## 3.5 Endliche und abzählbare Mengen

**3.5.1 Def:** Eine Menge $A$ heißt <u>endlich</u> $:\Longleftrightarrow$

$A=\emptyset$ oder es gibt ein $n\in\mathbb{N}$ und eine bijektive Abb.

$$\alpha:\{1,2,\dots,n\}\longrightarrow A$$

d.h. $A=\{\alpha(1),\dots,\alpha(n)\}$ hat genau $n$ Elemente, d.h. $A$ ist <u>$n$-elementig</u>


**3.5.2 Satz:** Sei $n\in\mathbb{N}$ und $f:A\longrightarrow B$ eine Abb. zwischen zwei $n$-elem. Mengen. Dann gilt:

$$f \text{ injekt.} \Longleftrightarrow f \text{ surjekt} \Longleftrightarrow f \text{ bijektiv}$$

<u>Bew</u>: Seien $a_1,\dots,a_n$ die Elem. von $A$.

$f$ injektiv $\Longleftrightarrow$ $f(a_1),\dots,f(a_n)$ sind paarweise verschieden

$\underset{B\ n\text{-elem.}}{\Longleftrightarrow}$ $\{f(a_1),\dots,f(a_n)\}=B$

$\Longleftrightarrow$ $f$ surjektiv. ✓

**3.5.3 Def:** Eine Menge $A$ heißt <u>abzählbar</u> (unendlich) $:\Longleftrightarrow$ es gibt eine bijektive Abb. $\alpha:\mathbb{N}\longrightarrow A$

Sprechweise: $\alpha(1),\alpha(2),\alpha(3),\dots$ ist "Abzählung" von $A$.

<u>Beisp</u>:

1) $\mathbb{N}_0$ ist abzählbar

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{N}$ | $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | … |
| $\mathbb{N}_0$ | $\alpha(n)$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | … |

$\alpha(n)=n-1$

2) $A:=\{2n\mid n\in\mathbb{N}\}$ ist abzählbar

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{N}$ | $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | … |
| $A$ | $\alpha(n)$ | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | … |

$\alpha(n)=2n$

3) $\mathbb{Z}$ ist abzählbar

$\mathbb{N} \underset{\alpha^{-1}}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} \mathbb{Z}$

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{N}$ | $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | … | |
| $\mathbb{Z}$ | $\alpha(n)$ | 0 | 1 | −1 | 2 | −2 | 3 | −3 | … | |

Übg: Finde Formel für $\alpha$ und $\alpha^{-1}$.

3.5.4 Satz: 1) $\mathbb{Q}$ ist abzählbar.

2) $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar.

Insbes gibt es keine bijektive Abb $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$,
"$\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind nicht gleichmächtig."

Bew: 1) Die posit. Elem. von $\mathbb{Q}$ sind (mit Redundanz):

$$
\begin{array}{cccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \\
1/2 & 2/2 & 3/2 & 4/2 & 5/2 & \cdots \\
1/3 & 2/3 & 3/3 & 4/3 & 5/3 & \cdots \\
1/4 & 2/4 & 3/4 & 4/4 & 5/4 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}
$$

Durchlaufe Diagramm in angegeb. Reihenfolge und und streiche ungekürzte Brüche.
Das liefert Abzählung von $\mathbb{Q}_{>0}$:

$$q_1, q_2, q_3, q_4, \ldots$$

Hinzunahme von 0 und den Negativen liefert Abzählung von $\mathbb{Q}$: $0, q_1, -q_1, q_2, -q_2, q_3, -q_3, \ldots$

2) Darstell. v. $a \in \mathbb{R}$: $m, z_1 z_2 z_3 \ldots$,
wobei $m \in \mathbb{Z}$ und $z_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ i-te Nachkommastelle v. a

Indirekter Beweis:

Annahme: $\mathbb{R}$ hat Abzählung

$$
\begin{aligned}
a_1 &= m_1, z_{11}\, z_{12}\, z_{13}\, z_{14} \ldots \\
a_2 &= m_2, z_{21}\, z_{22}\, z_{23}\, z_{24} \ldots \\
a_3 &= m_3, z_{31}\, z_{32}\, z_{33}\, z_{34} \ldots \\
a_4 &= m_4, z_{41}\, z_{42}\, z_{43}\, z_{44} \ldots \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Betrachte folg. Elem $b \in \mathbb{R}$

$$b := 0, b_1 b_2 b_3 \ldots, \quad \text{wobei } b_i := \begin{cases} 1 & \text{falls } z_{ii} \neq 1 \\ 2 & \text{falls } z_{ii} = 1 \end{cases}$$

Dann ist $b_i \neq z_{ii}$, also $b \neq a_i$, für $i = 1, 2, 3, \ldots$
d.h. b kommt nicht unter den $a_1, a_2, a_3, \ldots$ vor.

