Wiederholung

Sei $f: A \longrightarrow B$ Abbildung, $f(A) := \{f(x) \mid x \in A\} \subset B$
$\quad x \longmapsto f(x)$

f <u>injektiv</u> $:\Longleftrightarrow \bigwedge_{x,y\in A} (x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y))$

$\Longleftrightarrow \bigwedge_{x,y\in A} (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$

f <u>surjektiv</u> $:\Longleftrightarrow$ Jedes $b \in B$ tritt als Wert von f auf.

$\Longleftrightarrow f(A) = B$

f <u>bijektiv</u> $:\Longleftrightarrow$ f injekt. und surjekt.

3.3 Komposition

3.3.1 <u>Def</u>: Die <u>Komposition</u> zweier Abbildungen $f: A \to B$ und $g: B \to C$ ist die Abbildung

$$g\circ f : A \longrightarrow C \qquad (\text{lies: "}g \text{ nach } f\text{"})$$
$$x \longmapsto (g\circ f)(x) := g(f(x))$$

<u>Beisp</u>:

1)
$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{id_A} & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{id_B} & B \\ x & \longmapsto & x & \longmapsto & f(x) & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

$$f \circ id_A = f = id_B \circ f$$

2) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$\quad f(x) = x+1 \qquad g(x) = x^2$

$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 \neq$ für $x \neq 0$
$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = x^2 + 1$

$\Rightarrow g\circ f \neq f \circ g$

d.h. Komposition von Abb. ist im Allg. nicht kommutativ.

3.3.2 Satz: Für je drei Abb. $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$ gilt:

$$(h\circ(g\circ f))(x) = ((h\circ g)\circ f)(x) \quad \text{für alle } x\in A.$$

d.h. Komposition von Abb. ist assoziativ.

Bew: $(h\circ(g\circ f))(x) = h((g\circ f)(x)) = h(g(f(x)))$

$((h\circ g)\circ f)(x) = (h\circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$ ✓

3.4 Umkehrbare Abbildungen

$x>0,\ x^2 = 7 \Rightarrow x = \sqrt{x^2} = \sqrt{7}$

$e^x = 20 \Rightarrow x = \log(e^x) = \log 20$

3.4.1 Def: Eine Abb. $f: A\to B$ heißt umkehrbar $:\Longleftrightarrow$ es gibt eine Abb. $g: B\to A$ mit

$$g\circ f = id_A \quad \text{und} \quad f\circ g = id_B$$

In diesem Fall heißt g Umkehrabbildung von f und wird mit f^{-1} bezeichnet.

Beisp: $\mathbb{R}_{\geq 0} := \{x\in\mathbb{R} \mid x\geq 0\}$

1) $f:\mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$, $f(x)=x^2$ ist umkehrbar und

$g:\mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$, $g(x)=\sqrt{x}$ ist Umkehrabb. von f

$g\circ f = id$: $\sqrt{x^2} = x$, $f\circ g = id$: $(\sqrt{x})^2 = x$

Frage: Warum hat f den Def.ber. $\mathbb{R}_{\geq 0}$ und nicht $\mathbb{R}$?

Antwort: Für $x<0$ gilt $\sqrt{x^2}\neq x$, z.B. $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 \neq -2$

2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_{>0}$, $f(x) = e^x$ ist umkehrbar mit

$g = \log: \mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{R}$ Umkehrabb. von f.

$g\circ f = id$: $\log(e^x) = x$, $f\circ g = id$: $e^{\log x} = x$

Bemerk: Ist $f: A\to B$ umkehrbar, so hat f nur eine Umkehrabb.

Bew: Wir folgen dem Beweisprinzip für Eindeutigkeitsaussagen:

"Nimm zwei Kandidaten,
und zeige, dass sie gleich sind."

