3. Gleichheit

Wir beschäftigen uns in der Mathematik mit *Objekten* wie Zahlen, Geraden, Funktionen und geben solchen Objekten *Namen*, meistens Symbole wie Buchstaben, Ziffern oder Aneinanderreihungen von Symbolen. Dabei kommt es vor, daß ein Objekt mehrere Namen hat, z. B. 7 und 2 + 5. Sind a und b Namen für dasselbe Objekt, so schreibt man a = b.

Leider bietet diese anschauliche Vorstellung keine sichere Grundlage für den Umgang mit dem Gleichheitszeichen. Wir haben Gleichheit mit Identität erklärt, was aber bedeutet Identität? Wir geben daher Anweisungen für den Umgang mit dem Gleichheitszeichen.

3.1 Axiome der Gleichheit:
= ist ein zweistelliges Prädikat. Statt =ab schreibt man üblicherweise a = b (gelesen: a gleich b). Sind a, b Objekte und ist P ein Prädikat, so gilt:

Gl_0)	$a = b \wedge Pa \Rightarrow Pb$	Universelle Ersetzbarkeit
Gl_1)	$a = a$	Reflexivität
Gl_2)	$a = b \Rightarrow b = a$	Symmetrie
Gl_3)	$a = b \wedge b = c \Rightarrow a = c$	Transitivität

Statt $\neg(a = b)$ schreibt man $\neq$ und liest: a ungleich b.

Die Axiome der Gleichheit sind nicht unabhängig voneinander. Es genügt Gl_0 und Gl_1 zu fordern. Gl_2 und Gl_3 lassen sich dann schon beweisen.

Ist a = b, so gilt nach Gl_0 jede Aussage, die auf a zutrifft auch für b. Nimmt man statt P das Prädikat $\neg P$, so erhält man die einfache Folgerung: Ist a = b, so gilt jede Aussage, die auf a nicht zutrifft, auch für b nicht. Als Ergebnis halten wir fest:

Ist a = b, dann bleibt der Wahrheitswert jeder Aussage unverändert, wenn man in ihr a durch b ersetzt. (Kommt a in der Aussage mehrfach vor, so braucht es nicht notwendig an jeder Stelle gegen b ausgetauscht zu werden.)

Wenn man Gleichheit als logische Identität versteht, wäre es grober Unfug, Dinge gleich nennen oder als gleich definieren zu wollen. Das findet man beispielsweise gelegentlich in Büchern über Vektorrechnung. Man nennt dort zwei Pfeile, bestimmt durch Anfangs- und Endpunkt, gleich, wenn sie gleiche Länge und gleiche Richtung haben. Zwei Objekte sind gleich, oder sie sind es nicht. Daran ist nichts zu ändern. Die Möglichkeit, Objekte, die nur in gewissen Eigenschaften übereinstimmen, zu identifizieren, bietet sich später im Rahmen der Mengenlehre. (Äquivalenzrelationen)

Oft geben wir einem Objekt einen neuen, im allgemeinen: einen kürzeren Namen. Dazu benutzen wir das Zeichen := oder =:, gelesen: *per definitionem gleich*. Der Doppelpunkt steht auf der Seite des zu Definierenden, des neuen Symbols.

4. Mengen

Unter einer Menge versteht man die Zusammenfassung von Objekten zu einem neuen Objekt.
Die Aussage $a \in M$ bedeutet:

a ist ein Element der Menge M,
a gehört zu M,
a ist aus M,
a liegt in M.

Die Negation dieser Aussage $\neg(a \in M)$ schreibt man $a \notin M$.
Statt $a \in M \wedge b \in M$ schreibt man kurz: $a, b \in M$.

4.1 Axiom der Gleichheit von Mengen
Zwei Mengen sind schon dann *gleich*, wenn sie nur dieselben Elemente haben.

Eine Menge ist durch die Angabe ihrer Elemente eindeutig bestimmt. Darüber hinaus gibt es für Mengen keine Unterscheidungsmerkmale. Mengen mit nicht allzu vielen Elementen kann man daher durch Aufschreiben ihrer Elemente angeben. Man benutzt dazu geschweifte Klammern ("Mengenklammern"). Bei dieser Schreibweise handelt es sich um eine Liste der Elemente der betreffenden Menge. Die Reihenfolge, in der die Elemente notiert werden, ist ohne Bedeutung. Mehrfachnotierungen eines Elements bleiben wirkungslos.

Beispiele: $2 \in \{-1, 2\}$; $1 \notin \{-1, 2\}$; $\{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1\}$; $\{1, 2, 1, 1\} = \{1, 2\}$.

Eine Menge $\{a\}$ mit einem Element ist sorgfältig zu unterscheiden von dem Element a selbst.
Es gilt: $x \in \{a\} \Leftrightarrow x = a$.

4.2 Definition
$A \subset B$, gelesen: A ist **Teilmenge** (oder Untermenge) von B, A ist enthalten in B. bedeutet:
Jedes Element von A gehört auch zu B. ("$\subset$" heißt die *Inklusion.*)
Statt $A \subset B$ schreibt man auch $B \supset A$ und liest: B ist **Obermenge** von A, B umfaßt A.

