5. Abbildungen

5.1 Definition
X, Y seien nichtleere Mengen. Unter einer **Abbildung** f **von** X **nach** Y versteht man eine Vorschrift, die *jedem* Element von X *genau ein* Element von Y zuordnet.
Für das Tripel (f, X, Y) ist die suggestive Schreibweise $f: X \longrightarrow Y$ üblich.
Die Menge X heißt der *Definitionsbereich*, die Menge Y der *Wertevorrat* von f. Das *Bild* eines Elementes $x \in X$ unter der Abbildung f wird mit f(x) bezeichnet. Häufig wird die Zuordnungsvorschrift durch einen quergestrichenen Pfeil angegeben: $x \longmapsto f(x)$.
Ist f(x) = y, so heißt x ein *Original* von y oder ein *Urbild* zu y.

Die Menge $\operatorname{graph} f := \{(x,f(x)) \mid x \in X\}$ heißt der **Graph** der Abbildung f.

Man beachte: "$\longrightarrow$" steht zwischen Definitionsbereich und Wertevorrat, "$\longmapsto$" zwischen Elementen dieser Mengen.

Statt Abbildung sagt man auch **Funktion** und nennt dann f(x) den Funktionswert von f an der Stelle (oder im Punkt) x.

Beispiele und Definitionen

1) Jeder Tip in der Elferwette des Fußballtotos ist eine Abbildung $\{s_1,\dots, s_{11}\} \longrightarrow \{0,1,2\}$. Jedem der 11 Spiele $s_1,\dots, s_{11}$ wird einer der möglichen Spielausgänge 0 (unentschieden), 1 (Sieg der Heimmannschaft) oder 2 (Sieg der Gastmannschaft) zugeordnet.

2) Durch $g(x) = x + 1$ (für alle $x \in \mathbb{N}$) wird eine Abbildung $g: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definiert. Die Schreibweise mit dem quergestrichenen Pfeil erlaubt es, von einer Abbildung zu sprechen, ohne ihr einen Namen geben zu müssen. Das empfiehlt sich, wenn eine Abbildung nur einmal erwähnt wird, also später nicht mehr auf sie Bezug genommen wird. Man spricht dann einfach von der Abbildung $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $x \longmapsto x + 1$ (für alle $x \in \mathbb{N}$).

Die quantifizierende Wendung "für alle x" gehört strenggenommen zur Zuordnungsvorschrift. Wenn wir sie weglassen, so geschieht das aus Bequemlichkeit. Der Leser kann sie aber leicht ergänzen, da der Definitionsbereich einer Abbildung jeweils vor dem einfachen Pfeil notiert wird. Man beachte, daß dementsprechend die Zuordnungsvorschriften der Abbildungen

$$\begin{array}{c} \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0 \\ x \longmapsto x^2 \end{array} \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{c} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}_0 \\ x \longmapsto x^2 \end{array}$$

verschieden sind; denn bei der ersten Abbildung ist "für alle $x \in \mathbb{N}_0$", bei der zweiten "für alle $x \in \mathbb{Z}$" zu ergänzen.

3) $\mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sqrt{x}$, ist eine Abbildung, denn $\sqrt{x}$ ist eindeutig definiert als die nichtnegative reelle Zahl, deren Quadrat gleich x ist.

4) Die Addition in $\mathbb{R}$ ist eine Abbildung $+: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Statt $+((x,y))$ schreibt man üblicherweise $x + y$.

5) $X \longrightarrow X$, $x \longmapsto x$, heißt die *identische Abbildung* von X. Zeichen: id_X.

Zu einer Abbildung gehören drei Dinge: der Definitionsbereich, der Wertevorrat und die Abbildungsvorschrift. Definitionsbereich und Wertevorrat sind Mengen; was aber ist eine Zuordnungsvorschrift ?

Auch die Zuordnungsvorschrift läßt sich auf den Mengenbegriff zurückführen. Man identifiziert dazu die Abbildung(-svorschrift) mit dem Graphen:

Unter einer Abbildung f von einer Menge X nach einer Menge Y versteht man eine Teilmenge des kartesischen Produkts $X \times Y$ mit der Eigenschaft:

Abb) Zu jedem $x \in X$ gibt es *genau ein* $y \in Y$ mit $(x,y) \in f$.

