1.5.2 <u>Def</u>: Sei $p(x)$ Aussageform in einer Var. x mit Objektbereich D

<u>Allaussage</u>

$\bigwedge_{x \in D} p(x) :=$ "Für alle (jede) x aus D ist $p(x)$ wahr"

(Alternativnotation: $\forall x \in D : p(x)$)

<u>Existenzaussage</u>:

$\bigvee_{x \in D} p(x) :=$ "Es gibt mindest. ein x aus D mit $p(x)$ wahr"
Für mind. ein x aus D ist $p(x)$ wahr.

(Alternativnotation: $\exists x \in D : p(x)$)

$\bigwedge, \forall$ heißen <u>Allquantoren</u>, und $\bigvee, \exists$ <u>Existenzquantoren</u>

<u>Beisp</u>

1) $\bigvee_{x \in \mathbb{N}} 2 + x = 5$ (w) $\qquad \bigwedge_{x \in \mathbb{N}} 2 + x = 5$ (f)

2) $\bigvee_{x \in D} 5 + x = 2$ < (w) für $D = \mathbb{Z}$ / (f) für $D = \mathbb{N}$

d.h. Wahrheitswert hängt von $p(x)$ <u>und</u> von D ab.

3) $\sqrt{2}$ ist irrational $\Longleftrightarrow \neg\left(\bigvee_{m,n \in \mathbb{N}} \sqrt{2} = \frac{m}{n}\right)$

1.5.3 <u>Satz</u>: 1) $\neg\left(\bigwedge_{x \in D} p(x)\right) \Longleftrightarrow \bigvee_{x \in D} \neg p(x)$

2) $\neg\left(\bigvee_{x \in D} p(x)\right) \Longleftrightarrow \bigwedge_{x \in D} \neg p(x)$

<u>Bemerk</u>: Satz ist Verallgemein. von der De Morgan Regel.

$$\left(\begin{array}{c} \neg(p_1 \wedge p_2) \Longleftrightarrow \neg p_1 \vee \neg p_2 \\ \neg(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \Longleftrightarrow \neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3 \end{array}\right)$$

da $\bigwedge_{x \in D} p(x)$ lesbar als "und-Verknüpf" der $p(x)$, $x \in D$

$\bigvee_{x \in D} p(x)$ " " "oder-Verknupf" der $p(x)$, $x \in D$

<u>Beisp</u>: 1) $\neg$(alle Menschen sind sterblich)

$\Longleftrightarrow$ es gibt mind. einen Menschen, der unsterblich ist

2) $\neg\left(\bigvee_{x \in \mathbb{R}} x^2 + x + 1 = 0\right) \Longleftrightarrow \bigwedge_{x \in \mathbb{R}} x^2 + x + 1 \neq 0$

3) $M :=$ Gesamtheit aller geraden Zahlen > 2
$\mathbb{P} =$ Gesamtheit aller Primzahlen.

Goldbach Vermut: $\bigwedge\limits_{a \in M} \bigvee\limits_{p_1, p_2 \in \mathbb{P}} a = p_1 + p_2$

Verneinung v. G.V $\Leftrightarrow \bigvee\limits_{a \in M} \neg (\underbrace{\bigvee\limits_{p_1, p_2 \in \mathbb{P}} a = p_1 + p_2)}_{\text{a ist nicht Summe zweier Primzahlen}}$

$\Leftrightarrow \bigvee\limits_{a \in M} \bigwedge\limits_{p_1, p_2 \in \mathbb{P}} a \neq p_1 + p_2$

4) Allgem. gilt für Aussageform $p(x,y,z)$ in x,y,z

$$\neg \left(\bigwedge_x \bigvee_y \bigwedge_z p(x,y,z) \right) \Longleftrightarrow \bigvee_x \bigwedge_y \bigvee_z \neg p(x,y,z)$$

1.5.4 Vertauschbarkeit der Reihenfolge von Quantoren

Merke: benachbarte Quantoren gleichen Typ darf man tauschen

Außerdem gilt: $\bigvee\limits_x \bigwedge\limits_y p(x,y) \Longrightarrow \bigwedge\limits_y \bigvee\limits_x p(x,y)$

Achtung: Die Umkehrung gilt im Allgem. nicht.

Beisp: $p(x,y) :=$ "x ist Vater von y", $D_x = D_y =$ Menschheit

$$\bigvee_x \bigwedge_y p(x,y) \quad \cancel{\Longleftarrow} \quad \bigwedge_y \bigvee_x p(x,y)$$

(f) Es gibt einen Vater aller Menschen

Jeder Mensch hat einen Vater. (w)

2. Elementare Mengenlehre

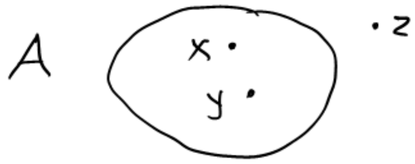
Grundlegend für die Mathematik:
Zermelo-Fraenkel-Axiomensystem (1907-1930)

2.1 Der Begriff der Menge (Cantor (1845-1918))

Def: Eine Menge A ist eine Zusammenfassung bestimmter Objekte zu einem Ganzen.
die zus. gefassten Obj. heißen die Elemente von A.

