$$\left(A \subset B \iff \bigwedge_x (x \in A \Rightarrow x \in B) \right)$$

4) $A = \{\mathbb{N}, 1, 2, 3, \ldots\} \Rightarrow \mathbb{N} \in A, \mathbb{N} \subset A$

$B = \{\mathbb{N}, 2, 3, 4, \ldots\} \Rightarrow \mathbb{N} \in B, \mathbb{N} \not\subset B$

$C = \{\mathbb{Z}, 1, 2, 3, \ldots\} \Rightarrow \mathbb{Z} \in C, \mathbb{Z} \not\subset C, \mathbb{N} \notin C, \mathbb{N} \subset C$

<u>Wiederholung</u>

$B = \{2, 4, 6\} \qquad 2, 4, 6 \in B, \quad 8 \notin B$

$A \subset B :\iff$ Jedes Element $x \in A$ gehört zu B

$\iff \bigwedge_x (x \in A \Rightarrow x \in B)$

z.B. $\{2, 4\} \subset B, \quad \{2, 8\} \not\subset B$

2.2.2 <u>Satz</u>: Seien A, B, C Mengen. Dann gilt:

1) $A = B \iff A \subset B \wedge B \subset A$

2) $A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$ Transitivität von $\subset$

<u>Bew</u>: 1)

$A = B \overset{\text{Def}}{\iff}$ A und B haben die gleichen Elementen

$$\iff \underbrace{\text{alle } x \in A \text{ gehören zu } B}_{\Updownarrow \text{ Def} \atop A \subset B} \text{ und } \underbrace{\text{alle } x \in B \text{ gehoren zu } A}_{\Updownarrow \text{ Def} \atop B \subset A}$$

2) Sei $A \subset B$ und $B \subset C$.

Dann gehört jedes $x \in A$ zu B (wegen $A \subset B$)

und dann zu C (wegen $B \subset C$)

Also gilt: $A \subset C$ ✓

<u>MERKE</u>: Zum Beweis von $A = B$ reicht es zu zeigen:

$A \subset B$ und $B \subset A$ (doppelte Inclusion)

2.2.3 <u>Def</u>: Sei M eine Menge und

$p(x)$ Aussageform mit Obj. ber. M

Dann heißt

$\{x \in M \mid p(x)\} :=$ Menge aller $x \in M$, für die $p(x)$ stimmt

die <u>Erfüllungsmenge</u> von $p(x)$.

<u>Beisp</u>

1) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 7\} =: [2,7]$ abgeschlossenes Intervall

$\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ teilt } 12\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

$\{x \in \mathbb{Z} \mid 5 - x^2 \geq 0\} = \{-2, -1, 0, 1, 2\} = [-\sqrt{5}, \sqrt{5}] \cap \mathbb{Z}$

$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0\} = \emptyset$

2) Sei $M = \{$alle Funktionen $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$

$A = \{f \in M \mid f(\pi) = 0\}$

z.B. $f = \sin \in A$

2.3 Mengenoperationen

2.3.1 <u>Def</u>: Seien A, B Teilmengen einer Menge M

$A\cap B := \{x\in M \mid x\in A \wedge x\in B\}$ <u>Durchschnitt</u> von A und B

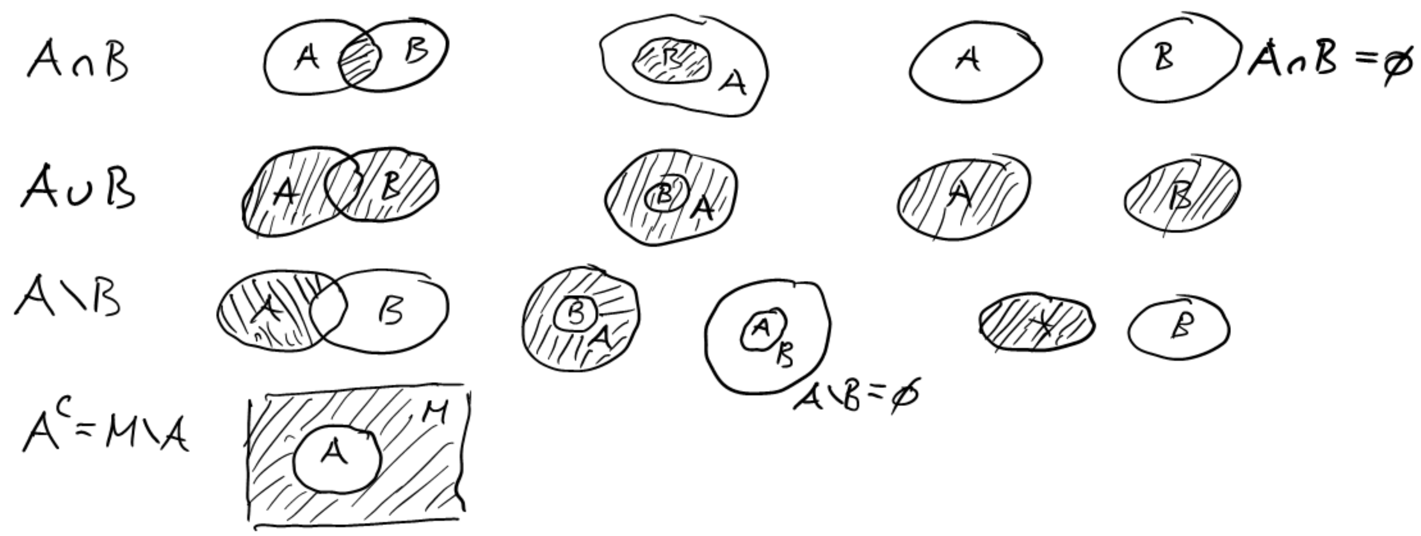
$A\cup B := \{x\in M \mid x\in A \vee x\in B\}$ <u>Vereinigung</u> " "