Statt $(x,y) \in f$ schreibt man $f(x) = y$.

Bei dieser Definition besteht kein Unterschied zwischen der Abbildung(-svorschrift) und dem Graphen. Es ist $f = \{(x,f(x)) \mid x \in X\}$. Dennoch schreibt man, wenn man die Menge (den Graphen) meint, oft zur Verdeutlichung: graph f.

Eine Abbildung ist also Tripel von drei Mengen. Daraus ergibt sich die **Gleichheit von Abbildungen**: Zwei Abbildungen (f, X, Y), (g, A, B) (oder in der üblichen Schreibweise $f: X \longrightarrow Y$, $g: A \longrightarrow B$) sind genau dann gleich, wenn gilt: $X = A \wedge Y = B \wedge f = g$, d.h. wenn sie den gleichen Definitionsbereich und den gleichen Wertevorrat haben, und wenn gilt: $f(x) = g(x)$ für alle x aus dem gemeinsamen Definitionsbereich.

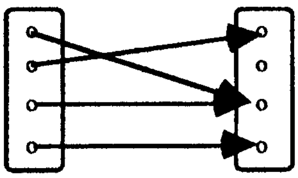
(Bei der Interpretation der Abbildungsvorschrift als Menge, ist die Bedingung $X = A$ eigentlich überflüssig. Denn der Definitionsbereich ergibt sich als Menge der ersten Koordinaten des Graphen.)

Unterscheiden Sie sorgfältig zwischen einer Abbildung (oder Funktion) und dem Bild eines Elementes x (dem Funktionswert an einer Stelle x), also zwischen f und f(x). Am einfachsten denkt man sich f repräsentiert durch den Graphen; f(x) dagegen ist das Bild von x, der Funktionswert an der Stelle x, bei einer Funktion $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ die Höhe des Punktes (x,f(x)) über der x-Achse.

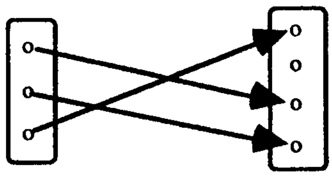
Unter einer Abbildung können verschiedene Elemente des Definitionsbereichs den gleichen Bildpunkt haben. Eine Abbildung, bei der das nicht passiert, bei der verschiedene Originale auch verschiedene Bilder haben, nennt man injektiv. Wir werden allerdings die Kontraposition dieser Aussage formulieren, da sie beweistechnisch leichter zu handhaben ist. Ferner kann es im Wertevorrat Elemente geben, die kein Original besitzen. Mann nennt eine Abbildung surjektiv, wenn alle Elemente des Wertevorrats ein Original haben, wenn alle Bildpunkte sind.

Definition 5.2
Eine Abbildung $f: X \longrightarrow Y$ heißt
injektiv, wenn für alle $x_1, x_2 \in X$ gilt: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$,
surjektiv, wenn es zu jedem $y \in Y$ ein $x \in X$ gibt mit $f(x) = y$.
bijektiv, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

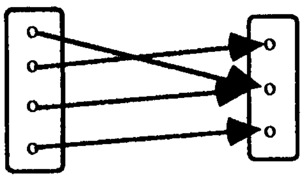
Eine Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ ist genau dann $\left\{\begin{matrix}\text{injektiv}\\ \text{surjektiv}\\ \text{bijektiv}\end{matrix}\right\}$, wenn jedes $y \in Y$ $\left\{\begin{matrix}\text{höchstens}\\ \text{mindestens}\\ \text{genau}\end{matrix}\right\}$ ein Original besitzt, mit anderen Worten, wenn die Gleichung $f(x) = b$ für jedes $b \in Y$ $\left\{\begin{matrix}\text{höchstens}\\ \text{mindestens}\\ \text{genau}\end{matrix}\right\}$ eine Lösung hat.



