6.2 Induktionsaxiom
Hat eine Teilmenge T von $\mathbb{N}_0$ die beiden Eigenschaften

Ind1) $0 \in T$, Ind2) $n \in T \Rightarrow n+1 \in T$,

so ist $T = \mathbb{N}_0$.

Dieser Satz liefert die Grundlage für die Beweismethode der vollständigen Induktion:

6.3 Satz (Beweismethode der vollständigen Induktion)

Um eine Aussage der Form $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}_0} Pn$ zu beweisen, braucht man nur zu zeigen:

(1) P0 (ist wahr) Induktionsanfang

(2) $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}_0} (Pn \Rightarrow P(n+1))$ Induktionsschritt (oder Induktionsschluß)

Beweis:

Die Menge $T := \{n \mid n \in \mathbb{N}_0 \wedge Pn\}$, die Menge derjenigen natürlichen Zahlen, für die die Aussage Pn wahr ist, ist eine Teilmenge von $\mathbb{N}_0$.
Ind1) Wegen P0 gilt $0 \in T$.
Ind2) Aus $n \in T$, d.h. aus $n \in \mathbb{N}_0 \wedge Pn$ folgt $n+1 \in \mathbb{N}_0 \wedge P(n+1)$, also $n+1 \in T$.
Daher ist $T = \mathbb{N}_0$, die Aussage Pn ist für jede natürliche Zahl wahr. ❑

Beispiel:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2} n (n+1)$.
Beweis durch vollständige Induktion:
Wir wählen für Pn die Aussageform $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2} n (n+1)$.

(1) P1 bedeutet $1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2$, ist also wahr.

(2) Aus Pn, $n \geq 1$, d.h. $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2} n (n+1)$, folgt $\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1)$
$= \frac{1}{2} n (n+1) + (n+1) = \frac{1}{2} (n+1)(n+2)$, also $P(n+1)$.

Als Induktionsanfang kann statt 1 eine beliebige natürliche Zahl $n_0 \in \mathbb{N}_0$ sein.

Um eine Aussage der Form $\bigwedge_{\substack{n \in \mathbb{N}_0 \\ n \geq n_0}} Pn$ zu beweisen, braucht nur gezeigt zu werden:

(1) Pn_0 und (2) $Pn \Rightarrow P(n+1)$ für alle $n \geq n_0$.

6.4 Ähnlich wie in obigem Beispiel beweist man die *Summenformeln* für die ersten n *Quadratzahlen, Kubikzahlen, ungeraden Zahlen:*

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \tfrac{1}{6} n\,(n+1)\,(2n+1), \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \tfrac{1}{4} n^2\,(n+1)^2, \quad \sum_{k=1}^{n} (2n-1) = n^2}.$$

oder die Summenformel für die ersten n+1 Glieder einer *geometrischen Reihe*:

6.5 Für $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$, gilt $\boxed{\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt:

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \left(\sum_{k=0}^{n} q^k\right) + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q}.$$

6.6 Wir vermerken weiter die wichtige *Bernoullische Ungleichung*:
Für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ und alle von Null verschiedenen reellen Zahlen $x > -1$ ist

$$\boxed{(1+x)^n > 1+nx}$$

Induktionsschritt:

$(1+x)^n > 1+nx \;\Rightarrow\; (1+x)^{n+1} > (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2 > 1 + (n+1)x$

6.7 Die *Binomialkoeffizienten* $\binom{n}{k} := \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}$ $(n,k \in \mathbb{N}_0)$
stehen in der n-ten Zeile des PASCALschen Dreiecks $(0! := 1)$. Es gilt:

(i) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$ für $0 \leq k \leq n$, und $\binom{n}{k} = 0$ für $k > n$.

(ii) $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ (Diese Identität benutzt man bei der Berechnung der Binomialkoeffizienten mit Hilfe des PASCALschen Dreiecks.)

Beweis:

(i) klar

(ii) $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k-1}\frac{n-k+1}{k} = \binom{n}{k-1}\left(1 + \frac{n-k+1}{k}\right)$

$= \binom{n}{k-1}\frac{n+1}{k} = \binom{n+1}{k}$ ❑

6.8 Satz (Binomischer Satz)

Ist $a,b \in \mathbb{R}$, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k$$

Aus dem binomischen Satz folgt

für $a = 1, b = 1$ $\quad \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n,$

für $a = 1, b = -1$ $\quad \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0 \quad (n \geq 1)$

Den binomischen Satz beweisen wir durch vollständige Induktion:

Für $n = 0$ ist die Aussage richtig.

