Damit lassen sich die Axiome von $\mathbb{R}$ kürzer fassen:

A) $\mathbb{R}$ mit der Addition ist eine kommutative Gruppe.

M) $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ mit der Multiplikation ist eine kommutative Gruppe.

D) Es gilt das Distributivgesetz.

8.2 Folgerungen

a) Die beiden neutralen Elemente sind durch ihre Eigenschaften eindeutig bestimmt.

b) Für $a,b \in \mathbb{R}$ hat die Gleichung $a + x = b$ genau eine Lösung, nämlich $x = (-a) + b$.
Für $a,b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, hat die Gleichung $ax = b$ genau eine Lösung, nämlich $x = a^{-1}b$.
Insbesondere ist das zu a additiv inverse bzw. das zu $a \neq 0$ multiplikativ inverse Element eindeutig bestimmt.

c) Rechenregeln:

$-0 = 0$, $\quad -(-a) = a$, $\quad -(a + b) = (-a) + (-b)$,

$1^{-1} = 1$, $\quad (a^{-1})^{-1} = a$, $\quad (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ $(a \neq 0, b \neq 0)$,

$a\cdot 0 = 0$, $\quad (-a)b = a(-b) = -(ab)$, $\quad (-a)(-b) = ab$.

d) Aus $ab = 0$ folgt $a = 0$ oder $b = 0$. (In einem Körper gibt es keine "Nullteiler".)

e) Definiert man für $a,b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, $\frac{a}{b} := ab^{-1}$ (Bruchschreibweise), so gilt

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}, \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}, \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$$

($b \neq 0, d \neq 0$ und in der letzten Identität zusätzlich $c \neq 0$).

Beweis:

a) Sei $0' \in \mathbb{R}$ ein weiteres Element mit $a + 0' = a$ für alle $a \in \mathbb{R}$, dann gilt insbesondere $0 + 0' = 0$. Da nach dem Kommutativgesetz A2 aber $0 + 0' = 0' + 0 \overset{A3}{=} 0'$ ist, folgt $0 = 0'$.
Entsprechend zeigt man, daß das neutrale Element der Multiplikation eindeutig bestimmt ist.

b) Wir beschränken uns auf die Gleichung $a + x = b$.
Wir zeigen die *Existenz* einer Lösung: $x = (-a) + b$ ist eine Lösung, denn es ist
$a + ((-a) + b) \overset{A1}{=} (a + (-a)) + b \overset{A4}{=} 0 + b \overset{A2}{=} b + 0 \overset{A3}{=} b$.
Die Gleichung besitzt also mindestens eine Lösung.
Wir zeigen die *Eindeutigkeit* der Lösung. Sind x_1, x_2 Lösungen der Gleichung $a + x = b$, dann gilt $a + x_1 = b$ und $a + x_2 = b$, also $a + x_1 = a + x_2$. Addition von $(-a)$ auf beiden Seiten ergibt $(-a) + (a + x_1) = (-a) + (a + x_2)$, also nach A1 $((-a) + a) + x_1 = ((-a) + a) + x_2$ und nach A2 $(a + (-a)) + x_1 = (a + (-a)) + x_2$, d.h. nach A4 $0 + x_1 = 0 + x_2$ und folglich nach A2 $x_1 + 0 = x_2 + 0$, also nach A3 $x_1 = x_2$. Die Gleichung hat höchstens eine Lösung.

c) Nach A4 ist $0 + (-0) = 0$, nach A3 $0 + 0 = 0$. Da aber das additiv inverse Element nach b) eindeutig bestimmt ist, folgt $-0 = 0$.

Nach A3 ist $-(-a)$ das zu $-a$ inverse Element. Andererseits ist nach A2 und A4 auch $(-a) + a = 0$, also a additiv invers zu $-a$. Wegen der Eindeutigkeit des additiv inversen Elements zu $-a$ ist $-(-a) = a$.

$-(a + b)$ ist das zu $a + b$ additiv inverse Element. Andererseits ist wegen

$(a + b) + ((-a) + (-b)) = 0$ (nach A1, A2 und A4) auch $(-a) + (-b)$ zu $a + b$ additiv invers.
Es folgt $-(a + b) = (-a) + (-b)$.