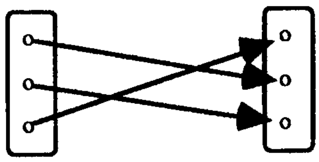
weder injektiv noch surjektiv



injektiv, aber nicht surjektiv



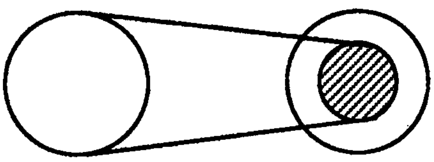
surjektiv, aber nicht injektiv



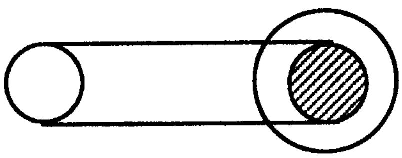
injektiv und surjektiv, also bijektiv

Im Pfeildiagramm einer $\left\{\begin{matrix}\text{injektiven}\\ \text{surjektiven}\\ \text{bijektiven}\end{matrix}\right\}$ Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ kommt bei jedem $y \in Y$ $\left\{\begin{matrix}\text{höchstens}\\ \text{mindestens}\\ \text{genau}\end{matrix}\right\}$ ein Pfeil an.

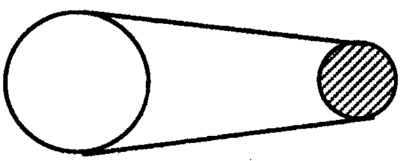
Neben den Pfeildiagrammen benutzt man zur Veranschaulichung von Abbildungen auch Darstellungen, in denen Definitionsbereich und Wertevorrat durch Punktmengen in der Ebene repräsentiert werden. (Die Menge der Bildpunkte ist jeweils schraffiert.)



weder injektiv noch surjektiv



injektiv, aber nicht surjektiv



surjektiv, aber nicht injektiv

injektiv und surjektiv, also bijektiv

Beispiele:

1) Die Abbildung $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, definiert durch $f(x) = x + 1$, ist injektiv; denn für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$ gilt: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 + 1 = x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$. Sie ist aber nicht surjektiv, denn 1 besitzt kein Original. (Die Gleichung $f(x) = 1$ hat in $\mathbb{N}$ keine Lösung.)

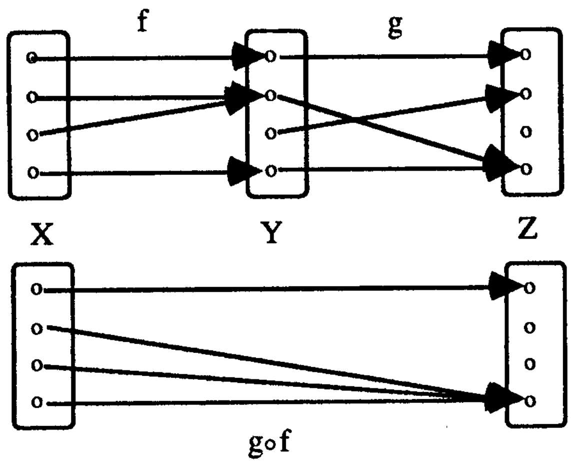
2) Die Abbildung g: $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}_0$, definiert durch $f(x) = |x|$, ist surjektiv; denn für jedes $b \in \mathbb{N}_0$ besitzt die Gleichung $g(x) = b$, d.h. $|x| = b$, mindestens eine Lösung, nämlich b. Sie ist aber nicht injektiv, denn 1 hat zwei Originale: 1 und –1.

5.3 Definition

Sind zwei Abbildungen $f : X \longrightarrow Y$ und $g : Y \longrightarrow Z$ gegeben, so wird durch

$g \circ f(x) := g(f(x))$ für alle $x \in X$

eine Abbildung $g \circ f : X \longrightarrow Z$ definiert, die **Komposition**[1] von f und g. Das Zeichen $g \circ f$ wird gelesen: g nach f, weil g erst nach f auszuführen ist.



$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

$$X \xrightarrow[g \circ f]{} Z$$

$$x \longmapsto f(x) \longmapsto g(f(x))$$

$$x \longmapsto g \circ f(x)$$

Die Definition läßt sich verallgemeinern: Es genügt, wenn der Wertevorrat oder sogar nur die Menge aller Bildelemente der ersten Abbildung im Definitionsbereich der zweiten Abbildung enthalten ist, wenn also jeder ankommende Pfeil Anschluß hat.

