Brückenkurs Mathematik WS 20/21

Dauer: 12.10.–23.10.20, Mo–Fr

Vorlesung: 9:15 – 12

Präsenz: Hs C, Henry-Ford-Bau

Online via Webex (Mikro aus, Fragen per Chat)

Übungen: 13 – 16

Jan Heydebreck, Präsenz: SR 031, Arnimallee 6
(Treffen 13:00 am Eingang Pi-Gebäude)

Martin Günther, Online via Webex

Corona: Anwes. Dokum. in Präs. VL und Präs. Übg

-) Jeder Teilnehmer bei 1. Erscheinen: Erhebungsbogen

-) Bei jedem Termin: Anwesenheitsliste.

Inhalt: Logik, Beweisprinzipien
Mengen, Abbildung
$\mathbb{N}$, Vollständige Induktion
Kombinatorik
die reellen Zahlen

Literatur:

Skript v. E. Lehrner }
" v. H. Schierer } auf Homepage v. BK

K. Houston, Wie man mathematisch denkt, Springer Spektrum, 2011

J. Mason, L. Burton, K. Stacey, Mathematisch denken Oldenbourg-Verl., 2012 (6. Aufl.)

1. Elementare Logik

1.1 Aussagen

<u>Definition</u>: Eine (math.) <u>Aussage</u> p ist sinnvolles sprachl. Gebilde, das entweder wahr (w) oder falsch (f)
(2 wert. Logik)
Sprechweise statt "p wahr"
"p gilt", "p stimmt", "p ist richtig"

<u>Beisp.</u>:
"7 ist eine Primzahl" (w)
"$2+3=6$" (f)
"$\frac{1}{0}=100$" keine Aussage, da $\frac{1}{0}$ nicht definiert.

"Auf dem Mars gibt oder gab es einmal Leben."
"Jede gerade Zahl >2 ist Summe zweier Primzahlen."
sind Aussagen mit unbekannten Wahrheitswert.
Goldbach. Vermutung (stimmt für all $n \leq 4\cdot 10^{18}$)

–) Konstruktion neuer Aussagen
–) Regeln des logischen Schließen

1.2 Junktoren

Seien p und q Aussagen
<u>Negation</u> (Verneinung) $\neg p$ "nicht p"
<u>Def</u>: $\neg p$ ist genau dann wahr, wenn p falsch ist

p	$\neg p$
w	f
f	w

Wahrheitstafel

<u>Beisp.</u>: p: "es regnet" $\neg p$: "es regnet nicht"
"~~es scheint Sonne~~"

p: $1+1=2$ w $\neg p$: $1+1\neq 2$ f
$1+1=3$ f $1+1\neq 3$ w

<u>Konjunktion</u> (und-Verknüpf.) $p \wedge q$ "p und q"

9, 7, 6, 4 ist ungerade und durch 3 teilbar w, f, f, f

p	q	$p \wedge q$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

d.h. $p \wedge q$ ist wahr g.d.w. p, q beide wahr.

Disjunktion (oder-Verknüpf) $p \vee q$ "p oder q"

9, 7, 6, 4 ist ungerade oder durch 3 teilbar → w, w, w, f

p	q	$p \vee q$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

d.h. $p \vee q$ ist wahr g.d.w. mind. eine der Aussagen p, q ist wahr.

Bemerk: Das math. "oder" ist nicht ausschließend, $p \vee q$ ist auch wahr, fall p, q beide wahr sind.

Das ausschließende "entweder p oder q" hat Form

$$(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$$

Implikation (Folgerung) $p \Rightarrow q$ "wenn p, dann q"

Beisp 1) Mutter zu Fritz

"Wenn du in Mathearbeit eine 2 oder besser schreibst, dann gebe ich dir 20 €."

2) $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$ wahre Aussage für alle reellen a, b

Insbes. $\underset{f}{1 = -1} \Rightarrow \underset{w}{1 = 1}$

$\underset{f}{1 = 2} \Rightarrow \underset{f}{1 = 4}$

Def:

p	q	$p \Rightarrow q$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

d.h. $p \Rightarrow q$ ist falsch g.d.w. p wahr und q falsch ist.

p heißt <u>Prämisse</u>

q " <u>Konklusion</u>

Sprechweisen "p impliziert q", "aus p folgt q"

"p ist hinreichend für q"

"q ist notwendig für p"

MERKE: Implikationen mit falscher Prämisse sind wahr.

