3 Abbildungen

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \ f(x) = x^2 + 2x + 3$

$\sqrt{\ }: \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \ \sqrt{x}$ = posit. Lösung von $y^2 = x$

(y = Unbekannte)

Def.ber. Werteber.

Jedem $x \in$ Def.ber. wird durch die Funktion genau ein Elem. aus Werteber. zugeordnet.

3.1 Grundbegriffe

3.1.1 Def: Seien A, B nicht leere Mengen

Eine Abbildung f von A nach B ist eine Vorschrift, die jedem Elem. $x \in A$ genau ein Elem. $f(x) \in B$ zuordnet; dieses $f(x)$ heißt Wert von f bei x oder Bild von x unter f

Notation: $f: A \longrightarrow B$
$\quad\quad x \longmapsto f(x)$

A heißt Definitionsbereich von f

B " Wertebereich v. f

$f(A) := \{f(x) \mid x \in A\} \subset B$ Bildmenge von f

Zwei Abb. $f: A \to B$ und $g: C \to D$ heißen gleich, wenn gilt:

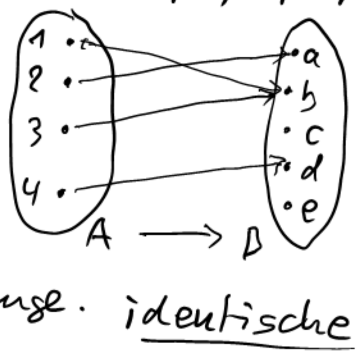
$$A = C \wedge B = D \wedge \bigwedge_{x \in A} f(x) = g(x)$$

Bemerk: Abbildungen $f: A \to \mathbb{R}$ nennt man auch "Funktionen".

3.1.2 Beispiele

1) $A = \{1, 2, 3, 4\}, \quad B = \{a, b, c, d, e\}$

$f: A \longrightarrow B$
$1 \longmapsto b$
$2 \longmapsto a$
$3 \longmapsto b$
$4 \longmapsto d$



Wertetafel

x	1	2	3	4
$f(x)$	b	a	b	d

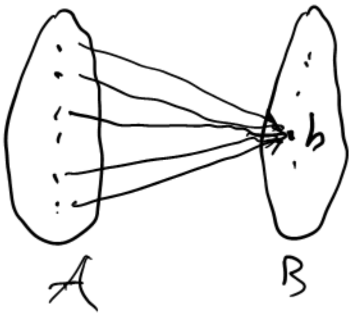
$f(A) = \{a, b, d\}$

2) Sei A belieb. Menge. identische Abb.

$id_A: A \longrightarrow A$
$\quad\quad x \longmapsto x$

Sei $b \in B$ festes Elem.

$f: A \longrightarrow B$ Konstante Abb
$\quad x \longmapsto b$ mit Wert b



3) $\sin: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad \log: \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}$

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \dfrac{x^2 + \cos x}{2 + e^x}$

4) $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto x+y$, $\quad \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto x \cdot y$

Für Menge M: $\quad \cap : \mathrm{Pot}(M) \times \mathrm{Pot}(M) \longrightarrow \mathrm{Pot}(M)$, $(A,B) \longmapsto A \cap B$

5) Sei $M := \{$alle Menschen$\}$

$a: M \longrightarrow \mathbb{N}_0$, $\quad a(x) =$ Alter von x

$e: M \longrightarrow M \times M$, $\quad e(x) = ($Mutter von x, Vater von $x)$

$v: M \longrightarrow \mathrm{Pot}(M)$, $\quad v(x) = \{$alle Vorfahren von $x\}$

6) <u>keine Abb.</u>:

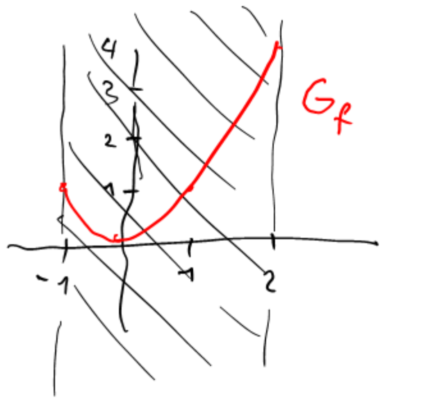
$o: M \longrightarrow M$, $\quad o(x) =$ Onkel von x, existiert nicht oder uneindeut.