Induktionsschritt: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k \Rightarrow (a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n$

$$= (a+b)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^{k+1}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k}b^{k+1} + b^{n+1}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n-k+1}b^k + b^{n+1}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right) a^{n-k+1}b^k + b^{n+1} \overset{(ii)}{=} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n-k+1}b^k + b^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n-k+1}b^k \qquad \square$$

Unter einer **rekursiven Definition** versteht man eine Definition mit Hilfe des Induktionsprinzips. Wir geben einige Beispiele:

1) $n!$ wird für alle $n \in \mathbb{N}_0$ rekursiv definiert durch: $0! := 1$, $(n+1)! := n! \cdot (n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist $n!$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ definiert.

2) a^n wird für alle $n \in \mathbb{N}_0$ rekursiv definiert durch: $a^0 := 1$, $a^{n+1} := a^n \cdot a$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

3) Das Summenzeichen wird sauber rekursiv definiert durch:

$$\sum_{i=1}^{1} a_i := a_1, \quad \sum_{i=1}^{n+1} a_i := \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) + a_{n+1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Analog definiert man das Produktzeichen:

$$\prod_{i=1}^{1} a_i := a_1, \quad \prod_{i=1}^{n+1} a_i := \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot a_{n+1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Fast alle Programmiersprachen verstehen rekursive Definitionen.

Aufgaben

Aufgabe 6.1

Schreiben Sie mit Hilfe des Summenzeichens

a) $-5-2+1+4+7+10+13+16+19$

b) $1+2+4+7+11+16+22+29+37$

c) $1-4+7-10+13-16+19-22,$

d) $2^1-4^2+6^3-8^4+10^5-12^6+14^7-16^8,$

e) $\frac{1}{4\cdot 6}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{6\cdot 8}+\frac{1}{7\cdot 9}+\frac{1}{8\cdot 10}+\frac{1}{9\cdot 11}+\frac{1}{10\cdot 12}+\frac{1}{11\cdot 13}.$

Aufgabe 6.2

Vereinfachen Sie:

a) $\sum_{n=2}^{100}\frac{n+1}{n-1} - \sum_{k=2}^{100}\frac{k+2}{k},$ b) $2\cdot\sum_{m=1}^{50} m + \sum_{r=1}^{50}(r^2+1),$

c) $\sum_{j=2}^{200}\frac{1}{j\cdot(j+2)} - \sum_{i=2}^{100}\frac{1}{i^2+1}.$

Aufgabe 6.3

Berechnen Sie $\sum_{k=1}^{n} k^2$ und $\sum_{k=1}^{n} k^3$ durch Indexverschiebung.

Aufgabe 6.4

Beweisen Sie die Verallgemeinerung der 3. binomischen Formel:

$a^{n+1}-b^{n+1} = (a^n + a^{n-1}b + \ldots + b^n)(a-b)$ für alle $a,b\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$.

Aufgabe 6.5

Beweisen Sie durch vollständige Induktion nach $n\in\mathbb{N}$:

a) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$

b) $1^2-2^2+3^2-4^2+-\ldots-(2n)^2+(2n+1)^2 = (n+1)(2n+1).$

c) Beweisen Sie b) mit Hilfe von a). Hinweis: $(2k)^2 = 4k^2$.

d) Die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen ist n^2.

e) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$

Aufgabe 6.6

Beweisen Sie für alle $n\in\mathbb{N}$: $\sum_{k=1}^{n}\frac{i}{2^i} = 2-\frac{n+2}{2^n}.$

Aufgabe 6.7

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(A) $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \ldots + n\cdot n! = (n+1)! + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

(B) $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + 3\cdot 3! + \ldots + n\cdot n! = (n+1)! - 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

a) Beweisen Sie die richtige Aussage durch vollständige Induktion.

b) Zeigen Sie, daß sich auch bei der falschen Aussage der Schluß von n auf n+1 durchführen läßt. Warum hat dieser Schluß allein keine Beweiskraft?