Seie also $g_1: B\to A$, $g_2: B\to A$ zwei Umkehrabb. von f

Dann gilt insbes: $g_1\circ f = id_A$ und $f\circ g_2 = id_B$

$$\Rightarrow g_1 \underset{3.3.1}{=} g_1\circ id_B = g_1\circ(f\circ g_2) \underset{\text{assoz}}{=} (g_1\circ f)\circ g_2 = id_A\circ g_2 \underset{3.3.1}{=} g_2 \quad ✓$$

3.4.2 **Satz**: Sei $f: A \to B$ eine Abb. Dann gilt:

f ist umkehrbar $\iff$ f ist bijektiv

Bew: $\boxed{\text{„}\Rightarrow\text{"}}$ sei f umkehrbar und $g: B \to A$ die Umkehrabb. von f

zeigen: f injektiv

Seien $x, y \in A$ mit $f(x) = f(y)$. zu zeigen: $x = y$

$$f(x) = f(y) \underset{g(?)}{\Longrightarrow} \underbrace{g(f(x))}_{\overset{\shortparallel}{x} \leftarrow \text{analog}} = g(f(y)) = (g \circ f)(y) \underset{\substack{\uparrow \\ g \text{ Umkehrabb. von } f}}{=} id_A(y) = y$$

d.h. $x = y$

zeigen: f surjektiv

Sei $b \in B$. Gesucht: $a \in A$ mit $f(a) = b$

Betrachte $a := g(b) \in A$

$$\Rightarrow f(a) = f(g(b)) = (f \circ g)(b) \underset{\substack{\uparrow \\ g \text{ Umkehrabb. von } f}}{=} id_B(b) = b$$

$\boxed{\text{„}\Leftarrow\text{"}}$ Sei nun f bijektiv

$\Rightarrow$ Für jedes $b \in B$ $\underbrace{\text{gibt es}}_{\uparrow \; f \text{ surj.}}$ $\underbrace{\text{genau ein}}_{\uparrow \; f \text{ injektiv}}$ $a \in A$ mit $f(a) = b$.

Das liefert eine Abbildung $g: B \to A$

$g(b) :=$ das eindeut. bestimmte $a \in A$ mit $f(a) = b$

Zeigen: i) $f \circ g = id_B$, ii) $g \circ f = id_A$

zu i): Sei $b \in B$ belieb.

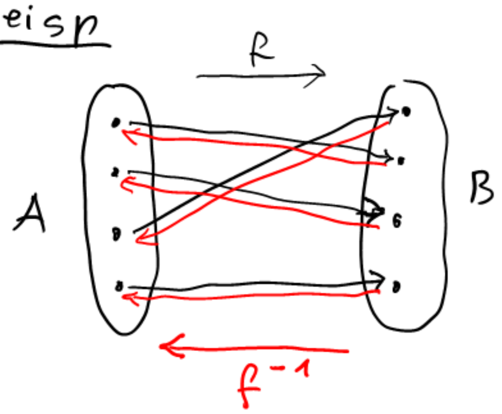
$$(f \circ g)(b) = f(g(b)) = f\left(\begin{matrix}\text{dasjen. } a \in A \\ \text{mit } f(a) = b\end{matrix}\right) = b = id_B(b)$$

zu ii) Sei $a \in A$ belieb.

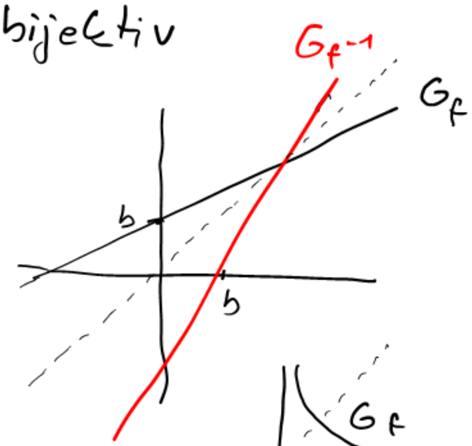
$$(g \circ f)(a) = g(\underbrace{f(a)}_{=:b}) = a = id_A(a)$$

✓

3.4.3 **Beisp**

1) 

2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$, $a\neq 0$, ist bijektiv



Sei $y\in\mathbb{R}$

Für welches $x\in\mathbb{R}$ gilt: $\underline{ax+b} = f(x) = \underline{y}$?

