Wiederholung

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w

Wichtige Tautologien 1.3

f) $(p \Leftrightarrow q) \Longleftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ Aufspalt. v. $\Leftrightarrow$

g) $(p \Rightarrow q) \Longleftrightarrow \neg p \vee q$

h) $(p \Rightarrow q) \Longleftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ Kontraposition

j) $(p \underset{\Leftrightarrow}{\Rightarrow} q) \wedge (q \underset{\Leftrightarrow}{\Rightarrow} r) \Longrightarrow (p \underset{\Leftrightarrow}{\Rightarrow} r)$ Transitivität v. $\underset{\Leftrightarrow}{\Rightarrow}$

Zur Sprechweise: "q ist notwend. für p" für $p \Rightarrow q$

$\underbrace{\text{"Ina ist mind. 18 J."}}_{q}$ ist notwend. für "Ina $\underbrace{\text{darf wählen"}}_{p}$

bedeutet "wenn nicht q, dann nicht p"

d.h. $\neg q \Rightarrow \neg p$

das ist Kontrapos. von $p \Rightarrow q$

Sprechw. für $p \Leftrightarrow q$: "p ist notw. und hinreich. für q"

1.4 Beweisprinzipien

(math) Satz = wahre Aussage

Beweis v. Satz. = Nachweis der Wahrheit

1.4.1 Abtrennregel: Sind p und $p \Rightarrow q$ wahre Aussagen, so ist auch q wahr.

Blick in Wahrheitstafel

p	q	$p \Rightarrow q$
w	w	w
w	f	f

Beisp: es regnet $\Rightarrow$ Straße ist nass
$\underbrace{\overset{w}{\text{es regnet}} \overset{w}{\Rightarrow} \overset{w}{\text{Straße ist nass}}}$

Achtung: ohne "p wahr" kann man aus "$p \Rightarrow q$ wahr" nicht auf "q wahr" schließen.

Notation: $p_1 \Rightarrow p_2 \Rightarrow p_3 \Rightarrow p_4$ bedeute
$p_1 \Rightarrow p_2$, $p_2 \Rightarrow p_3$, $p_3 \Rightarrow p_4$

Analog $p_1 \Leftrightarrow p_2 \Leftrightarrow p_3 \Leftrightarrow p_4$

1.4.2 Direkter Beweis einer Aussage q

Prinzip: Finde Folge von wahren Implikationen

$$p \overset{w}{\Rightarrow} p_1 \overset{w}{\Rightarrow} p_2 \overset{w}{\Rightarrow} \dots \overset{w}{\Rightarrow} p_s \overset{w}{\Rightarrow} q$$

wobei p wahr ist

Dann liefert sukzessives Anwend. der Abtrennregel die Wahrheit $p_1, p_2, \dots, p_s, q$.

Beisp: $a := 0,999\dots$
$1 = 1,000\dots$

Behaupt: $a = 1$

Beweis: $a = 0,999\dots$ $\quad p$
$\Rightarrow 10a = 9,999\dots$ $\quad p_1$
$\Rightarrow 10a = 9 + 0,999\dots$ $\quad p_2$
$\Rightarrow 10a = 9 + a$ $\quad p_3$
$\Rightarrow 9a = 9$ $\quad p_4$
$\Rightarrow a = 1$ $\quad q$ ✓

1.4.3 Prinzip: Äquivalente Umformung von Teilaussagen.

<u>Satz</u>: Für je zwei Aussagen p, q gilt:

$$\neg(p \Rightarrow q) \iff p \wedge \neg q$$

<u>Beweis</u>:
$$\neg(p \Rightarrow q) \underset{1.3,g)}{\iff} \neg(\neg p \vee q)$$
$$\underset{\text{De Morgan}}{\iff} \neg\neg p \wedge \neg q$$
$$\underset{\text{dopp. Neg}}{\iff} p \wedge \neg q$$

Transitivität von $\iff$ liefert die Beh. ✓

1.4.4 Drei Beweisprinzipien für $p \Rightarrow q$ bzw $p \iff q$

I) <u>Aufspaltung von $\iff$</u> (1.3, f))

zum Bew von $p \iff q$ zeigt man $p \Rightarrow q$ und $q \Rightarrow p$

II) <u>Direkter Beweis</u> von $p \Rightarrow q$:

Finde Folge von wahren Implikationen

$$p \overset{w}{\Rightarrow} p_1 \overset{w}{\Rightarrow} p_2 \overset{w}{\Rightarrow} \dots \overset{w}{\Rightarrow} p_s \overset{w}{\Rightarrow} q$$

Dann gilt $p \Rightarrow q$ wegen Transitivität von $\Rightarrow$ (1.3, j))

III) <u>Kontrapositionsbeweis</u> (1.3, k))

zum Bew. von $p \Rightarrow q$ zeigt man die Kontr.pos $\neg q \Rightarrow \neg p$

<u>Beisp</u>

<u>Def</u>: Sei m eine ganze Zahl.