Die drei entsprechenden Aussagen für die Multiplikation beweist man analog.

Aus $a \cdot 0 \overset{A3}{=} a \cdot (0 + 0) \overset{D}{=} a \cdot 0 + a \cdot 0$ folgt $0 = a \cdot 0$. (Warum?)

Nach A3 ist $-(ab)$ das zu ab additiv inverse Element. Wegen $ab + a(-b) \overset{D}{=} a(b + (-b)) \overset{A4}{=} a \cdot 0 = 0$ ist auch $a(-b)$ zu ab additiv invers. Es folgt $a(-b) = -(ab)$.
Schließlich folgt daraus $(-a)b = b(-a) = -(ba) = -(ab)$.

Nach den gerade bewiesenen Vorzeichenregeln gilt $(-a)(-b) = -(a(-b)) = -(-(ab)) = ab$.

d) Es sei $ab = 0$. Entweder ist $a = 0$ oder $a \neq 0$. Im zweiten Fall existiert zu a das multiplikativ inverse Element a^{-1}, und es folgt aus $ab = 0$ nach b) $b = a^{-1} \cdot 0 = 0$.

e) Wir beschränken uns auf den Beweis der ersten Bruchrechenregel:
$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = ab^{-1} + cd^{-1} = ab^{-1}(dd^{-1}) + cd^{-1}(bb^{-1}) = ad(b^{-1}d^{-1}) + bc(b^{-1}d^{-1}) = ad(bd)^{-1} + bc(bd)^{-1} = (ad + bc)(bd)^{-1} = \frac{ad + bc}{bd}$. ❑

Bemerkung: Die in 8.2 abgeleiteten Regeln gelten in jedem Körper, z. B. im Körper der rationalen $\mathbb{Q}$ oder im Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Hier zeigt sich zum ersten Mal die Ökonomie der axiomatischen Methode.

Aufgaben

Aufgabe 8.1
Beweisen Sie, daß in einem Körper das neutrale Element der Multiplikation eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 8.2
Zeigen Sie, daß in einem Körper K die Gleichung $ax = b$ mit $a,b \in K$, $a \neq 0$, genau eine Lösung hat, nämlich $x = a^{-1}b$.

Aufgabe 8.3
In einem Körper ist das zu $a \neq 0$ multiplikativ inverse Element eindeutig bestimmt.

Aufgabe 8.4
In einem Körper gilt: a) $1^{-1} = 1$, b) $(a^{-1})^{-1} = a$, c) $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ $(a \neq 0, b \neq 0)$,

Aufgabe 8.5
Beweisen Sie für $a,b \in \mathbb{R}$:
a) Wenn $a^2 = b^2$, dann $a = b$ oder $a = -b$.
b) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
c) Finden Sie eine Faktorisierung von $a^n + b^n$ für ungerades n.

Aufgabe 8.6
Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln für Brüche in einem Körper:
a) $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ für $b \neq 0$, $c \neq 0$.
b) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ für $b \neq 0$, $d \neq 0$.
c) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$ für $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$.
d) Es sei $b \neq 0$, $d \neq 0$. Dann gilt $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ genau dann wenn $ad = bc$.

Aufgabe 8.7
In $K := \{0,1,2\}$ seien zwei innere Verknüpfungen (Addition und Multiplikation) durch die folgenden Verknüpfungstafeln definiert:

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Zeigen Sie, daß $(K,+\ \cdot)$ ein Körper ist.

9. Ordnung und absoluter Betrag

Auf $\mathbb{R}$ läßt sich eine Ordnung definieren, die mit der Körperstruktur verträglich ist, eine *Anordnung*.

9.1 Anordnungsaxiome

Für alle $a,b,c \in \mathbb{R}$ gilt:

O1) Genau eine der drei Aussagen $a < b$, $a = b$, $b < a$ ist wahr. (Trichotomie)

O2) Wenn $a < b$ und $b < c$, dann $a < c$. (Transitivität)

O3) Wenn $a < b$, dann $a + c < b + c$. (Monotonie der Addition)

O4) Wenn $a < b$ und $0 < c$, dann $ac < bc$. (Monotonie der Multiplikation)

Statt $a < b$ schreibt man auch $b > a$.