Aufgabe 6.8

Beweisen Sie durch vollständige Induktion, daß für alle natürlichen Zahlen n die Aussage

$\frac{3}{1^2\cdot 2^2} + \frac{5}{2^2\cdot 3^2} + \frac{7}{3^2\cdot 4^2} + \ldots + \frac{2n+1}{n^2\cdot(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$ wahr ist.

Aufgabe 6.9

Beweisen Sie durch vollständige Induktion, daß sich für alle natürlichen Zahlen n $n^2 + n + 2$ (ohne Rest) durch 2 teilen läßt.

Aufgabe 6.10

Beweisen Sie durch vollständige Induktion, daß für alle natürlichen Zahlen n $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ (ohne Rest) durch 3 teilbar ist.

Aufgabe 6.11

Beweisen Sie: Das Produkt je vier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist (ohne Rest) durch 24 teilbar.

Aufgabe 6.12

Die Folge der FIBONACCI-Zahlen $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ wird rekursiv definiert durch $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ und $f(n+2) = f(n+1) + f(n)$. Zeigen Sie, daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$

Aufgabe 6.13

Es sei $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, $0 < x < 1$. Dann gilt $(1-x)^n < \frac{1}{1+nx}$.

Aufgabe 6.14

Beweisen Sie für $n \in \mathbb{N}$

a) $\sum_{i=1}^{n} \binom{i}{i-1} = \binom{n+1}{n-1}$, b) $\sum_{i=0}^{n} \binom{r+i}{i} = \binom{r+n+1}{n}$, $r \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 6. 15

Für welche natürlichen Zahlen gelten die folgenden Ungleichungen

a) $2n < n!$, b) $2n + 1 < n^2$, c) $n^2 < 2^n$.

Beweisen Sie Ihre Behauptungen durch vollständige Induktion.

7. Kombinatorik

Für den folgenden Satz benötigen wir ein einfaches *Multiplikationsprinzip*:

Wenn eine Folge von r Entscheidungen ansteht, und es

für die erste Entscheidung N_1 Möglichkeiten,
für die zweite Entscheidung N_2 Möglichkeiten,
. . .
. . .
für die r-te Entscheidung N_r Möglichkeiten gibt,
dann gibt es für die Gesamtentscheidung $N_1 \cdot N_2 \cdot \ldots \cdot N_r$ Möglichkeiten.

Beweis durch vollständige Induktion nach der Anzahl r der Entscheidungen.

7.1 Satz

$A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, sei eine n-elementige Menge (kurz: **n-Menge**) und $k \in \mathbb{N}_0$. Dann können aus (den Elementen von) A hergestellt werden:

a) $n!$ **Permutationen** (Anordnungen, Reihenfolgen),

b) $(n)_k := n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$ k-elementige geordnete Teilmengen (kurz: **geordnete k-Teilmengen, k-Ketten**), $(n)_0 := 1$,

c) $\binom{n}{k} := \frac{(n)_k}{k!}$ k-elementige Teilmengen (kurz: **k-Teilmengen**),

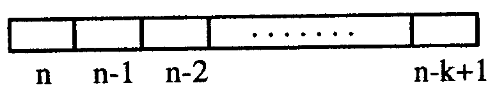
d) 2^n Teilmengen (einschließlich der leeren Menge),

e) n^k k-Tupel.

Nach a) gibt es $n!$ bijektive Abbildungen einer n-Menge auf sich.
Nach b) gibt es $(n)_k$ injektive Abbildungen einer k-Menge in eine n-Menge.
Nach e) gibt es n^k Abbildungen einer k-Menge in eine n-Menge.

Jede Teilmenge von A läßt sich als geordnete Menge auffassen, bei der sich die Elemente in einer ausgezeichneten Ordnung befinden, etwa nach steigenden (oder auch nach fallenden) Indizes geordnet. Nach c) gibt es $\binom{n}{k}$ geordnete k-Teilmengen, bei denen die Elemente nach steigenden Indizes geordnet sind.

Beweis:

b) 

Wir stellen uns k Kästchen vor, in die wir k Elemente von A legen wollen. Für das erste Kästchen stehen alle n Elemente zur Wahl. In jedem dieser Fälle bleiben für das zweite Kästchen $n-1$ Elemente, für das dritte Kästchen jeweils $n-2$ Elemente usw. Für das k-te Kästchen stehen jeweils noch $n-k+1$ Elemente zur Verfügung.
Es gibt also $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) =: (n)_k$ mögliche Belegungen.

