4.4 Erweitertes Induktionsprinzip

4.4.1 **Satz**: Sei $n_0 \in \mathbb{N}_0$, $p(n)$ Aussageform auf $\{n \in \mathbb{N}_0 \mid n \geq n_0\}$ und es gelte:

IA) $p(n_0)$

IS) $\bigwedge_{n \geq n_0} (p(n) \Rightarrow p(n+1))$

Dann stimmt $p(n)$ für alle $n \geq n_0$

Bew: Betrachte Aussageform $q(m)$ auf $\mathbb{N}$

$$q(m) := p(n_0 + m - 1)$$

und wende "normale Induktion" auf $q(m)$. ✓

4.4.2 **Beispiele**

1) Geometrische Summe $1 + q + q^2 + \cdot + q^n$

Beh: $\bigwedge_{n \geq 0} \underbrace{\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}_{p(n)}$, falls $q \neq 1$

Bew: mit Induktion.

IA) $n = 0$: $q^0 = 1 = \frac{1-q}{1-q}$ ✓

IS) Sei $n \geq 0$ und Beh. $p(n)$ sei richtig (IV)

$$\sum_{i=0}^{n+1} q^i = \underline{\sum_{i=0}^{n} q^i} + q^{n+1} \underset{IV}{=} \frac{1-q^{n+1}}{\underline{1-q}} + q^{n+1} \cdot \frac{1-q}{1-q}$$

$$= \frac{1}{1-q}\left(1 - \cancel{q^{n+1}} + \cancel{q^{n+1}} - q^{n+1} q\right) = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$$

Also gilt: $\sum_{i=0}^{n+1} q^i = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}$, d.h. $p(n+1)$ ✓

2) **Beh**: $\bigwedge_{n \geq 4} n! > 2^n$

Bew: mit Induktion.

IA) $n = 4$: $4! = 24 > 16 = 2^4$

IS) Sei $n \geq 4$ und $n! > 2^n$ (IV)

$$(n+1)! = n!(n+1) \underset{IV}{>} 2^n(n+1) > 2^n 2 = 2^{n+1}$$

$$n \geq 4 \Rightarrow n+1 \geq 5 > 2 \Rightarrow n+1 > 2$$

Also gilt: $(n+1)! > 2^{n+1}$, d.h. $p(n+1)$ ✓

4.5 Zwei weitere Beispiele

Für A endl. Menge bezeichne

$$|A| := \text{Anzahl der Elem. von } A$$

4.5.1 Satz: Für jede endl. Menge A gilt:

$$|\mathrm{Pot}(A)| = 2^{|A|}$$

d.h. jede Menge mit n Elementen hat genau 2^n Teilmengen.

Bew: mit Indukt nach $n = |A|$

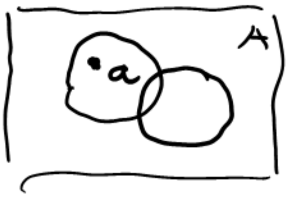
IA) $n = 0$, d.h. $A = \emptyset$

$$\mathrm{Pot}(\emptyset) = \{\emptyset\} \Rightarrow |\mathrm{Pot}(\emptyset)| = 1 = 2^0 = 2^{|\emptyset|}$$

IS) sei $n \geq 0$ und Beh. richtig für alle n-Element. Mengen (IV)

sei A Menge mit $|A| = n+1$ und $a \in A$ festes Element

$$\mathrm{Pot}(A) = \underbrace{\{B \subset A \mid a \in B\}}_{=:P} \cup \underbrace{\{B \subset A \mid a \notin B\}}_{=:Q}$$