9.2 Satz

Für alle $a,b,c \in \mathbb{R}$ gilt:

a) Wenn $a < b$ und $c < d$, dann $a + c < b + d$.

b) Wenn $a < b$ und $c < 0$, dann $ac > bc$.

c) Wenn $a \neq 0$, dann $0 < a^2$. (Speziell: $0 < 1$.)

d) Wenn $a > 0$, dann $\frac{1}{a} > 0$.
Wenn $a < 0$, dann $\frac{1}{a} < 0$.

e) Wenn $a < b$ und $ab > 0$, dann $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.
Wenn $a < b$ und $ab < 0$, dann $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Beweis:

a) $\left.\begin{array}{l}\text{Wenn } a < b, \text{ dann (nach O3) } a + c < b + c.\\ \text{Wenn } a < b, \text{ dann (nach O3) } b + c < b + d.\end{array}\right\}$ Also $a + c < b + d$. (O2)

b) Wenn $c < 0$, dann $0 < -c$. (O3, wie?)
Nach O4 folgt aus $a < b$: $-ac < -bc$.
Addition von $ac + bc$ ergibt $bc < ac$. (O3)

c) Wenn $a \neq 0$, dann gilt entweder $0 < a$ oder $a < 0$. (O1)
Wenn $0 < a$, dann $0a < a^2$, also $0 < a^2$. (O4)
Wenn $a < 0$, dann $0 < -a$, also $0 < (-a)^2$, wie im ersten Fall.
Wegen $(-a)^2 = a^2$ bedeutet das aber $0 < a^2$.

d) Wenn $0 < a$, dann $0 \neq a$ (O1), also existiert $\frac{1}{a}$.
Nach c) ist $0 < (\frac{1}{a})^2 = \frac{1}{a^2}$.
Daher gilt nach O4: Wenn $0 < a$, dann $0 \cdot \frac{1}{a^2} < a \cdot \frac{1}{a^2}$, also $0 < \frac{1}{a}$.
Die zweite Aussage beweist man analog.

e) Wenn $0 < ab$, dann $0 < \frac{1}{ab}$ (nach d).
Daher gilt nach O4: Wenn $a < b$, dann $a \cdot \frac{1}{ab} < b \cdot \frac{1}{ab}$, also $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.
Die zweite Aussage beweist man analog. ❑

$a \leq b$ bedeutet: entweder $a < b$ oder $a = b$. Statt $a \leq b$ schreibt man auch $b \geq a$.

Hieraus folgt unmittelbar: Wenn $a \leq b$ und $b \leq a$, dann $a = b$.
$a \leq b$ ist genau dann falsch, wenn $a > b$ wahr ist.
$a < b$ ist genau dann falsch, wenn $a \geq b$ wahr ist.

Die Schreibweise $a < b < c$ ist eine Abkürzung für $a < b$ und $b < c$.
Entsprechend sind die Schreibweisen $a \leq b \leq c$, $a < b \leq c$, $a \leq b < c$ zu lesen.

9.3 Definition

Für $a \in \mathbb{R}$ wird der **absolute Betrag** von a definiert durch $|a| := \begin{cases} a, & \text{wenn } a \geq 0 \\ -a, & \text{wenn } a < 0 \end{cases}$

$|a|$ wird gelesen: "Betrag (von) a" oder "a absolut".

9.4 Folgerungen

(i) $\pm a \leq |a|$, (ii) $-|a| \leq a \leq |a|$, (iii) $|a| = |-a|$, (iv) $a < b \wedge -a < b \Leftrightarrow |a| < b$.

Beweis:

(i) Ist $a \geq 0$, dann ist $-a \leq 0 \leq a = |a|$. Ist $a < 0$, dann ist $a < 0 < -a = |a|$.