$A\setminus B := \{x\in M \mid x\in A \wedge x\notin B\}$ <u>Differenz</u> A <u>minus</u> B

$A^c := M\setminus A = \{x\in M \mid x\notin A\}$ <u>Komplement</u> von A in M

Ist $A\cap B=\emptyset$, so heißen A und B <u>disjunkt</u>.

Illustration (durch Venn-Diagramme)

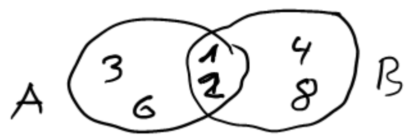


<u>Beisp</u>: 1) $A=\{1,2,3,6\}$, $B=\{1,2,4,8\}$, $M=\mathbb{N}$

$A\cap B = \{1,2\}$

$A\cup B = \{1,2,3,4,6,8\}$

$A\setminus B = \{3,6\}$



$A^c = \mathbb{N}\setminus A = \{4,5,7,8,\dots\} = \{n\in\mathbb{N} \mid n\in\{4,5\} \vee n\geq 7\}$

$= \{4,5\}\cup\{n\in\mathbb{N} \mid n\geq 7\}$ $\cancel{1}\ \cancel{2}\ \cancel{3}\ 4\ 5\ \cancel{6}\ 7\ 8\ 9 \dots$

2) $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N}\cup\{0\}$

3) $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ = Menge der irrationalen Zahlen

4) $A\subset M \Rightarrow M = A\cup \underbrace{M\setminus A}_{A^c}$ und $A\cap A^c=\emptyset$

(Übg)

2.3.2 Satz: Seien A, B, C Teilm. einer Menge M. Dann gilt:

a) $A \cap B = B \cap A$ — Kommutativ Ges.

b) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ — Assoziativ Ges.

c) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ — Distributiv Ges.

d) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ — De Morgan Regel

a') – d') analog mit $\cap, \cup$ vertauscht

e) $(A^c)^c = A$ — dopp. Komplement

f) $A \subset B \iff B^c \subset A^c$ — Inclusionsumkehr

Bew: Reduktion auf entsprechende Aussage in 1.3

d) Sei $x \in M$ belieb. Zeigen: $x \in (A \cap B)^c \iff x \in A^c \cup B^c$

$$x \in (A \cap B)^c \underset{\text{Def}(\,)^c}{\iff} x \notin A \cap B \underset{\text{Def} \notin}{\iff} \neg(x \in A \cap B) \underset{\text{Def} \cap}{\iff} \neg(x \in A \wedge x \in B)$$

$$\underset{\substack{\text{De Morgan}\\ 1.3\,d)}}{\iff} \neg(x \in A) \vee \neg(x \in B) \underset{\text{Def} \notin}{\iff} \underline{x \notin A} \vee \underline{x \notin B}$$

$$\underset{\text{Def}(\,)^c}{\iff} \underline{x \in A^c} \vee \underline{x \in B^c} \underset{\text{Def} \cup}{\iff} x \in A^c \cup B^c$$

f) $$A \subset B \iff \bigwedge_{x \in M} (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

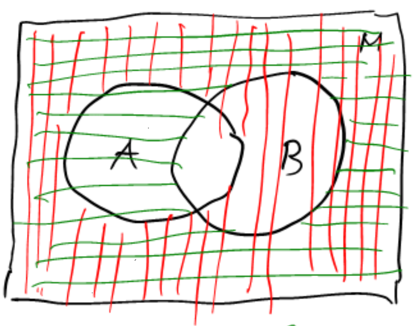
$\Updownarrow$ Kontraposition

$$\iff \bigwedge_{x \in M} (x \notin B \Rightarrow x \notin A)$$

$$\iff \bigwedge_{x \in M} (x \in B^c \Rightarrow x \in A^c)$$

$$\iff B^c \subset A^c \qquad \checkmark$$

Illustration zu d)



$A^c = |||$ $\quad B^c = \equiv$

$$A^c \cup B^c = \text{"farbig"} = (\underbrace{\text{"weiß"}}_{A \cap B})^c$$

2.4 Zwei weitere Konstruktionen

2.4.1 Def: Sei A eine Menge

Dann heißt die Menge aller Teilmengen von A

$$\mathrm{Pot}(A) := \{ B \mid B \subset A \}$$

die Potenzmenge von A.