m heißt <u>gerade</u> $:\iff m = 2n$ für eine ganze Zahl n

m heißt <u>ungerade</u> $:\iff m = 2n+1$ " " " n

$\iff \neg(m \text{ gerade})$

<u>Satz</u>: Für jede ganze Zahl m gilt:

$$m \text{ ist gerade} \iff m^2 \text{ ist gerade}$$

<u>Bew</u>: Wegen 1.3, f) reicht es zu zeigen:

1) m gerade $\Rightarrow m^2$ gerade

und 2) m^2 gerade $\Rightarrow m$ gerade zu 1): direkt

m gerade $\Rightarrow$ $m = 2n$ für ein n $\Rightarrow$ $m^2 = (2n)^2 = 2 \cdot \underline{2n^2}$ für ein n

d.h. $m^2 = 2 \cdot$(ganze Zahl)

also m^2 gerade

zu 2): zeigen Kontraposition

$$\underbrace{\neg(m \text{ gerade})}_{m \text{ ungerade}} \Rightarrow \underbrace{\neg(m^2 \text{ gerade})}_{m^2 \text{ ungerade}}$$

Das geht direkt:

m ungerade $\Rightarrow$ $m = 2n+1$ für ein n

$$\Rightarrow m^2 = (2n+1)^2 = 2 \cdot 2n^2 + 2 \cdot 2n + 1$$

$$\Rightarrow m^2 = 2(\underbrace{2n^2 + 2n}_{\in \text{ ganze Zahl}}) + 1$$

d.h. m^2 ist ungerade.

1.4.5 Indirekter Beweis einer Aussage p

Prinzip: Man nimmt an, dass $\neg p$ stimmt,
und leitet daraus einen Widerspruch her,
d.h. eine Aussage $q \wedge \neg q$

Wieso stimmt dann p?

$$\neg p \overset{w}{\Rightarrow} p_1 \overset{w}{\Rightarrow} p_2 \overset{w}{\Rightarrow} \cdots \overset{w}{\Rightarrow} \underbrace{(q \wedge \neg q)}_{=: r} \text{ falsch}$$

$$\neg p \xRightarrow[\text{Transitivität}]{w} r$$

Haben also wahre Implikation $\neg p \Rightarrow r$ mit r falsch.

Das geht nur für $\neg p$ falsch, d.h. p wahr.

p	r	$\neg p$	$\neg p \Rightarrow r$
w	f	f	w
f	f	w	f

Alternativ: Kontrapos. $\underset{w}{\neg r} \underset{w}{\Rightarrow} \underset{w}{\neg\neg p} \; (\Leftrightarrow \underset{w}{p})$

Abtrennregel

Beisp

Satz: $\sqrt{2}$ ist irrational, d.h. kein Bruch

Bew: indirekt

Annahme: $\sqrt{2}$ ist rational

größter gemeins. Teiler = 1

d.h. $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, wobei $\underbrace{m, n \text{ teilerfremde}}_{q}$ ganze Zahlen

$\Rightarrow 2 = \frac{m^2}{n^2}$

$\Rightarrow 2n^2 = m^2$ gerade

$\underset{1.4.4}{\Rightarrow} m = 2l$ gerade

$\Rightarrow 2n^2 = 4l^2$

$\Rightarrow n^2 = 2l^2$ gerade

$\underset{1.4.4}{\Rightarrow}$ n gerade

d.h. m, n beide gerade

$\Rightarrow$ m, n nicht teilerfremd, d.h. $\neg q$, Widzu

1.5 Quantoren

1.5.1 Def.: Eine Aussageform (in einer Variablen) ist gegeben durch

p(x) sprachl. Gebilde mit "freier" Variable x

D Objektbereich für x

derart, dass p(a) eine Aussage ist für jedes a aus D.

Beisp

1) $q(x) :=$ "x ist Quadratzahl.", $D = \mathbb{N}$

$q(9)$ "9 ist Quadratzahl." (w)

$q(7)$ "7 " —— " —— " (f)

2) $t(x, y) :=$ "x teilt y". $D_x = D_y = \mathbb{N}$

$t(3, 6)$ "3 teilt 6" (w)

$t(x, 12)$ "x teilt 12" Aussageform in einer Var.

1.5.2 Def: Sei $p(x)$ Aussageform in einer Var. x

Allaussage

$\bigwedge_{x \in D} p(x) :=$ "Für alle (jede) x aus D ist $p(x)$ wahr"

(Alternativnotation: $\forall x \in D : p(x)$)

Existenzaussage:

$\bigvee_{x \in D} p(x) :=$ "Es gibt mindest. ein x aus D mit $p(x)$ wahr"
Für mind. ein x aus D ist $p(x)$ wahr.

(Alternativnotation: $\exists x \in D : p(x)$)

$\bigwedge, \forall$ heißen Allquantoren, und $\bigvee, \exists$ Existenzquantoren