(Welches Ergebnis erhält man im Fall $k > n$?)

a) folgt aus b) für $k = n$.

c) Nach b) gibt es $(n)_k$ geordnete k-Teilmengen. Wir teilen sie in Klassen ein. Eine Klasse soll jeweils genau diejenigen geordneten k-Teilmengen enthalten, die dieselben Elemente haben, sich also nur in der Anordnung der Elemente unterscheiden. Nach a) gibt es k! mögliche Reihenfolgen; jede Klasse hat also k! Mitglieder. Daher gibt es $\frac{(n)_k}{k!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}$ Klassen, d.h. k-elementige Teilmengen.

Oder in umgekehrter Richtung argumentiert: $\binom{n}{k}$ bezeichne die noch unbekannte Anzahl der k-Teilmengen einer n-Menge. Aus jeder k-Teilmenge gibt lassen sich k! geordnete k-Teilmengen herstellen. Man erhält so $\binom{n}{k}\cdot k!$ geordnete k-Teilmengen. Nach b) ist $\binom{n}{k}\cdot k! = (n)_k$.

e) Für jede Koordinate eines k-Tupels gibt es n Möglichkeiten.

d) Wir denken uns jede Teilmenge durch ein n-Tupel charakterisiert, das nur Nullen und Einsen enthält (eine Dualzahl der Länge n). Eine Eins oder Null an der i-ten Stelle gibt an, ob das Element a_i zu der Teilmenge gehört oder nicht. Es gibt also 2^n n-Tupel mit Elementen der Menge $\{0,1\}$.

Ein anderer Weg: Man erhält alle Teilmengen einer n-Menge, wenn man die 0-elementigen, 1-elementigen, 2-elementigen, . . . , n-elementigen Teilmengen bildet. Das sind nach c) $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}$. Aus dem binomischen Satz $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$. ❑

Als Anwendung beweisen wir die Eigenschaften der Binomialkoeffizienten 6.7 (i) und (ii) sowie den binomischen Satz 6.8 durch kombinatorische Argumente:

(i) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ für alle k mit $0 \le k \le n$. Es gibt genau so viele k-elementige Teilmengen einer n-Menge wie (n - k)-elementige Komplemente dieser Teilmengen.

(ii) $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ für $1 \le k \le n$.
Die k-Teilmengen einer (n + 1)-Menge lassen sich einteilen in solche, die ein bestimmtes Element enthalten, und solche, die es nicht enthalten. Mengen, die es enthalten, bestehen aus diesem Element und einer (k – 1)-Teilmenge der n-Menge ohne dieses Element. Mengen, die es nicht enthalten, sind k-Teilmengen der n-Menge ohne dieses Element.

9.9) Beim Ausrechnen von $(a + b)^n = (a + b)\cdot(a + b)\cdot\ldots\cdot(a + b)$ treten nur Produkte aus n Faktoren auf, die gleich a oder b sind, z. B. (ohne Benutzung des Kommutativgesetzes) baabab...b. Jedes dieser Produkte läßt sich eindeutig durch eine Teilmenge von $\{1,2, \ldots ,n\}$ beschreiben, die die Plätze angibt, auf denen b steht, im Beispiel $\{1,4,6, \ldots ,n\}$. Aufgrund des Kommutativgesetzes lassen sie sich zusammenfassen; das Produkt $a^{n-k}b^k$ kommt so oft vor, wie es k-Teilmengen von $\{1,2, \ldots ,n\}$ gibt, also $\binom{n}{k}$-mal. ❑

Aufgaben

Aufgabe 7.1
a) In Berlin sind die Telefonnummern siebenstellig. Für wie viele Anschlüsse reichen die Telefonnummern aus? (Beachten Sie, daß am Anfang keine 0 stehen darf.)
b) In einer Stadt mit 200 000 Einwohnern besitzt jeder dritte ein Telefon. Die Telefonnummern bestehen aus den Ziffern 0 bis 9, wobei die 0 nicht als erste Ziffer vorkommen darf. Wie viele Stellen müssen die Telefonnummern mindestens haben?
c) Wie viele sechsstellige Telefonnummern gibt es, bei denen jede Ziffer höchstens einmal vorkommt? (Beachten Sie, daß am Anfang keine 0 stehen darf.)