(ii) Nach (i) gilt $a \leq |a|$ und $-a \leq |a|$, also $-|a| \leq a$.

(iii) Für $a \geq 0$ ist $-a \leq 0$, also $|a| = a$ und $|-a| = -(-a) = a$.
Für $a < 0$ ist $-a > 0$, also $|a| = -a$ und $|-a| = -a$.

(iv) "$\Rightarrow$": Es ist $|a| = a$ oder $|a| = -a$. Gilt daher $a < b \wedge -a < b$, so folgt $|a| < b$.
"$\Leftarrow$": Gilt $|a| < b$, so folgt nach (i) sowohl $a \leq |a| < b$ also auch $-a \leq |a| < b$. ❑

9.5 Satz

Für alle $a,b \in \mathbb{R}$ gilt:

B1) $|a| \geq 0$
$|a| = 0$ genau dann, wenn $a = 0$.

B2) $|ab| = |a| \cdot |b|$

B3) $|a + b| \leq |a| + |b|$ Dreiecksungleichung

Beweis:

B1) klar

B2) Wir unterscheiden vier Fälle:
1. Fall: $a \geq 0$, $b \geq 0$. Dann ist $ab \geq 0$, also $|ab| = ab = |a| \cdot |b|$.
2. Fall: $a \geq 0$, $b < 0$. Dann ist $ab \leq 0$, also $|ab| = -ab = a(-b) = |a| \cdot |b|$.
3. Fall: $a < 0$, $b \geq 0$. Dann ist $ab \leq 0$, also $|ab| = -ab = (-a)b = |a| \cdot |b|$.
4. Fall: $a < 0$, $b < 0$. Dann ist $ab > 0$, also $|ab| = ab = (-a)(-b) = |a| \cdot |b|$.

Wegen der Kommutativität der Multiplikation könnte der 3. Fall auch auf den 2. Fall zurückgeführt werden. (Wie?)

B3) 1. Fall: $a + b \geq 0$. Dann ist $|a + b| = a + b \leq |a| + |b|$.
2. Fall: $a + b < 0$. Dann ist $|a + b| = -(a + b) = -a - b \leq |a| + |b|$. ❑

9.6 Folgerung

Für alle $a,b \in \mathbb{R}$ gilt: $|a| - |b| \leq |a - b|$ und $|b| - |a| \leq |a - b|$, also $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

Beweis:
$|a| = |a-b+b| \leq |a-b|+|b| \Rightarrow |a|-|b| \leq |a+b|$. Durch Vertauschen von a und b folgt: $|b|-|a| \leq |b-a| = |a-b|$. Schließlich wende man 9.4 (iv) an. ❑

Die Aussagen 9.5, B3 und 9.6 lassen sich wegen $|-b| = |b|$ verallgemeinern und zusammenfassen:

$$\boxed{\textbf{9.7} \quad ||a|-|b|| \leq |a \pm b| \leq |a|+|b|}.$$

9.8 Lemma $|a| < b$ gilt genau dann, wenn $-b < a < b$.

Analog mit $\leq$ statt $<$.

Beweis:
$|a| < b \Leftrightarrow -a < b \wedge a < b \Leftrightarrow a > -b \wedge a < b \Leftrightarrow -b < a < b$. ❑

Mit Lemma 9.8 läßt sich die Dreiecksungleichung wie folgt beweisen:

2. Beweis von B3:
Aus $-|a| \leq a \leq |a|$ und $-|b| \leq b \leq |b|$ folgt nach 9.2a: $-(|a|+|b|) \leq a+b \leq |a|+|b|$. Nach Lemma 9.6 ist diese Aussage äquivalent zu $|a+b| \leq |a|+|b|$. ❑

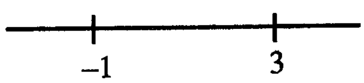
9.9 Lemma $|a| = \sqrt{a^2}$ für alle $a \in \mathbb{R}$.

Beweis:
$\sqrt{a^2}$ ist die nichtnegative Lösung der Gleichung $x^2 = a^2$. Die Lösungsmenge dieser Gleichung ist $\{-|a|, |a|\}$, die nichtnegative Lösung also $|a|$. ❑

Durch geduldige Fallunterscheidung lassen sich auch die meisten Ungleichungen, die absolute Beträge enthalten, lösen.