wobei $P \cap Q = \emptyset$

$$\Rightarrow |\mathrm{Pot}(A)| = |P| + |Q|$$

zeigen $|P| = |Q|$

Betrachte $P \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} Q$

$$B \longmapsto B \setminus \{a\}$$

$$C \cup \{a\} \longleftarrow C$$

Dann gilt: $g \circ f = id_P$ und $f \circ g = id_Q$

$\underset{3.4.2}{\Longrightarrow}$ f bijektiv $\Rightarrow |P| = |Q|$

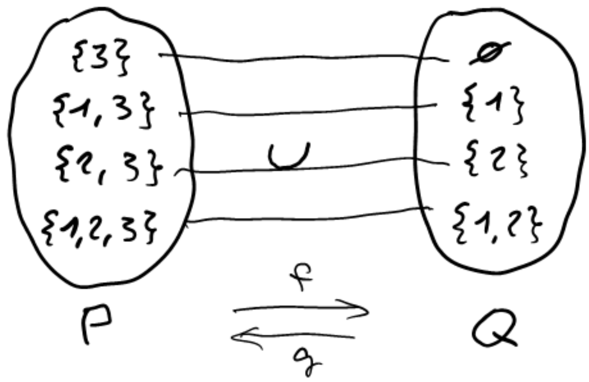
Es folgt $|\mathrm{Pot}(A)| = |P| + |Q| = 2|Q|$

Nun beachte $Q = \mathrm{Pot}(A \setminus \{a\})$ und $|A \setminus \{a\}| = n$

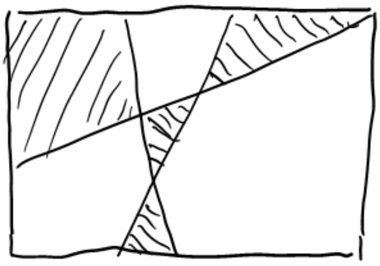
$$\Rightarrow |\mathrm{Pot}(A)| = 2|Q| = 2\,\underline{|\mathrm{Pot}(A \setminus \{a\})|} \underset{IV}{=} 2 \cdot \underline{2^n} = 2^{n+1} = 2^{|A|} \checkmark$$

Illustration für $n+1 = 3$, $A = \{1,2,3\}$, $a = 3$

$\mathrm{Pot}(\{1,2,3\})$



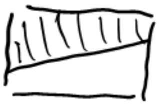
4.5.2 Durch Geraden gegebene Landkarten



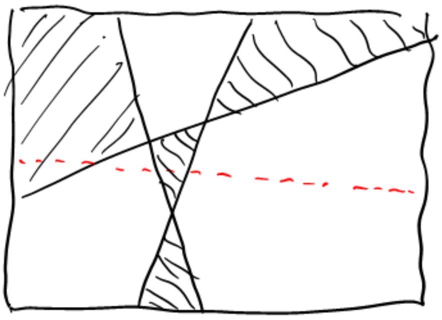
schwarz-weiß-Färbung **zulässig** :$\Longleftrightarrow$ Nachbarländer sind verschieden farbig

Satz: Jede durch endl. viele Geraden gegebene Landkarte hat eine zulässige schwarz-weiß-Färbung.

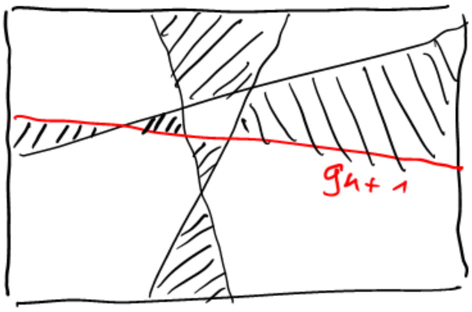
Bew: Induktion nach n = Anzahl der Geraden.

IA) $n=1$  ✓

IS) Sei $n \geq 1$ und Beh. richtig für n (IV)



$K_n := K_{n+1}$ ohne g_{n+1} hat zuläss. s-w-Färb. (IV)



K_{n+1}

s-w-Färb. $\begin{cases} \text{unterhalb } g_{n+1}: \text{ wie in } K_n \\ \text{oberhalb } g_{n+1}: \text{ Komplement. zu } K_n \end{cases}$

ist zulässig ✓

4.6 Binomialkoeffizienten

Sei $n, k \in \mathbb{N}_0$, $n \geq k$

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Binomialkoeffizient (lies "n über k")

Beobachtung:

1) $$\binom{n}{k} = \frac{\cancel{(n-k)!}\,(n-k+1)\cdots n}{k!\,\cancel{(n-k)!}} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

2) $$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!\,(n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}$$

Anwend.

$$\binom{10}{2} = \frac{10\cdot 9}{1\cdot 2} = 45\,, \quad \binom{10}{7} = \binom{10}{3} = \frac{10\cdot \overset{3}{\cancel{9}}\cdot \overset{4}{\cancel{8}}}{1\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{3}} = 120$$

Satz: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ gilt:

a) $$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

b) $$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

Bew: a) $$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,n!} = \frac{1}{0!} = 1\,, \quad \binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$$

b) $$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{n!\,k + n!\,(n-k+1)}{k!\,(n-k+1)!} = \frac{n!\,(\cancel{k}+n-\cancel{k}+1)}{k!\,(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k} \checkmark$$

Pascal-Dreieck

$\binom{0}{0}$ $\quad n=0$

$\binom{1}{0}\ \binom{1}{1}$ $\quad n=1$

$\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2}$ $\quad n=2$

$\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3}$ $\quad n=3$

$\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4}$

$\binom{n}{n}$ $\quad \binom{n}{0}$

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

...

4.7 Der Binomische Lehrsatz

4.7.1 Satz: Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$= a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

Beisp $n=2$: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm \binom{2}{1} ab + b^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ "1./2. Bin.-Form."

$n=4$: $(a+b)^4 = \underbrace{1}_{1} a^4 + \underbrace{\binom{4}{1}}_{4} a^3 b + \underbrace{\binom{4}{2}}_{6} a^2 b^2 + \underbrace{\binom{4}{3}}_{4} a b^3 + \underbrace{1}_{1} b^4$

4. Zeile v. Pasc. Δ: 1 4 6 4 1

Bew: Induktion nach n.

IA) $n=0$: $(a+b)^0 = 1 = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1 \cdot 1 \cdot 1$ ✓

IS) Sei $n \geq 0$ und Beh. stimme für n. (IV). Dann gilt:

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n \underset{IV}{=} (a+b)\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k\right)$$

$$\underset{\text{Distr.}}{=} a\sum + b\sum$$

$$\underset{4.3,1)}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}}_{\overset{4.3,3)}{=} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} b^k} + b^{n+1}$$

$$\underset{4,3,2)}{=} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \Big(\underbrace{\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}}_{\overset{4.6}{=} \binom{n+1}{k}}\Big) a^{n+1-k} b^k + b^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k \quad ✓$$

4.7.2 <u>Folgerungen</u>: Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

1) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ "n-Zeilensumme in Pascal-Δ"

2) $\sum_{k \text{ gerade}} \binom{n}{k} = \sum_{k \text{ unger.}} \binom{n}{k} = 2^{n-1}$ für $n \geq 1$.

<u>Bew</u>: 1) Setze $a = b = 1$: $2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \underbrace{1 \cdot 1}_{1}$

2) Setze $a = 1, b = -1$: $0 = (1-1)^n = \sum_{k \text{ ger.}} \binom{n}{k} 1 \cdot 1 + \sum_{k \text{ ung.}} \binom{n}{k} 1 \underbrace{(-1)}$ ✓

4.7.3 Verallgem. der 3. Bin. Formel.

<u>Satz</u>: Für jedes $n \geq 2$ gilt:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a^{n-k} b^{k-1} \right)(a-b) = a^n - b^n$$

<u>Bew</u>: Linke Seite =

$$= (a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})(a-b)$$

$$= a^n + \cancel{a^{n-1}b} + \cancel{a^{n-2}b^2} + \cdots + \cancel{a^2b^{n-2}} + \cancel{ab^{n-1}}$$
$$- \cancel{a^{n-1}b} - \cancel{a^{n-2}b^2} - \cdots - \cancel{ab^{n-1}} - b^n$$

$$= a^n - b^n$$ ✓

$n = 2$: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$n = 4$: $(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)(a-b) = a^4 - b^4$.