Beispiele:
Es sei $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x + 1$ und $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ durch $g(x) = x^2$.
(f addiert 1, g quadriert.) Dann ist $g \circ f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x+1) = (x+1)^2$
und $f \circ g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 1$.
($g \circ f$ addiert erst 1 quadriert dann; $f \circ g$ quadriert erst und addiert anschließend 1. Die in einer Komposition rechts stehende Abbildung wird zuerst ausgeführt!)

☞ Die Komposition von Abbildungen ist nicht kommutativ.

Weiter ist $f \circ f\,(x) = f(f(x)) = f(x + 1) = (x + 1) + 1 = x + 2$ und $g \circ g(x) = g(g(x)) = g(x^2) = (x^2)^2 = x^4$.

Wir beweisen nun die wichtigste Eigenschaft der Komposition:

5.4 Satz

Die Komposition von Abbildungen ist assoziativ:
Ist $f: X \longrightarrow Y$, $g: Y \longrightarrow Z$, $h: Z \longrightarrow W$, dann gilt $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

Wir können daher die Klammern weglassen und einfach $h \circ g \circ f$ schreiben, ohne Verwechslungen befürchten zu müssen.

---

[1] Nacheinanderausführung, Verkettung

Beweis:
$(h\circ g)\circ f$ und $h\circ(g\circ f)$ sind Abbildungen von X nach W. Um nachzuweisen, daß diese beiden Abbildungen gleich sind, müssen wir zeigen, daß $(h\circ g)\circ f\,(x) = h\circ(g\circ f)(x)$ für alle $x\in X$ gilt. Es sei also $x\in X$. Dann ist $(h\circ g)\circ f\,(x) = (h\circ g)(f\,(x)) = h(g(f(x))) = h(g\circ f(x))$
$= h\circ(g\circ f)(x)$. ❑

Beispiele:
Die Abbildungen f,g,h,k von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ seien definiert durch $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$, $h(x) = 2x$, $k(x) = 5$. Alle Kompositionen dieser Abbildungen sind wieder Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, und es gilt für alle $x\in\mathbb{R}$:

$h\circ g\circ f(x) = h\circ g(x + 1) = h((x + 1)^2) = 2\,(x + 1)^2$,
$g\circ h\circ f(x) = g\circ h(x + 1) = g(2\,(x + 1)) = 4\,(x + 1)^2$,
$f\circ f\circ h(x) = f\circ f(2x) = f(2x + 1) = 2x + 2$,
$g\circ h\circ h(x) = 16x^2$, $k\circ h\circ g(x) = 5$, $f\circ k\circ h(x) = 6$, $g\circ f\circ k(x) = 35$.

5.5 Satz
Es sei $f\colon X \longrightarrow Y$, $g\colon Y \longrightarrow Z$. Dann gilt:
a) Sind f und g injektiv, so ist auch $g\circ f$ injektiv.
b) Sind f und g surjektiv, so ist auch $g\circ f$ surjektiv.
c) Sind f und g bijektiv, so ist auch $g\circ f$ bijektiv.

Beweis:

a) f und g seien injektiv. Dann gilt für alle $x_1,x_2\in X$:

$$\begin{aligned} g\circ f(x_1) = g\circ f(x_2) &\Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \\ &\Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \quad \text{(weil g injektiv)} \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \quad \text{(weil f injektiv)} \end{aligned}$$

b) f und g seien surjektiv. Es sei $z\in Z$. Da g surjektiv ist, existiert ein $y\in Y$ mit $g(y) = z$. Da f surjektiv ist, existiert ein $x\in X$ mit $f(x) = y$. Also ist $g\circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = z$, d.h. x ist ein Original von z unter $g\circ f$.

c) folgt aus a) und b). ❑

5.6 Satz
Es sei $f\colon X \longrightarrow Y$ und $g\colon Y \longrightarrow X$. Gilt $g\circ f = id_X$, dann ist f injektiv und g surjektiv.

Merke: Die innen stehende Abbildung ist injektiv.