Unter Verwendung der logischen Zeichen läßt sich die Definition 4.2 schreiben:

$$A \subset B \;:\Leftrightarrow\; \bigwedge_x (x \in A \;\Rightarrow\; x \in B)$$

Wenn $A \subset B$ und $B \subset A$, dann $A = B$. Umgekehrt folgt aus $A = B$ sowohl $A \subset B$ als auch $B \subset A$.

Es bezeichnet:
$\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \ldots,$
$\mathbb{N}_0$ die Menge der natürlichen Zahlen einschließlich der Null $0, 1, 2, 3, \ldots,$
$\mathbb{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots,$
$\mathbb{Q}$ die Menge der rationalen Zahlen, das sind alle Zahlen, die sich als Bruch
$\frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ schreiben lassen,
$\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen (veranschaulicht durch alle Punkte der Zahlengeraden).

Beispiele:
$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

$2 \in \mathbb{N}$, $-7 \notin \mathbb{N}$, $\frac{9}{3} \in \mathbb{N}$, $-7 \in \mathbb{Z}$, $\frac{9}{3} \in \mathbb{Z}$, $\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$, $2 \in \mathbb{Q}$, $-7 \in \mathbb{Q}$, $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$, $\ln 2 \notin \mathbb{Q}$, $\pi \notin \mathbb{Q}$, $2 \in \mathbb{R}$, $-7 \in \mathbb{R}$, $\frac{2}{3} \in \mathbb{R}$, $\sqrt{3} \in \mathbb{R}$, $\ln 2 \in \mathbb{R}$, $\pi \in \mathbb{R}$.

Die **leere Menge,** Zeichen: $\varnothing$, ist Teilmenge jeder Menge.

Denn ist A eine beliebige Menge, so gilt für alle x: $x \in \varnothing \Rightarrow x \in A$. (Implikation mit falscher Prämisse!)

Zu einer Menge A und einer Aussageform Px gibt es genau eine Menge B, so daß für alle x gilt:

$$x \in B \Leftrightarrow x \in A \wedge Px.$$

Für diese Menge verabreden wir die Bezeichnung $\{x \mid x \in A \wedge Px\}$. Wir merken uns:

Die Aussagen $y \in \{x \mid x \in A \wedge Px\}$ und $y \in A \wedge Py$ sind äquivalent.

Beispiele:

$y \in \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge 3 \leq x \leq 7\} \Leftrightarrow y \in \mathbb{N} \wedge 3 \leq y \leq 7$.

$y \in \{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge x$ ist Teiler von $12\} \Leftrightarrow y \in \mathbb{Z} \wedge y$ ist Teiler von 12.

Man kann auf diese Weise nur aus einer Menge Elemente mit einer bestimmten Eigenschaft aussondern. Wünschenswerter wäre, zu jeder Eigenschaft P die Menge $\{x \mid Px\}$ bilden zu können, ohne Rücksicht darauf, ob diese Objekte schon Elemente einer Menge A sind oder nicht. Leider führt dieser Versuch zu Widersprüchen (*mengentheoretische Antinomien* oder *Paradoxien*).

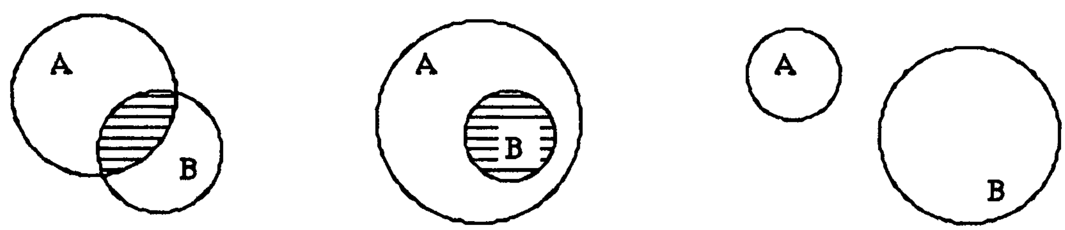
4.3 Definition Sind A und B Mengen, so heißt

$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ (A geschnitten B) der **(Durch-)Schnitt,**

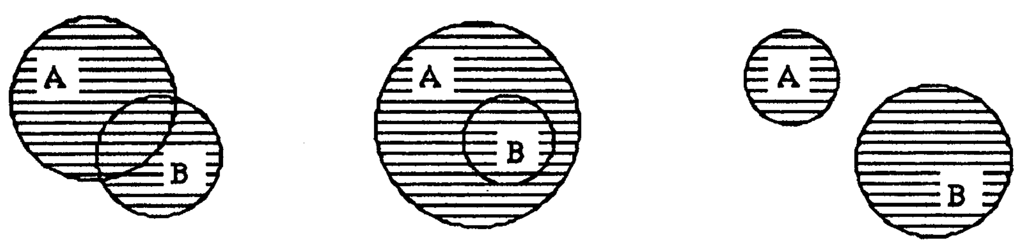
$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ (A vereinigt B) die **Vereinigung,**

$A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ (A ohne B) die **Differenz** von A und B.