Aufgabe 7.2
An einem Radrennen nehmen 10 Fahrer teil.
a) Alle erreichen unterschiedliche Zeiten. Auf wie viele Arten können die ersten drei Plätze belegt werden?
b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn auch die Fälle berücksichtigt werden, in denen zwei oder mehr Fahrer zeitgleich das Ziel erreichen?

Aufgabe 7.3
n Kugeln mit den Nummern 1bis n liegen in einer Urne. Nacheinander werden k Kugeln ($k \leq n$) gezogen; dabei wird
a) die jeweils gezogene Kugel nicht zurückgelegt;
b) die jeweils gezogene Kugel wieder zurückgelegt.
Wie viele Möglichkeiten gibt es in den beiden Fällen?

Aufgabe 7.4
a) Wie viele dreistellige Zahlen (erste Ziffer keine Null) gibt es, deren Ziffern alle gerade (ungerade) sind?
b) Wie viele dreistellige Zahlen haben eine gerade Einerziffer, eine ungerade Zehnerziffer und eine durch 3 teilbare Hunderterziffer?
c) Wie viele dreistellige Zahlen bestehen aus drei verschiedenen Ziffern?

Aufgabe 7.5
Beim Morsen verwendet man nur die Zeichen "Punkt" und "Strich" Wie viele Wörter höchstens der Länge fünf sind möglich?

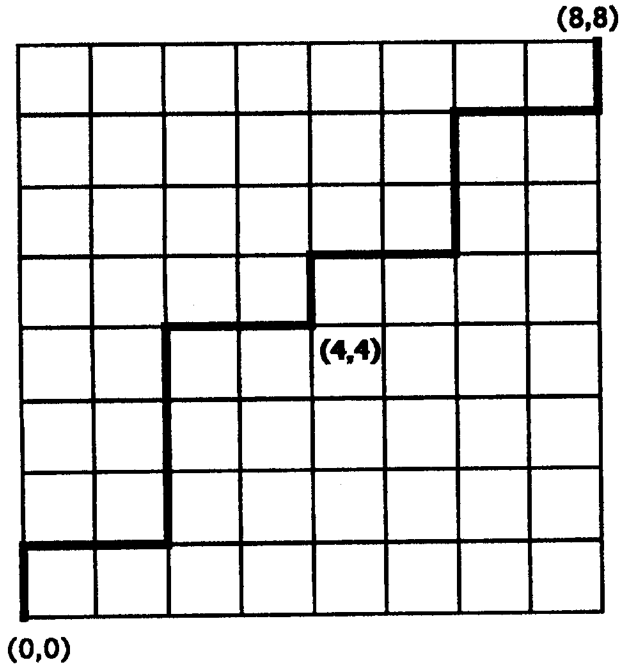
Aufgabe 7.6
Sechs verschieden gefärbte Kugeln sollen in 10 durchnumerierte Kästchen gelegt werden, wobei in einem Kästchen höchstens eine Kugel liegen darf. Wie viele Arten gibt es, die Kugeln unterzubringen?

Aufgabe 7.7
Auf wie viele Arten kann man 8 Türme auf ein Schachbrett setzen, ohne daß sie sich gegenseitig bedrohen?

Aufgabe 7.8
Aus fünf Ehepaaren wird durch Los ein Ausschuß aus vier Personen ausgewählt.
a) Wie viele verschiedene Ausschüsse sind möglich?
b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, zwei Frauen und zwei Männer auszuwählen?
c) In wie vielen Fällen werden nur Männer oder nur Frauen ausgewählt?
d) In wie vielen Fällen besteht der Ausschuß aus zwei Ehepaaren?

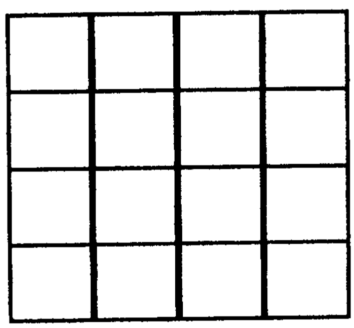
Aufgabe 7.9
Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, die Karten eines Skatspiels auf die drei Spieler und den Skat zu verteilen?

Aufgabe 7.10



A wohnt in (0,0) und arbeitet in (8,8). Sein Arbeitskollege B wohnt in (4,4). A fährt jeden Morgen zur Arbeit und nimmt B mit. Wie viele Wege kann er benutzen, ohne einen Umweg zu fahren?