Beweis:
1) f ist injektiv, denn für alle $x_1, x_2\in X$ gilt: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2))$
$\Rightarrow g\circ f(x_1) = g\circ f(x_2) \Rightarrow id_X(x_1) = id_X(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
2) g ist surjektiv, denn für $x\in X$ gilt $x = id_X(x) = g\circ f(x) = g(f(x)) = x$ und $f(x)\in Y$, d.h. $f(x)$ ist ein Original von x unter g.

❑

5.7 Definition

Gibt es zu einer Abbildung $f: X \longrightarrow Y$ eine Abbildung $g: Y \longrightarrow X$ mit

$$g \circ f = id_X \text{ und } f \circ g = id_Y,$$

so heißt g eine **Umkehrabbildung** oder eine **Inverse** zu (oder von) f (und f heißt **umkehrbar** oder **invertierbar**).

5.8 Satz

a) Eine Abbildung ist genau dann umkehrbar, wenn sie bijektiv ist.

b) Zu einer Abbildung $f: X \longrightarrow Y$ gibt es höchstens eine Umkehrabbildung.
Wir dürfen also im Falle der Existenz von *der* Umkehrabbildung oder von *der* Inversen von f sprechen und das Zeichen f^{-1} einführen.

Beweis:

a) Ist $f: X \longrightarrow Y$ invertierbar, so gibt es eine Abbildung $g: Y \longrightarrow X$ mit $g \circ f = id_X$ und $f \circ g = id_Y$. Nach Satz 5.6 folgt aus $g \circ f = id_X$ die Injektivität von f und aus $f \circ g = id_Y$ die Surjektivität von f.

Ist umgekehrt $f: X \longrightarrow Y$ bijektiv, dann gibt zu jedem $y \in Y$ genau ein $x \in X$. Daher wird durch

$$g(y) := x \quad :\Leftrightarrow \quad f(x) = y$$

eine Abbildung $g: Y \longrightarrow X$ definiert, und es gilt
$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = x$ für alle $x \in X$, d.h. $g \circ f = id_X$ und
$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x) = y$ für alle $y \in Y$, d.h. $f \circ g = id_Y$.
Die Abbildung $g: Y \longrightarrow X$ ist also invers zu f.

b) Es sei $f: X \longrightarrow Y$.
$g: Y \longrightarrow X$ sei eine Inverse zu f. Dann gilt $g \circ f = id_X$.
$h: Y \longrightarrow X$ sei eine Inverse zu f. Dann gilt $f \circ h = id_Y$.

Dann folgt
$$\left.\begin{array}{l} g \circ f \circ h = (g \circ f) \circ h = id_X \circ h = h \\ g \circ f \circ h = g \circ (f \circ h) = g \circ id_Y = g \end{array}\right\} \Rightarrow g = h.$$
❑

5.9 Satz

a) $f: X \longrightarrow Y$ sei bijektiv und $f^{-1}: Y \longrightarrow X$ die Umkehrabbildung von f. Dann ist auch $f^{-1}: Y \longrightarrow X$ bijektiv, und es gilt $(f^{-1})^{-1} = f$.

b) $f: X \longrightarrow Y$ sei bijektiv und $f^{-1}: Y \longrightarrow X$ die Umkehrabbildung von f,
$g: Y \longrightarrow Z$ sei bijektiv und $g^{-1}: Z \longrightarrow Y$ die Umkehrabbildung von g.
Dann existiert die Umkehrabbildung von $g \circ f: X \longrightarrow Z$, und es ist $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Beweis:

a) Ist $f^{-1}: Y \longrightarrow X$ die Umkehrabbildung von $f: X \longrightarrow Y$, so gilt $f^{-1} \circ f = id_X$ und $f \circ f^{-1} = id_Y$. Daher ist auch $f: X \longrightarrow Y$ die Umkehrabbildung von $f^{-1}: Y \longrightarrow X$, d.h. $(f^{-1})^{-1} = f$.