Beispiel: $|x-3| + |x+1| < 6$.

Wir unterscheiden drei Fälle:



1. Fall $x < -1$. Dann ist $x-3 < 0$ und $x+1 < 0$. Die Ungleichung ist äquivalent zu $-(x-3)-(x+1) < 6$, d.h. zu $x > -2$. Die Lösungsmenge ist in diesem Fall $L_1 := \{x \mid x \in \mathbb{R}, x < -1\} \cap \{x \mid x \in \mathbb{R}, x > -2\}$ $= \{x \mid x \in \mathbb{R}, -2 < x < -1\}$.

2. Fall $-1 \leq x < 3$. Dann ist $x-3 < 0$ und $x+1 \geq 0$. Die Ungleichung ist äquivalent zu $-(x-3)+(x+1) < 6$, d.h. zu $4 < 6$. Die Lösungsmenge ist in diesem Fall $L_2 := \{x \mid x \in \mathbb{R}, -1 \leq x < 3\} \cap \mathbb{R} = \{x \mid x \in \mathbb{R}, -1 \leq x < 3\}$.

3. Fall $3 \leq x$. Dann ist $x-3 \geq 0$ und $x+1 \geq 0$. Die Ungleichung ist äquivalent zu $(x-3)+(x+1) < 6$, d.h. zu $x < 4$. Die Lösungsmenge ist in diesem Fall $L_3 := \{x \mid x \in \mathbb{R}, 3 \leq x\} \cap \{x \mid x \in \mathbb{R}, x < 4\} = \{x \mid x \in \mathbb{R}, 3 \leq x < 4\}$.

Die Lösungsmenge der Ungleichung ist $L_1 \cup L_2 \cup L_3 = \{x \mid x \in \mathbb{R}, -2 < x < 4\}$.

Aufgaben

Aufgabe 9.1
Beweisen Sie für $a,b,c,d \in \mathbb{R}$:

a) Wenn $a < b$, dann $-b < -a$.

b) Wenn $a > 1$, dann $a^2 > a$.

c) Wenn $0 < a < 1$, dann $a^2 < a$.

d) Wenn $0 \le a < b$ und $0 \le c < d$, dann $ac < bd$.

e) Wenn $0 \le a < b$, dann $a^2 < b^2$. (Benutzen Sie d).

f) Wenn $a \ge 0$, $b \ge 0$ und $a^2 < b^2$, dann $a < b$. (Kontraposition!)

g) Wenn $a < 0$, dann $\frac{1}{a} < 0$.

h) Wenn $a < b$ und $ab < 0$, dann $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Aufgabe 9.2
Zeigen Sie für $a,b \in \mathbb{R}$:

a) $\left|\frac{1}{b}\right| = \frac{1}{|b|}$ $(b \neq 0)$,

b) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ $(b \neq 0)$,

c) $|a - b| \le |a| + |b|$, (Finden Sie einen sehr kurzen Beweis!)

d) $|a + b + c| \le |a| + |b| + |c|$.

Aufgabe 9.3
Lösen Sie die folgenden Ungleichungen:

a) $4 - x < 3 - 2x$, b) $5 - x^2 < 8$, c) $5 - x^2 < -2$,

d) $(x - 1)(x - 3) > 0$, e) $x^2 - 2x + 2 > 0$, f) $x^2 + x + 1 > 2$,

g) $x^2 - x + 10 > 16$, h) $x^2 - 4x + 8 \le 0$, i) $(x - 4)(x + 5)(x - 3) > 0$

j) $\frac{1}{x} + \frac{1}{1 - x} > 0$, k) $\frac{x - 1}{x + 1} > 0$.