Aufgabe 7.11
Auf wie viele Arten lassen sich die Felder eines 4×4 - Brettes einfärben, wenn
a) nur die Farben Schwarz und Weiß zur Verfügung stehen,
b) 2 Felder schwarz, 4 weiß und 10 rot gefärbt werden?



Aufgabe 7.12
Wie viele Teiler hat die Zahl $1960 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7^2$?

Aufgabe 7.13
Wie oft tritt beim Ausmultiplizieren von $(a+b)^{27}$ der Summand $a^{11}b^{16}$ auf?

Aufgabe 7.14
Bei wie vielen aller möglichen Tips eines (6 aus 49)-Zahlenlottos sind mindestens zwei der angekreuzten Zahlen benachbart?

Aufgabe 7.15
10 Ehepaare veranstalten eine Tanzparty. Wie viele Tanzpaare sind möglich, wenn Ehepaare nicht miteinander tanzen dürfen?

8. Der Körper der reellen Zahlen

Die reellen Zahlen bilden die Grundlage für die Analysis. Bei einem systematischen Aufbau, in dem die natürlichen Zahlen innerhalb einer axiomatischen Mengenlehre konstruiert bzw. durch die PEANO-Axiome charakterisiert werden, konstruiert man $\mathbb{R}$ aus $\mathbb{N}$ über $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ (Aufbau des Zahlensystems).Wir müssen aus Zeitmangel auf diesen lehrreichen Weg verzichten und beginnen gleich mit einer axiomatischen Charakterisierung der reellen Zahlen.

Die reellen Zahlen bilden einen (ordnungs-)vollständigen angeordneten Körper, den wir ebenfalls mit $\mathbb{R}$ bezeichnen. Die Eigenschaften der reellen Zahlen werden beschrieben durch die Körperaxiome, die Axiome der Anordnung und das Vollständigkeitsaxiom. Die Körperaxiome charakterisieren die algebraische Struktur der reellen Zahlen.

8.1 Körperaxiome

$\mathbb{R}$ ist ein *Körper*, d.h. in $\mathbb{R}$ sind zwei (innere) Verknüpfungen (Addition und Multiplikation)

$$\mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto x+y \qquad\qquad (x,y) \longmapsto x\cdot y$$

erklärt, die folgende Eigenschaften haben:

A1) $a + (b + c) = (a + b) + c$ für alle $a,b,c \in \mathbb{R}$.

A2) $a + b = b + a$ für alle $a,b \in \mathbb{R}$.

A3) Es gibt eine Zahl $0 \in \mathbb{R}$ mit $a + 0 = a$ für alle $a \in \mathbb{R}$.

A4) Zu jedem $a \in \mathbb{R}$ existiert eine Zahl $-a \in \mathbb{R}$ mit $a + (-a) = 0$.

M1) $a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$ für alle $a,b,c \in \mathbb{R}$.

M2) $a\cdot b = b\cdot a$ für alle $a,b \in \mathbb{R}$.

M3) Es gibt eine Zahl $1 \in \mathbb{R}$ mit $a\cdot 1 = a$ für alle $a \in \mathbb{R}$.

M4) Zu jedem $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ existiert eine Zahl $a^{-1} \in \mathbb{R}$ mit $a\cdot a^{-1} = 1$.

D) $a\cdot(b + c) = a\cdot b + a\cdot c$ für alle $a,b,c \in \mathbb{R}$.

Statt "$a\cdot b$" schreibt man meistens nur "ab".

A1, M1 sind die beiden Assoziativgesetze, A2, M2 die Kommutativgesetze, A3 und M3 sichern die Existenz neutraler Elemente (Null, Eins) und A4, M4 die Existenz inverser Elemente, jeweils bezüglich Addition und Multiplikation. Die Verbindung zwischen Addition und Multiplikation sichert das Distributivgesetz D.

Assoziativ- und Kommutativgesetz lassen sich auf endlich viele Summanden oder Faktoren ausdehnen. Man beweist das durch vollständige Induktion.

Die Ähnlichkeit der Axiome von Addition und Multiplikation führt zum Begriff der *kommutativen Gruppe;* das ist eine Menge mit einer inneren Verknüpfung, in der das Assoziativgesetz und das Kommutatativgesetz gelten, in der es ein neutrales Element gibt und zu jedem Element ein inverses Element gibt.