Äquivalenz (log. Gleichwertigkeit): $p \Leftrightarrow q$ "p genau dann, wenn q"

p	q	$p \Leftrightarrow q$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

d.h. $p \Leftrightarrow q$ ist wahr g.d.w. p, q haben gleichen Wahrheitswert.

Zusammengesetzte Aussagen

Vereinbarung: $\neg$ bindet stärker als $\wedge, \vee$

$\wedge, \vee$ " " " $\Rightarrow, \Leftrightarrow$

Beisp 1: $(p \vee q) \Rightarrow (\neg q \wedge p)$

p	q	$p \vee q$	$\neg q$	$\neg q \wedge p$	$(p \vee q) \Rightarrow (\neg q \wedge p)$
w	w	w	f	f	f
w	f	w	w	w	w
f	w	w	f	f	f
f	f	f	w	f	w

Beisp 2:

p	q	r	$p \Rightarrow (q \wedge r)$	
w	w	w	w	w
w	w	f	f	f
w	f	w	f	f
w	f	f	f	f
f	w	w	w	w
f	w	f	w	f
f	f	w	w	f
f	f	f	w	f

Beisp 3: Die Aussagen $p \Rightarrow q$, $\neg p \vee q$ und $\neg q \Rightarrow \neg p$ sind paarweise äquivalent.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$\neg q$	$\neg q \Rightarrow \neg p$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$
w	w	w	f	w	f	w	w
w	f	f	f	f	w	f	w
f	w	w	w	w	f	w	w
f	f	w	w	w	w	w	w

gleiche Spalten

MERKE: $\neg q \Rightarrow \neg p$ heißt Kontraposition von $p \Rightarrow q$, und beiden haben den gleich Wahrheitswert.

1.3 Tautologien

Def: Eine zusammengesetzte Aussage, die unabhängig von den Wahrheitswerten der Einzelaussagen immer wahr ist, heißt <u>allgemeingültig</u> oder <u>Tautologie</u>. (oder aussagenlogisches Gesetz)

Satz: Folgende zus. gesetz. Aussagen sind Tautologien

a) $p \wedge q \iff q \wedge p$ — Kommutativ Gesetz

b) $(p \wedge q) \wedge r \iff p \wedge (q \wedge r)$ — Assoziativ Ges.

c) $p \wedge (q \vee r) \iff (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ — Distributiv Ges.

d) $\neg (p \wedge q) \iff \neg p \vee \neg q$ — De Morgan Regel

a')–d') analog mit $\wedge$ und $\vee$ vertauscht.

e) $\neg\neg p \iff p$ — Doppelte Verneinung

f) $(p \Leftrightarrow q) \iff (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ — Aufspalt v. $\Leftrightarrow$

g) $(p \Rightarrow q) \iff \neg p \vee q$ — Umform. v. $\Rightarrow$

h) $(p \Rightarrow q) \iff (\neg q \Rightarrow \neg p)$ — Kontraposition

i) $p \vee \neg p$ — Fallunterscheidung

j) $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ — Transitivität v. $\Rightarrow$

k) $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$ — Abtrennregel

l) $\neg (q \wedge \neg q)$ — Verbotener Wiederspruch

m) $(\neg p \Rightarrow (q \wedge \neg q)) \Rightarrow p$ — Indirekter Beweis

<u>Beweis</u> mit Wahrheitstafel

g), h): siehe 1.2 Beisp 3

d)

p	q	$\neg$	$(p \wedge q)$	$\iff$	$(\neg p$	$\vee$	$\neg q)$
w	w	f	w	w	f	f	f
w	f	w	f	w	f	w	w
f	w	w	f	w	w	w	f
f	f	w	f	w	w	w	w

De Morgan Regel

✓

Bemerk.:

1) Sind A und B zus. gesetzte Aussagen und ist $A \Leftrightarrow B$ eine Tautologie, so heißen A und B <u>aussagenlogisch äquivalent</u> (d.h. A und B haben den gleichen Wahrheitswert)

Ist $A \Rightarrow B$ eine Tautologie, so sagt man B <u>folgt aussagenlogisch aus</u> A

2) d), f) und g) drücken $\wedge$, $\Rightarrow$ und $\Leftrightarrow$ durch $\neg$ und $\vee$ aus.

Es reicht sogar <u>ein</u> Junktor: $p|q := \neg(p \wedge q)$ "nand"
(Sheffer-Strich)

(z.B. $p|p = \neg(p \wedge p) \Leftrightarrow \neg p$.)

h) bis m) wichtig für Beweisprinzipien.