Aufgabe 9.4
Lösen Sie die folgenden Gleichungen und Ungleichungen:

a) $|x - 3| = 8$, b) $|x - 3| < 8$, c) $|x + 4| < 2$,

d) $|x - 1| + |x - 2| > 1$, e) $|x - 1| + |x + 1| < 3$, f) $|x - 1| + |x + 1| < 2$,

g) $|x - 1| \cdot |x + 1| = 0$, h) $|x - 1| \cdot |x + 2| = 3$, i) $|x + 2| \le |x - 1|$,

j) $|2 - |x + 1|| \le 1$, k) $|2 - |x|| - ||x| - 3| \le 4$.

10. Vollständigkeit von $\mathbb{R}$

Uns fehlt noch eine wichtige Eigenschaft von $\mathbb{R}$, und zwar gerade die Eigenschaft, in der sich $\mathbb{R}$ von $\mathbb{Q}$ unterscheidet. Sowohl $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$ sind angeordnete Körper. Der Unterschied läßt sich an der Zahlengeraden veranschaulichen. Die rationalen Zahlen besetzen zwar recht viele Punkte. (Zwischen zwei rationalen Zahlen $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ liegt wieder eine rationale Zahl, zum Beispiel $\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right) = \frac{ad+bc}{2bd}$, folglich sogar unendlich viele rationale Zahlen, denn das Verfahren läßt sich beliebig oft wiederholen.) Aber es bleiben Punkte - sogar die meisten Punkte - unbesetzt. Das zeigen die folgenden Überlegungen.

Die rationalen Zahlen sind abzählbar; sie lassen sich mit den naürlichen Zahlen durchnumerieren. (Wir zählen sogar die ungekürzten Brüche.)

$$\begin{array}{ccccccccc}
\frac{1}{1} & \rightarrow & \frac{2}{1} & & \frac{3}{1} & \rightarrow & \frac{4}{1} & & \cdots \\
 & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \\
\frac{1}{2} & \leftarrow & \frac{2}{2} & & \frac{3}{2} & & \frac{4}{2} & & \cdots \\
\downarrow & & & & \uparrow & & \downarrow & & \\
\frac{1}{3} & \rightarrow & \frac{2}{3} & \rightarrow & \frac{3}{3} & & \frac{4}{3} & & \cdots \\
 & & & & & & \downarrow & & \\
\frac{1}{4} & \leftarrow & \frac{2}{4} & \leftarrow & \frac{3}{4} & \leftarrow & \frac{4}{4} & & \cdots \\
\cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdots
\end{array}$$

Erfinden Sie andere Abzählmuster.

Ordnen wir den positiven rationalen Zahlen die geraden natürlichen Zahlen zu, so bleiben die ungeraden natürlichen Zahlen für die negativen rationalen Zahlen.

Die reellen Zahlen dagegen sind nicht mehr abzählbar. (Ebenso die irrationalen Zahlen.) Nicht einmal die reellen Zahlen zwischen 0 und 1 sind abzählbar.

Annahme: Die unendlichen Dezimalbrüche zwischen 0 und 1 sind abzählbar. Wir denken uns *alle* in der Reihenfolge der Numerierung notiert.

$0,a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\ldots$

$0,a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}\ldots$

$0,a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}\ldots$

$0,a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}\ldots$

. . . .

. . . .

. . . .

Nun betrachten wir den Dezimalbruch $0,b_1b_2b_3b_4\ldots$ mit

$b_i := \begin{cases} 1 & \text{für } a_{ii} \neq 1 \\ 2 & \text{für } a_{ii} = 1 \end{cases}$. Dann ist $b_i \neq a_{ii}$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

10.1 Definition

Es sei $A \subset \mathbb{R}$. Ein Element g von A heißt **größtes Element von A**, wenn $x \leq g$ für alle $x \in A$. Analog definiert man kleinstes Element von A.

Ein Objekt $a \in A$ sei nicht größtes Element von A. Was bedeutet das ?

10.2 Satz
Eine Menge $A \subset \mathbb{R}$ besitzt höchstens ein größtes (kleinstes) Element.
Wir dürfen daher von *dem* größten bzw. *dem* kleinsten Element von A sprechen (falls es existiert) und dafür ein Zeichen einführen: **max A** bzw. **min A.**

Eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ braucht weder ein kleinstes noch ein größten Element zu haben, z. B. $\mathbb{R}$ oder $]0,1[$.