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad f(x) = \sqrt{x}$, nicht definier für $x < 0$

$g: \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$, $\quad g(x) = \log_{10} x$, $\quad \log_{10}(1) = 0 \notin \mathbb{R}_{>0}$

3.1.3 <u>Def</u>: Der <u>Graph</u> einer Abbildung $f: A \longrightarrow B$ ist folgende Teilmenge von $A \times B$

$$G_f := \{ (x, f(x)) \mid x \in A \}$$

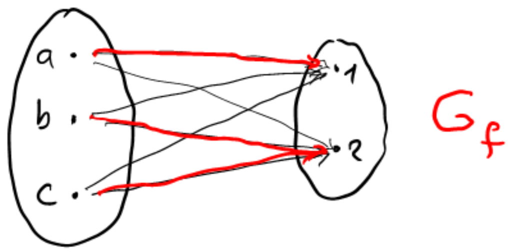


<u>Beisp</u> 1) $f: [-1, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$

2) $f: \{a, b, c\} \longrightarrow \{1, 2\}$

$a \longmapsto 1$
$b \longmapsto 2$
$c \longmapsto 2$

$G_f = \{ (a,1), (b,2), (c,2) \}$



3.1.4 Wie man den Abbildungsbegriff mengentheor. fasst

Satz: Sei $f: A \longrightarrow B$ eine Abb. und $G := G_f$

Dann gilt:

1) $G \subset A \times B$ und G hat folg. Eigenschaft:

 (*) zu jedem $x \in A$ gibt es genau ein $y \in B$ mit $(x,y) \in G$

2) f ist durch G_f eindeutig bestimmt.

Fazit: Eine Abb. $f: A \longrightarrow B$ kann man beschrieben durch ein Tripel (A, B, G)

wobei $\begin{cases} A, B \text{ Mengen} \neq \emptyset \\ G \subset A \times B, \text{ und } G \text{ hat Eigenschaft } (*) \end{cases}$

Beisp: $A = \{1,2,3,4\}$ $B = \{a,b,c,d,e\}$

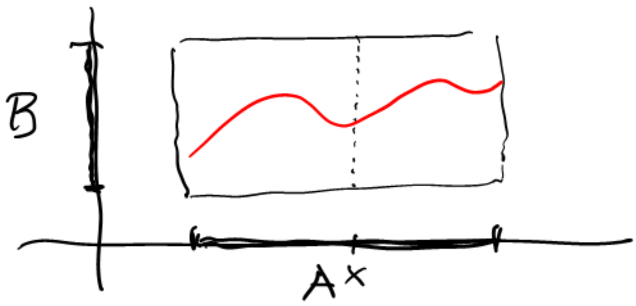
$G = \{(1,b), (2,a), (3,b), (4,d)\}$

Nachprüfen: G erfüllt (*)

Die zugehör. Abb. $f: A \longrightarrow B$ hat die Wertetafel

x	1	2	3	4
$f(x)$	b	a	b	d

Bemerk: Für $A, B \subset \mathbb{R}$ und $G \subset A \times B \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ besagt (*): Für jedes $x \in A$ schneidet die Vertikale durch x die Menge G in genau einem Punkt.



3.2 In- / Sur- / Bijektiv

3.2.1 Def: Sei $f: A \longrightarrow B$ Abbildung

f injektiv $:\Longleftrightarrow \bigwedge_{x,y\in A} (x \neq y \Longrightarrow f(x) \neq f(y))$

f surjektiv $:\Longleftrightarrow$ Jedes $b \in B$ tritt als Wert von f auf, d.h. $\bigwedge_{b\in B} \bigvee_{x \in A} f(x) = b$

f bijektiv $:\Longleftrightarrow$ f injektiv und surjektiv

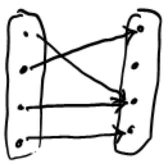
Bemerk

1) f inj. $\Longleftrightarrow \bigwedge_{x,y\in A} (f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y)$
2) f surj $\Longleftrightarrow f(A) = B$ $\quad (f(A) = \{f(x) \mid x \in A\})$