Beisp

$\mathrm{Pot}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

$\mathrm{Pot}(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}$

$\mathrm{Pot}(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

$\mathrm{Pot}(\{1,2,3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

später: $\mathrm{Pot}(\{1,\ldots,n\})$ hat genau 2^n Elemente

2.4.2 Def: Das kartesische Produkt von zwei Mengen A, B ist folg. Menge:

$$A \times B := \{ (a,b) \mid a \in A,\ b \in B \}$$

Die Elemente (a,b) heißen geordnete Paare mit 1. Komponente a und 2. Kompon. b

Gleichheit von geord. Paaren ist wie folgt definiert:

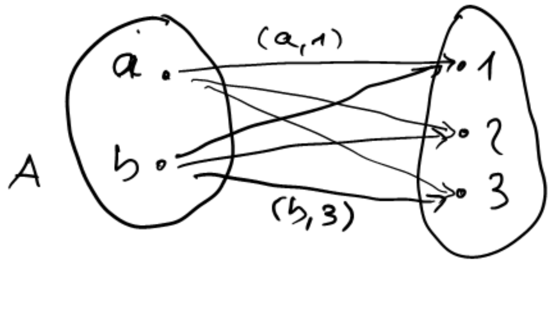
$$(a,b) = (a',b') :\Longleftrightarrow a = a' \wedge b = b'$$

Achtung: Für $A = B$ und $a, b \in A$ mit $a \neq b$ gilt:

$$(a,b) \neq (b,a) \quad \text{aber} \quad \{a,b\} = \{b,a\}$$

Beisp 1) $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2, 3\}$

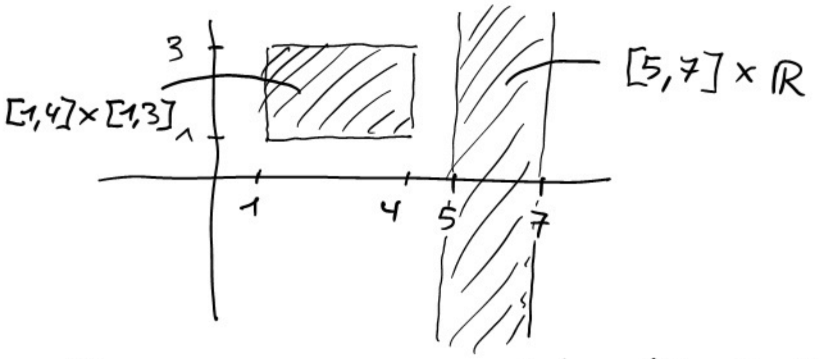
$$A \times B = \{(a,1), (a,2), (a,3), (b,1), (b,2), (b,3)\}$$

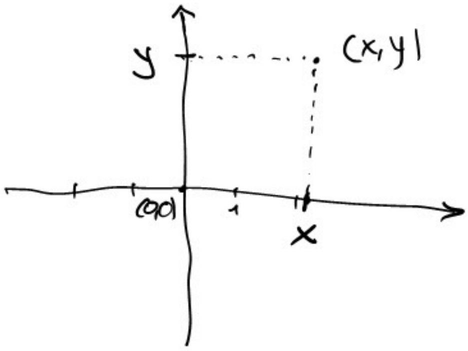


Pfeil-Diagramm

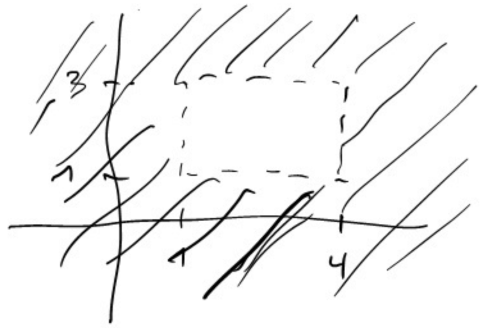
2) $A = B = \mathbb{R}$

$\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{ (x,y) \mid x,y \in \mathbb{R} \}$

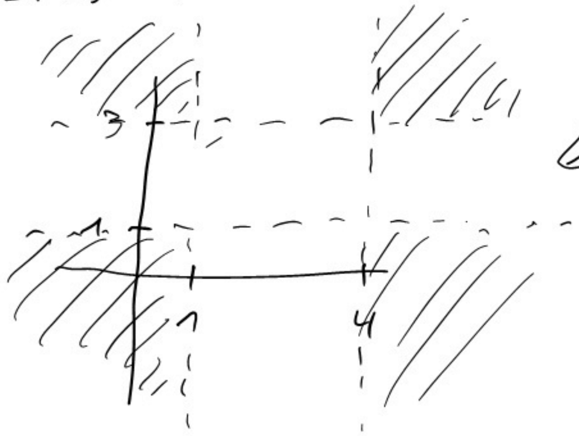




Frage: Wie sieht $(\mathbb{R} \setminus [1,4]) \times (\mathbb{R} \setminus [1,3])$ aus?



$\mathbb{R}^2 \setminus ([1,4] \times [1,3])$



das hier