b) Nach Voraussetzung gilt $f^{-1}\circ f = id_X$ und $f\circ f^{-1} = id_Y$ sowie $g^{-1}\circ g = id_Y$ und $g\circ g^{-1} = id_Z$. Dann ist $f^{-1}\circ g^{-1}: X \longrightarrow Z$ ist die Umkehrabbildung von $g\circ f: X \longrightarrow Z$; denn es gilt $f^{-1}\circ g^{-1}\circ g\circ f = f^{-1}\circ(g^{-1}\circ g)\circ f = f^{-1}\circ id_Y\circ f = f^{-1}\circ f = id_X$ und $g\circ f\circ f^{-1}\circ g^{-1} = g\circ(f\circ f^{-1})\circ g^{-1}$ $= g\circ id_Y\circ g^{-1} = g\circ g^{-1} = id_Z$. Daher ist $(g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1}$. ❑

Wir wollen nun die **Umkehrabbildung** einer bijektiven Abbildung $f: X \longrightarrow Y$ bestimmen. Da f bijektiv ist, gibt es zu jedem $y\in Y$ genau ein $x\in X$ mit $f(x) = y$. (Die Gleichung $f(x) = y$ besitzt für jedes $y\in Y$ genau eine Lösung x.)
Definiert man $f^{-1}: Y \longrightarrow X$ durch
$f^{-1}(y) = x :\Leftrightarrow f(x) = y$ für alle $y\in Y$[2],
dann gilt sowohl $f(f^{-1}(y)) = y$ als auch $f^{-1}(f(x)) = x$.

Beispiele:

1) Die Abbildung $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = ax + b$, ist für $a \neq 0$ bijektiv. Für $y\in Y$ hat die Gleichung $f(x) = ax + b = y$ die Lösung $x = \frac{1}{a}(y - b)$. Dem $y\in Y$ muß also durch die Umkehrfunktion das Element $x = \frac{1}{a}(y - b)$ zugeordnet werden:
$f^{-1}(y) = \frac{1}{a}(y - b)$ für alle $y\in Y$. Ersetzt man den "Dummy" y durch den "Dummy" x, lautet die Zuordnungsvorschrift der Umkehrfunktion (in gewohnter Weise):
$f^{-1}(x) = \frac{1}{a}(x - b)$ für alle $x\in Y$.

2) Die Abbildung $g: \mathbb{R}\backslash\{3\} \longrightarrow \mathbb{R}\backslash\{0\}$ mit $g(x) = \frac{1}{x-3}$ ist bijektiv. Aus $y = \frac{1}{x-3}$ folgt $x = \frac{1}{y} + 3$. Daher gilt für die Umkehrabbildung $g^{-1}: \mathbb{R}\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}\backslash\{3\}$:
$g^{-1}(y) = \frac{1}{y} + 3$ für alle $y\in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, nach "Dummy-Austausch" also $g^{-1}(x) = \frac{1}{x} + 3$ für alle $x\in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

3) Die Abbildung $f: \mathbb{R}\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}\backslash\{0\}$, definiert durch $f(x) = \frac{1}{x}$ ist zu sich selbst invers: $f\circ f = id_{\mathbb{R}\backslash\{0\}}$. (Daher ist im kartesischen Koordinatensystem der Graph von f symmetrisch zur Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten.)

Wenn sich eine bijektive Abbildung als Komposition einfacher Abbildungen darstellen läßt, deren Umkehrabbildungen man kennt, kann man die Umkehrfunktion unmittelbar nach 5.13a angeben: Die Abbildung g aus Beispiel 2 subtrahiert erst 3 und bildet dann den Kehrwert. Die Umkehrabbildung bildet erst den Kehrwert und addiert dann 3, also
$g^{-1}(x) = \frac{1}{x} + 3$.

---

[2] In der Sprache der Graphen bedeutet das: $(y,x)\in f^{-1} :\Leftrightarrow (x,y)\in f$, d.h. graph f^{-1} entsteht aus graph f durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten (an der Diagonale $\{(x,x) \mid x\in \mathbb{R}\}$ des kartesischen Produkts $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$).

Aufgaben

Aufgabe 5.1
Es sei $X = \{1,2\}$. Welche der folgenden Mengen ist Graph einer Abbildung von X nach X ?
$\{(1,1), (2,1), (1,2)\}$, $\{(1,1)\}$, $\{(1,2), (2,1)\}$, $A \times A$, $\{(1,1), (2,2)\}$.