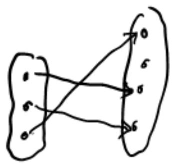
1) Kontrapos.
2) f surj. $\Longleftrightarrow \bigwedge_{b \in B} b \in f(A)$, d.h. $B \subset f(A)$
$\Longleftrightarrow B = f(A)$ (da $f(A) \subset B$)

3.2.2 Beispiele

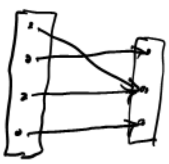
1)



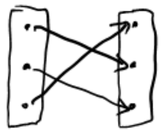
nicht inj
nicht surj



injek.
nicht surj



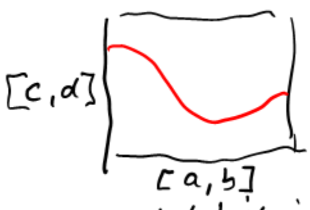
nicht inj
surj



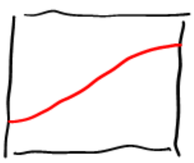
bijekt.

Merke: f inj/surj $\Longleftrightarrow$ in jedem $b \in B$ endet höchst/mind. ein Pfeil

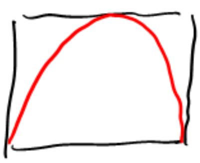
2) $f: [a,b] \longrightarrow [c,d]$ mit Graph G_f (4 Beisp)



nicht inj
nicht surj



inj.
nicht surj



nicht inj
surj

bijektiv

Merke: f inj/surj $\Longleftrightarrow$ Jede horizontale Gerade schneidet G_f in höchst/mind. einem Pkt.

3) Vater : {alle Menschen} $\longrightarrow$ {alle Männer} nicht inj. wegen Geschwister, nicht surj! kinderlos

Matr.Nr : {alle FU-Stud.} $\longrightarrow \mathbb{N}$ injekt, nicht surj

Geb. Monat : {alle Menschen} $\longrightarrow$ {Jan, ..., Dez} nicht inj, surj.

Ausverkaufte Theatervorstellung:

Platz : {alle Th. Besucher} $\longrightarrow$ {alle Plätze im Th.} bijekt.

3.2.3 Rechenbeisp: $f : \mathbb{R}\setminus\{2\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x-2}$

f inj.? : $\bigwedge_{x,y \neq 2} \left(f(x) = f(y) \overset{?}{\Longrightarrow} x = y \right)$

Seien also $x, y \neq 2$ mit $f(x) = f(y)$

$$\frac{x}{x-2} = \frac{y}{y-2} \Rightarrow x(y-2) = (x-2)y$$
$$\Rightarrow xy - 2x = xy - 2y$$
$$\Rightarrow -2x = -2y \Rightarrow x = y$$

Also ist f injektiv.

f surj.? Gegeben: $b \in \mathbb{R}$

Gesucht: $x \neq 2$ mit $b = f(x) = \frac{x}{x-2}$ (*)

$$(*) \underset{x\neq 2}{\Longleftrightarrow} \underbrace{b(x-2)}_{bx-2b} = x$$
$$\Longleftrightarrow \underbrace{bx - x}_{(b-1)x} = 2b \qquad (**)$$

Für $b = 1$ ist $b-1 = 0$ und die Gleichg. "$0 \cdot x = \underbrace{2b}_{2}$" nicht lösbar

d.h. es gibt kein $x \neq 2$ mit $f(x) = 1 = b$.

$\Rightarrow$ f nicht surjektiv.

Für $b \neq 1$ ist (**) lösbar durch $x = \frac{2b}{b-1}$

$\Rightarrow$ Bildmenge von $f = f(\mathbb{R}\setminus\{2\}) = \mathbb{R}\setminus\{1\}$

Folgerung: Die Abb. $g : \mathbb{R}\setminus\{2\} \longrightarrow \mathbb{R}\setminus\{1\}$, $g(x) = \frac{x}{x-2}$ ist bijektiv.