mathrm{Pot}_k(A)\right| = \binom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}$

**Bew:** Betrachte Abbildung

$$F : A^k \longrightarrow \mathrm{Pot}_k(A)$$
$$(a_1, \ldots, a_k) \longmapsto \{a_1, \ldots, a_k\}$$

Es gilt:

1) $F$ ist surjektiv.
2) Für jedes $B \in \mathrm{Pot}_k(A)$ werden genau $k!$ Elem. aus $A^k$ durch $F$ auf $B$ abgebildet, nämlich genau die $k!$ Anordnungen von $B$.




$A^k \xrightarrow{F} \mathrm{Pot}_k(A)$ (*)

$\Rightarrow |A^k| = |\mathrm{Pot}_k(A)| \cdot k!$

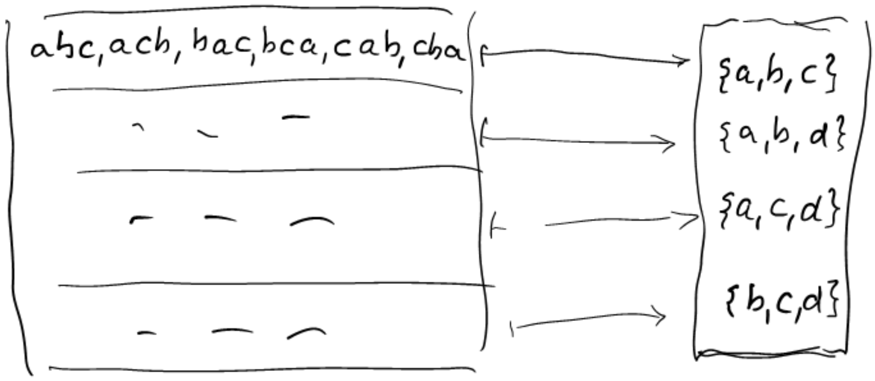
$\Rightarrow |\mathrm{Pot}_k(A)| = \dfrac{|A^k|}{k!} \underset{5.2.2}{=} \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}$ ✓

Illustration zu (*) an konkretem Beisp.

$A = \{a,b,c,d\}$, $n = 4$, $k = 3$

$|A^3| = 4\cdot 3\cdot 2 = 24$

$A^3 \xrightarrow{F} \mathrm{Pot}_3(A)$




Beisp: 1) Anz. d. Lottoscheinausfüllung: $\binom{49}{6} \sim 14\cdot 10^6$

2) Anz. d. Skat-Hände für einen Spieler: $\binom{32}{10} \sim 65\cdot 10^6$

Bem: Sei $|A| = n$

Wissen: $2^n \overset{4.5.1}{=} |\mathrm{Pot}(A)|$ — Zusammenhang?

$2^n \overset{4.7.2}{=}$ n-te Zeilensumme im Pascal-$\Delta$

$$\mathrm{Pot}(A) = \mathrm{Pot}_0(A) \cup \mathrm{Pot}_1(A) \cup \mathrm{Pot}_2(A) \cup \dots \cup \mathrm{Pot}_n(A)$$

disjunkte Zerlegung

$$\Rightarrow |\mathrm{Pot}(A)| = \sum_{k=0}^{n} |\mathrm{Pot}_k(A)| \underset{\text{Satz}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

Beisp

$$\mathrm{Pot}(\{1,2,3\}) = \underbrace{\{\emptyset\}}_{1} \cup \underbrace{\{\{1\},\{2\},\{3\}\}}_{3} \cup \underbrace{\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}}_{3} \cup \underbrace{\{\{1,2,3\}\}}_{1}$$

3. Zeile v. Pascal-$\Delta$

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1