Dies widerspricht der Annahme, dass $a_1, a_2, a_3, \ldots$ eine Abzählung von $\mathbb{R}$ ist. ✓

# 4 Vollständige Induktion

## 4.1 Die natürlichen Zahlen

Dedekind, Peano (um 1890)

$$\mathbb{N}\,,\ 1\,,\ \nu: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \qquad \text{Nachfolger abb.}$$
$$n \longmapsto \text{"}n+1\text{"}$$

erfüllen folgende Bedingungen : Peano-Axiome

1) $\nu$ ist injektiv und $\underbrace{1 \notin \nu(\mathbb{N}) = \{\nu(n) \mid n \in \mathbb{N}\}}_{\text{"1 ist kein Nachfolger"}}$

2) Induktionsaxiom: Ist $M \subset \mathbb{N}$ eine Teilmenge mit folgenden Eigenschaften:

 a) $1 \in M$

 b) $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} (n \in M \Rightarrow \nu(n) \in M)$ d.h. $M$ ist abgeschlossen unter Nachfolgern.

 so gilt: $M = \mathbb{N}$

MERKE: I) $\mathbb{N}, 1, \nu$ sind dadurch eindeutig bestimmt (bis auf Umbenennung der Elemente)

II) Alle bekannten Aussagen über $\mathbb{N}$ (einschl. $+, \cdot, \leq$) sind aus Peano-Axiomen ableitbar.

## 4.2 Der Induktionsbeweis

4.2.1 Sei $p(n)$ eine Aussageform auf $\mathbb{N}$, d.h. mit Obj.ber. $\mathbb{N}$

(Vollständige) Induktion ist ein Prinzip zum Beweis der Allaussage

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} p(n)$$

Man zeigt:

IA) $p(1)$

IS) $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} (p(n) \Rightarrow p(n+1))$

Dabei heißen:

IA) Induktionsanfang

IS) Induktionsschritt

$p(n)$ Induktionsvoraussetzung (IV)

Wieso ist damit $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} p(n)$ bewiesen?

Betrachte $M := \{n \in \mathbb{N} \mid p(n)\} \subset \mathbb{N}$ Erfüllungsmenge v. $p(n)$

IA) besagt: $1 \in M$

IS) besagt: $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} (n \in M \Rightarrow n+1 \in M)$

Damit erfüllt $M$ die Voraussetz. des Indukt. axioms 4.1.2, und es folgt $M = \mathbb{N}$, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $n \in M$, d.h. "$p(n)$ stimmt".

Anschauliche Begründung.

IS $\longrightarrow$

$$p(1) \overset{w}{\Longrightarrow} p(2) \overset{w}{\Longrightarrow} p(3) \overset{w}{\Longrightarrow} \cdots \overset{w}{\Longrightarrow} p(99) \overset{w}{\Longrightarrow} p(100)$$

IA $\longrightarrow$ w

Das ist ein direkter Beweis von $p(100)$ im Sinne 1.4.2

---

Indukt.bew für $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} p(n)$: $\begin{cases} \text{IA)} & p(1) \\ \text{IS)} & \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} (p(n) \Rightarrow p(n+1)) \end{cases}$

4.2.2 Beisp

1) Beh: $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} 1+2+3+\cdots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$

Bew: mit vollst. Indukt.

IA) $n=1$: $1 = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2$ ✓

IS) Sei $n \in \mathbb{N}$ und es gelte $p(n)$, d.h. $1+2+3+\cdots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$ (IV)

zu zeigen: $p(n+1)$, d.h. $1+2+\cdots+n+(n+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$

$$\begin{aligned} 1+2+\cdots+n+(n+1) &= \underline{(1+2+\cdots+n)}+(n+1) \\ &\overset{\text{IV}}{=} \underline{\tfrac{1}{2}n(n+1)} + (n+1)\cdot\tfrac{2}{2} \\ &= \tfrac{1}{2}(n+1)(n+2) \quad ✓ \end{aligned}$$

2) Summe der ersten $n$ ungeraden Zahlen:

$$1 \xrightarrow{+3} 4 \xrightarrow{+5} 9 \xrightarrow{+7} 16 \xrightarrow{+9} 25$$

Beh: $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} 1+3+\dots+(2n-1) = n^2$

Bew: mit vollst Indukt.

IA) $n=1$: $1 = 1^2$ ✓

IS) Sei $n \in \mathbb{N}$ und es gelte $p(n)$, d.h. $1+3+\dots+(2n-1) = n^2$ (IV)

zu zeigen: $p(n+1)$, d.h. $1+3+\dots+(2n-1)+(2n+1) = (n+1)^2$

$$\underline{1+3+\dots+(2n-1)}+(2n+1) \overset{}{\underset{IV}{=}} \underline{n^2}+2n+1 = (n+1)^2$$ ✓

## 4.2.3 Mögliche Fehlerquellen

1) IA) wird vergessen.