Beweis:
g_1, g_2 seien größte Elemente von A. Dann gilt:

$$\left.\begin{array}{l} x \le g_1 \text{ für alle } x \in A, \text{ also insbesondere } g_2 \le g_1. \\ x \le g_2 \text{ für alle } x \in A, \text{ also insbesondere } g_1 \le g_2. \end{array}\right\} \Rightarrow g_1 = g_2.$$

❑

10.3 Definition
Es sei $A \subset \mathbb{R}$. Dann heißt $s \in \mathbb{R}$ eine **obere Schranke** von A in $\mathbb{R}$, wenn gilt:

$$x \le s \text{ für alle } x \in A.$$

Das kleinste Element der Menge der oberen Schranken von A heißt die **kleinste obere Schranke** oder das **Supremum** von A in $\mathbb{R}$. (Zeichen: sup A.)

Analog definiert man: eine **untere Schranke** von A; die **größte untere Schranke von A** oder das **Infimum** von A.

Besitzt eine Menge eine obere (untere) Schranke, so heißt diese Menge **nach oben (unten) beschränkt**. Eine Menge heißt **beschränkt**, wenn sie nach oben und unten beschränkt ist.

Das größte Element von A ist also eine obere Schranke von A, die zu A gehört.

Als kleinstes Element (der Menge der oberen Schranken) ist das Supremum - falls es existiert - eindeutig bestimmt.

Ist $\emptyset \subset \mathbb{R}$ beschränkt ? Besitzt $\emptyset \subset \mathbb{R}$ eine kleinste obere Schranke ?

Es sei $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, und $t \in \mathbb{R}$ sei nicht obere Schranke von A in $\mathbb{R}$. Was folgt daraus ?

Aufgabe: Eine Teilmenge A von $\mathbb{R}$ ist genau dann beschränkt, wenn es ein $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$, gibt mit $|x| \le M$ für alle $x \in A$.

10.4 Satz
$s \in \mathbb{R}$ ist genau dann das Supremum von $A \subset \mathbb{R}$, wenn gilt:
S1) Für alle $x \in A$ gilt $x \le s$.
S2) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $x \in A$ mit $s - \varepsilon < x$.

Beweis:

S1 besagt: s ist eine obere Schranke von A.
S2 besagt: s ist die kleinste obere Schranke von A, denn für jedes $\varepsilon > 0$ ist $s - \varepsilon$ nicht obere Schranke von A.

❑

Wie lauten die S1, S2 entsprechenden Aussagen I1, I2 für das Infimum?

10.5 Vollständigkeitsaxiom (auch: Supremumsaxiom)
Für jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ existiert das Supremum.

In $(\mathbb{Q}^+, \leq)$ besitzt z. B. die Menge $A := \{x \mid x \in \mathbb{Q}^+ \wedge x^2 < 2\}$ kein Supremum. Ist s eine obere Schranke von A, also $s \in \mathbb{Q}^+$ und $s^2 > 2$, dann ist $\frac{2s+2}{s+2} \in \mathbb{Q}^+$ und es gilt:

$s \in \mathbb{Q}^+ \wedge s^2 > 2 \Rightarrow 2 + 2s < s^2 + 2s \Rightarrow \frac{2s+2}{s+2} < s$ und

$s \in \mathbb{Q}^+ \wedge s^2 > 2 \Rightarrow (2s+2)^2 > 2(s+2)^2 \Rightarrow (\frac{2s+2}{s+2})^2 > 2.$

10.6 Satz
Für jede nichtleere, nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ existiert das Infimum.

Ist A nichtleer und nach unten beschränkt, so betrachte man die Menge $-A := \{-x \mid x \in A\}$, und überlege sich, daß $\sup(-A)$ existiert, und $\inf A = -\sup(-A)$ gilt.

Brückenkurs Mathematik

(Kap. 1 - 10)

E. Letzner

Freie Universität Berlin
Fachbereich Mathematik

Inhaltsverzeichnis