Aufgabe 5.2
Geben Sie alle Abbildungen an
a) von $\varnothing$ nach Y, b) von X nach $\varnothing$, c) von $\{\varnothing\}$ nach Y, d) von X nach $\{\varnothing\}$.

Aufgabe 5.3
Es sei $X = \{0\}$, $Y = \{1, 2\}$.
a) Geben Sie die Pfeildiagramme aller Abbildungen von X nach X, von X nach Y, von Y nach X und von Y nach Y an.
b) Welche dieser Abbildungen sind injektiv, surjektiv oder bijektiv?
c) Geben Sie bei bijektiven Abbildungen die Umkehrabbildung an.

Aufgabe 5.4
a) Geben Sie alle Abbildungen von $X = \{0,1,2\}$ nach $Y = \{0,1\}$.
b) Welche der Abbildungen sind injektiv, surjektiv, bijektiv ?
c) Geben Sie von bijektiven Abbildungen die Umkehrabbildung an.

Aufgabe 5.5
Geben Sie eine nicht surjektive Abbildung $f\colon X \longrightarrow Y$ und eine nicht injektive Abbildung $g\colon Y \longrightarrow Z$ so an, daß die Komposition $g \circ f$ bijektiv ist.

Aufgabe 5.6
Schreiben Sie die Bedingungen der Injektivität und der Surjektivität mit Hilfe von Quantoren, und bilden Sie jeweils die Negation.

Aufgabe 5.7
Es sei $\mathbb{R}^+ := \{x \mid x \in \mathbb{R}, x > 0\}$. Für $x \in \mathbb{R}$ sei $q(x) := x^2$. Ist q injektiv, surjektiv, bijektiv, wenn a) $q\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, b) $q\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, c) $q\colon \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, d) $q\colon \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$?
Bestimmen Sie gegebenenfalls die Umkehrfunktion.

Aufgabe 5.8
Welche der folgenden Abbildungen sind injektiv, surjektiv oder sogar bijektiv? Bestimmen Sie bei bijektiven Abbildungen die Umkehrabbildung.

a) $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3$

b) $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^4$

c) $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit $f(x) = x^4$

d) $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = -x-1$

e) $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{wenn } x \geq 0 \\ -x^2, & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$

f) $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 - x$,

g) $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit $f(x) = |x|$, (Es ist $\mathbb{R}_0^+ := \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$.)

h) $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit $f(x) = |x-1|$,

i) $f\colon \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{x}$, ($\sqrt{a}$ ist definiert als die positive Lösung

j) f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{|x|}$, der Gleichung $x^2 = a$.)

k) f: $\mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}\setminus\{1\}$ mit $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$,

l) f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ mit $f(x) = [x]$, ([x] bezeichnet die größte ganze Zahl, kleiner oder gleich x .)

m) f: $\mathbb{R} \longrightarrow [0,1[$ mit $f(x) = x - [x]$. (Es ist $[0,1[:= \{x \mid x \in \mathbb{R}, 0 \leq x < 1\}$.)

Aufgabe 5.9

Beweisen Sie: Jede streng monotone Funktion f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist injektiv.

Aufgabe 5.10

Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität und Surjektivität. Bestimmen Sie im Fall der Bijektivität die Umkehrabbildung, im Fall der Injektivität nach geeigneter Verkleinerung des Wertevorrats.

a) f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = ax + b$ mit $a,b \in \mathbb{R}$,

b) g: $\mathbb{R}\setminus\{b\} \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $g(x) = \frac{x-a}{x-b}$ mit $a,b \in \mathbb{R}$,

c) h: $\mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ (X eine Menge), definiert durch $h(A) = X \setminus A$ für alle $A \in \mathcal{P}(X)$.

Aufgabe 5.11

Es sei f: $\mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ definiert durch $f(x) = \sqrt{x}$ und g: $\mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ durch $g(x) = x^2 + 2x + 1$. Berechnen Sie $g \circ f$ und $f \circ g$.

Aufgabe 5.12

Die Abbildung f: $[0,1] \longrightarrow [0,1]$ werde definiert durch $f(x) := \begin{cases} 2x, & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2x, & \text{für } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$.