Beisp: $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} n = n+3$

IA) falsch IS) klappt: $n = n+3 \Rightarrow n+1 = (n+1)+3$

2) IS) wird nur für $n > 1$ gemacht.

Beisp: $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} p(n)$

$p(n)$: "In einer Herde mit $n$ Schafen, von denen mind. eines schwarz ist, sind alle Schafe schwarz."

IA) ✓ IS) geht nicht für $n=1$, genauer: Argument auf nächster Seite klappt nur, wenn $n+1 \geq 3$, d.h. $n \geq 2$.

Also:

Lücke

$$\underset{w}{p(1)} \qquad p(2) \overset{w}{\Rightarrow} p(3) \overset{w}{\Rightarrow} p(4) \overset{w}{\Rightarrow} \dots$$

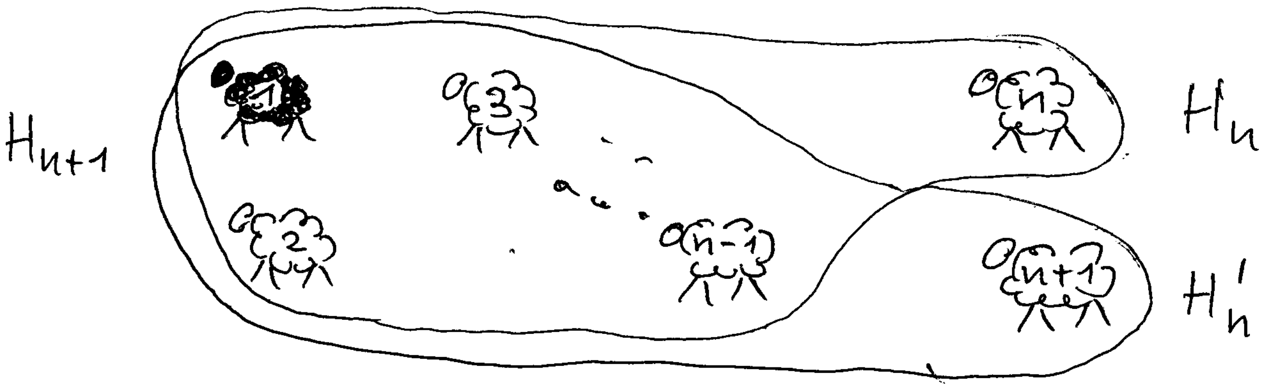
$p(n)$: "In einer Herde mit $n$ Schafen, in der mind. eines schwarz ist, sind alle Schafe schwarz."

<u>Beh</u>: $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} p(n)$

IA) $n=1$:  ✓

IS) sei nun $n \in \mathbb{N}$ und $p(n)$ richtig (IV)

<u>zeigen</u>: $p(n+1)$




IV angewandt auf $H_n$ bzw $H_n'$ liefert:
alle Schafe von $H_n$ bzw $H_n'$ sind schwarz.

$\xRightarrow[H_{n+1} = H_n \cup H_n']{}$ alle Schafe von $H_{n+1}$ sind schwarz.

## 4.3 Summen- und Produktzeichen

Seien $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $m \le n$, und $a_m, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

$$\sum_{i=m}^{n} a_i := a_m + a_{m+1} + \dots + a_n$$

lies: "Summe der $a_i$ für $i = m$ bis $n$"

Manchmal $m > n$: $\sum_{i=m}^{n} a_i =$ "leere Summe" $:= 0$

Rechenregeln: Für $c, a_i, b_i \in \mathbb{R}$ und $r \in \mathbb{Z}$ gilt:

1) $c\left(\sum_{i=m}^{n} a_i\right) = \sum_{i=m}^{n} c a_i$

2) $\sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=m}^{n} b_i = \sum_{i=m}^{n} (a_i + b_i)$

3) $\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m+r}^{n+r} a_{i-r}$ Indextransformation

Beisp zu 3): $m = 3$, $n = 5$, $r = 1$

$$a_3 + a_4 + a_5 = a_{4-1} + a_{5-1} + a_{6-1}$$

Analog: $\prod_{i=m}^{n} a_i := a_m \cdot a_{m+1} \cdot \dots \cdot a_n$

Das "leere Produkt" $(m > n)$ hat den Wert 1. (*)

Beisp: Für $n \in \mathbb{N}_0$

für $n \ge 1$.

$$n! := \prod_{i=1}^{n} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$ n-Fakultät

$$0! := \prod_{i=1}^{0} = 1$$

nach (*).