$x \in A$ bedeutet "x ist Element von A"
(gehört zu / liegt in)

$x \notin A$ bedeutet $\neg(x \in A)$ "x liegt nicht in A"



$x, y \in A$
$z \notin A$

Def: Seien A, B Mengen.
$A = B :\Longleftrightarrow$ A und B haben die gleichen Elemente.

Folgerung: Eine Menge ist durch Angabe ihrer Elemente eindeutig bestimmt, z.B. durch Aufzählen, wobei es auf die Reihenfolge nicht ankommt.

Notation: $\{a, b, c, \dots, z\}$ bezeichnet die Menge mit den Elementen $a, b, c, \dots, z$.

Beisp

1) $\{1, \pi, -4\} = \{\pi, -4, 1\} = \{1, -4, 1, \pi, 1, \pi\}$
{Vornamen der Brückenkursteiln.}

2) $\emptyset := \{\ \}$ leere Menge, enthält kein Element

3) $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{Z} := \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ " " ganzen Zahlen
$A = \{1, 4, 9, \dots, n^2, \dots\}$ " " Quadratzahlen
$=: \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$ (lies: Menge aller n^2, wobei $n \in \mathbb{N}$
(für die gilt: $n \in \mathbb{N}$))
$\mathbb{Q} := \{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ Menge der rationalen Zahlen
(Redundanzen, z.B. $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{k}{3k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$)

$\mathbb{R} := \{$unendl. Dezimalzahlen$\}$ Menge d. <u>reellen</u> Zahlen

z.B. $\pi = 3{,}14159\ldots$ $\quad 17{,}20808\ldots = 17{,}2\overline{08}$

$1 := 1{,}000\ldots = 0{,}\overline{9}$

4) $\{\mathbb{N}\}$ hat genau ein Element, nämlich $\mathbb{N}$

$\{\mathbb{N}, \{\mathbb{N}\}\}$ hat genau zwei Elem., nämlich $\mathbb{N}$, $\{\mathbb{N}\}$

$\{\pi, \emptyset,$ Bundeskanzlerin$\}$ hat genau drei Elemente

$\{\mathbb{N}, 1, 2, 3, \ldots\} = \{1, 2, \mathbb{N}, 4, 5, 3, 6, 7, 8, 9, \ldots\}$

5) $A = \{$ alle Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$

Menge aller Funktionen f von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$

2.2 <u>Teilmengen</u>

2.2.1 <u>Def</u>: Seien A, B Mengen.

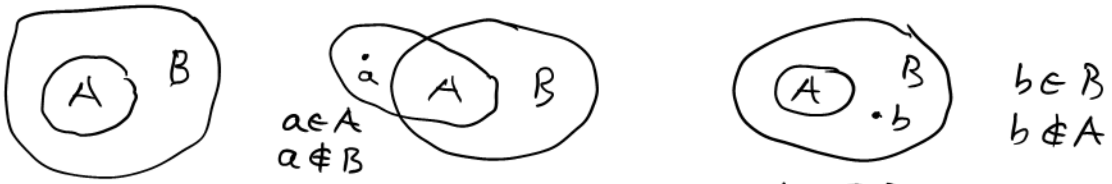
A heißt <u>Teilmenge</u> von B (Notation: $A \subset B$) $:\Leftrightarrow$

Jedes Element von A gehört zu B, d.h. $\bigwedge_{x \in A} x \in B$

$A \not\subset B :\Leftrightarrow \neg(A \subset B) \Leftrightarrow \bigvee_{x \in A} x \notin B$

d.h. A enthält ein Elem., das nicht zu B gehört.

$A \subsetneqq B :\Leftrightarrow A \subset B \wedge A \neq B$ $\quad A$ <u>echte Teilmenge</u> von B



$A \subset B$ $\qquad A \not\subset B$ $\qquad A \subsetneqq B$

<u>Beisp</u>: 1) $A = \{2,4\}$, $B = \{2,3,4\}$, $C = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Dann gilt: $A \subset B$, $B \not\subset A$, $A \subset C$, $C \not\subset A$, $B \not\subset C$, $C \not\subset B$

und B hat folgende Teilmenge:

$\emptyset$, $\{2\}, \{3\}, \{4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{2,3,4\}$

2) $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ bei geeigneter Identifizierung

3) Für jede Menge A gilt: $\emptyset \subset A$, $A \subset A$

<u>zu $\emptyset \subset A$</u>: Indirekter Beweis.

<u>Annahme</u>: $\emptyset \not\subset A$. Dann gilt $\bigvee_{x \in \emptyset} x \notin A$ Wid zu „$\emptyset$ hat kein Elem."

$$\left(A \subset B \iff \bigwedge_x (x \in A \Rightarrow x \in B) \right)$$

4) $A = \{\mathbb{N}, 1, 2, 3, \ldots\} \Rightarrow \mathbb{N} \in A,\ \mathbb{N} \subset A$

$B = \{\mathbb{N}, 2, 3, 4, \ldots\} \Rightarrow \mathbb{N} \in B,\ \mathbb{N} \not\subset B$

$C = \{\mathbb{Z}, 1, 2, 3, \ldots\} \Rightarrow \mathbb{Z} \in C,\ \mathbb{Z} \not\subset C,\ \mathbb{N} \notin C,\ \mathbb{N} \subset C$