Auflösen nach x liefert: $x=\frac{1}{a}(y-b)$

$\Rightarrow f^{-1}(y)=\frac{1}{a}y-\frac{b}{a}$

3) $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $f(x)=\frac{1}{x}$

ist umkehrbar mit $f^{-1}=f$

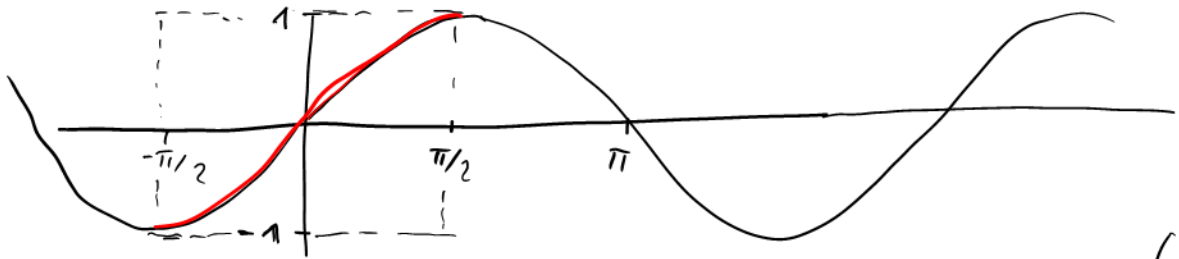
$$\bigwedge_{x\neq 0} f(f(x)) = \frac{1}{1/x} = x$$

4) $f:\mathbb{R}\setminus\{2\}\to\mathbb{R}\setminus\{1\}$, $f(x)=\frac{x}{x-2}$

Beisp 3.2.3 zeigt: f ist bijektiv mit

$f^{-1}:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}\setminus\{2\}$, $f^{-1}(y)=\frac{2y}{y-1}$

5) $\sin:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ weder inj. noch surj.



$A:=[-\pi/2,\pi/2]$, $B:=[-1,1]$

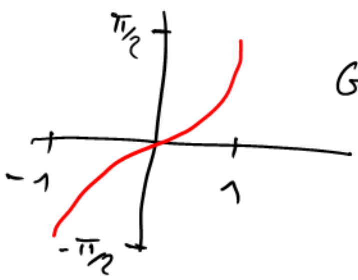
$\Rightarrow f=\sin|_A : A\to B$ bijektiv

$(\sin^{-1}=)\ \arcsin = f^{-1}: B\to A$ Umkehrabb.

($f: D\to B$, $A\subset D$

$f|_A: A\to B$

Einschränk. v. f auf A)



Graph von arcsin.

3.4.4 <u>Satz</u>: Seien $f: A \to B$, $g: B \to C$ umkehrbare Abb.
Dann gilt:

1) $f^{-1}: B \to A$ ist umkehrbar mit $(f^{-1})^{-1} = f$
2) $g \circ f: A \to C$ " " mit $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

<u>Bew</u>: 1) zu zeigen: $f \circ f^{-1} = id_B$ und $f^{-1} \circ f = id_A$
Beide Gleichungen stimmen, da f^{-1} die Umkehrabb. von f ist.

2) <u>zu zeigen</u> $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = id_A$ und $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = id_C$

$$(\underline{f}^{-1} \circ \underline{g}^{-1}) \circ (\underline{g \circ f}) \underset{\text{ass}}{\overset{\uparrow}{=}} f^{-1} \circ (\underline{g}^{-1} \circ (\underline{g} \circ \underline{f})) = f^{-1} \circ ((g^{-1} \circ g) \circ f)$$

$$\underset{g \text{ umkehrb.}}{=} f^{-1} \circ (id_B \circ f) \underset{3.3.1}{\overset{\uparrow}{=}} f^{-1} \circ f \underset{f \text{ umkehrbar}}{\overset{\uparrow}{=}} id_A$$

zweite Gleichung: analog ✓

<u>Beisp</u>:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}_{\geq 0} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}_{\geq 0} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}_{\geq 1} \\ x & \longmapsto & x^2, x & \longmapsto & e^x \end{array}$$

sind beide bijektiv also umkehrbar.

$\Rightarrow h = g \circ f: \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 1}$, $h(x) = g(f(x)) = e^{x^2}$
ist umkehrbar mit Umkehrabb.

$h^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}: \mathbb{R}_{\geq 1} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$,

$$h^{-1}(y) = f^{-1}(g^{-1}(y)) = \sqrt{\log y}$$