Wie sieht der Graph von $\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{\text{n-mal}}$ aus?

Aufgabe 5.13

Es sei f: $A \longrightarrow B$, g: $B \longrightarrow C$. Dann gilt:

a) $g \circ f$ injektiv $\Rightarrow$ f injektiv,

b) $g \circ f$ surjektiv $\Rightarrow$ g surjektiv,

c) $g \circ f$ bijektiv $\Rightarrow$ f injektiv und g surjektiv.

Aufgabe 5.14

Geben Sie für die folgenden Funktionen Definitionsbereich und Wertevorrat (möglichst groß) so an, daß sie bijektiv sind, und bestimmen Sie den Term der Umkehrfunktion:

a) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 7$, b) $g(x) = 1 - \frac{2}{x}$, c) $h(x) = \frac{1}{x-2}$, d) $i(x) = (x+5)^3 - 10$,

e) $j(x) = = \frac{x+3}{x-2}$, f) $k(x) = (x-4)^2$, g) $p(x) = \frac{x}{5x-2}$, h) $q(x) = \frac{2x^2 - x}{x}$.

6. Die natürlichen Zahlen, vollständige Induktion

Bevor wir die vollständige Induktion behandeln, wollen wir eine nützliche Schreibweise einführen. Es ist üblich und zweckmäßig eine Summe mit vielen Summanden abgekürzt zu schreiben, indem man das Summenzeichen benutzt.

Eine Summe der Form $a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n$ schreibt man mit Hilfe des Summenzeichens:

$\sum_{i=m}^{n} a_i$. (Eine einwandfreie Definition des Summenzeichens geben wir am Ende dieses Kapitels.) Natürlich ist es erlaubt, anstelle von i einen anderen Summationsindex, etwa j oder k, zu wählen, d.h. $\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{j=m}^{n} a_j = \sum_{k=m}^{n} a_k$.

6.1 Rechenregeln:

1) $c \cdot \sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m}^{n} c \cdot a_i$

2) $\sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=m}^{n} b_i = \sum_{i=m}^{n} (a_i + b_i)$

3) $(\sum_{i=m}^{n} a_i) \cdot (\sum_{j=r}^{s} b_j) = \sum_{i=m}^{n} (\sum_{j=r}^{s} a_i b_j) = \sum_{j=r}^{s} (\sum_{i=m}^{n} a_i b_j)$

4) $\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m+r}^{n+r} a_{i-r} = \sum_{i=m-r}^{n-r} a_{i+r}$ (Indextransformation)

1) folgt aus dem Distributivgesetz, 2) aus dem Kommutativgesetz, 3) aus diesen beiden Gesetzen.
4) Bei der Indextransformation erfordert eine Subtraktion von den Grenzen eine Addition zum Index und analog eine Addition zu den Grenzen eine Subtraktion vom Index.

Beispiel:

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $s_n := \sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n$.

a) Wir berechnen die Summe direkt (nach der Methode des kleinen GAUSS):

$$\begin{array}{l} s_n = 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n \\ \underline{s_n = n + (n-1) + \ldots + 2 + 1} \\ 2 s_n = (n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1) + (n+1) = n \cdot (n+1), \quad s_n = \frac{1}{2} n (n+1) \end{array}$$

b) Berechnung durch Indextransformation:

$$\sum_{i=1}^{n} (i+1)^2 - \sum_{i=1}^{n} i^2 = \sum_{i=1}^{n} (i+1)^2 - \sum_{i=0}^{n-1} (i+1)^2 = (n+1)^2 - 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} (i+1)^2 - \sum_{i=1}^{n} i^2 = \sum_{i=1}^{n} ((i+1)^2 - i^2) = \sum_{i=1}^{n} (2i+1) = 2 \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1 = 2 s_n + n$$

Also $2 s_n = (n+1)^2 - 1 - n = (n+1)^2 - (n+1) = n (n+1)$.

Die natürlichen Zahlen werden charakterisiert durch die PEANO-Axiome. (In einem axiomatischen Aufbau der Mengenlehre sind diese "Axiome" beweisbar.) Eines dieser Axiome ist das Induktionsaxiom.