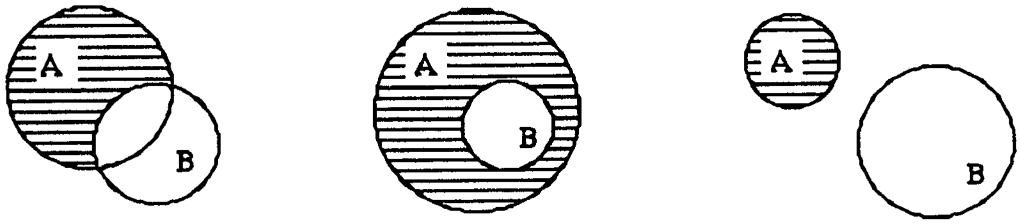
Ist $A \cap B = \varnothing$, so nennt man A und B **disjunkt.**



$A \cap B$ ist schraffiert



$A \cup B$ ist schraffiert



$A \setminus B$ ist schraffiert

Beispiele:

1) $\{1, 2, 3\} \cap \{1, 3, 5, 7\} = \{1, 3\}$

   Es seien $m,n \in \mathbb{N}$. Ist A die Menge aller Teiler von m und B die Menge aller Teiler von n, dann ist $A \cap B$ die Menge der gemeinsamen Teiler von m und n.

2) $\{1,2,3\} \cup \{2,3,4\} = \{1,2,3,4\}$

   $\mathbb{N} \cup \{0\} = \mathbb{N}_0$

3) $\{1,2,3\} \setminus \{2,3,4\} = \{1\}$

   $\{1,2,3\} \setminus \{4,5\} = \{1,2,3\}$

   $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist die Menge der irrationalen Zahlen.

   $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist die Menge der reellen Zahlen ohne die Null.

4.4 Satz A, B, C seien Mengen. Dann gelten die folgenden Aussagen:

a) $A \cap B = B \cap A$ — Kommutativgesetze
   $A \cup B = B \cup A$

b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ — Assoziativgesetze
   $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

c) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ — Distributivgesetze
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

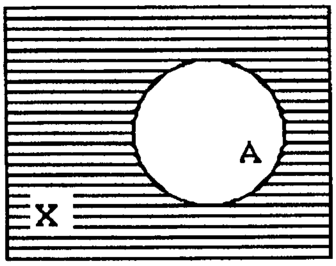
d) $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$ — Gesetze von DE MORGAN
   $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$

e) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$ — Gesetz von der zweifachen Differenz

Wegen b) schreibt man einfacher $A \cap B \cap C$ bzw. $A \cup B \cup C$. Die Distributivgesetze ermöglichen ein "Ausmultiplizieren" und "Ausklammern". Wegen der Kommutativgesetze gilt analog $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ und $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Ist A Teilmenge einer festen Bezugsmenge X ("*Grundmenge*"), so schreibt man statt $X \setminus A$ einfach $\complement A$ und nennt $\complement A$ das **Komplement** von A (bezüglich X). Statt $\complement A$ ist auch A^c oder

A' üblich; noch gebräuchlicher ist $\bar{A}$. Die von uns gewählte Schreibweise zeigt deutlicher die Analogie zu den entsprechenden Gesetzen der Logik.



$X \setminus A$ schraffiert

Für $A,B \subset X$ gilt:

$\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B,$

$\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B,$

$\complement\complement A = A.$

Es gilt dann die beweistechnisch nützliche Beziehung: $A \setminus B = A \cap \complement B$, bei der die Komplementbildung bezüglich einer beliebigen Obermenge X von A und B vorzunehmen ist (beispielsweise bezüglich $A \cup B$).

Beweis von Satz 4.4:

In den Aussagen a) bis e) spiegeln sich die Gesetze der Aussagenlogik wieder. Alle Beweise verlaufen ähnlich. Wir beschränken uns daher auf den Beweis eines Kommutativ- und eines Distributivgesetzes. Wir zeigen jeweils, daß die beiden Mengen dieselben Elemente haben.

a_1) Für jedes x gilt: $x \in A \cap B \overset{(4.3)}{\Leftrightarrow} x \in A \wedge x \in B \overset{(1.4a)}{\Leftrightarrow} x \in B \wedge x \in A \overset{(4.3)}{\Leftrightarrow} x \in B \cap A$

c_1) Für jedes x gilt: $x \in A \cap (B \cup C) \overset{(4.3)}{\Leftrightarrow} x \in A \wedge x \in B \cup C$

$\overset{(4.3)}{\Leftrightarrow} x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \overset{(1.4c)}{\Leftrightarrow} (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$

$\overset{(4.3)}{\Leftrightarrow} x \in A \cap B \vee x \in A \cap C \overset{(4.3)}{\Leftrightarrow} x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

d_1) Wir wählen als Grundmenge eine Menge X, die A, B und C umfaßt. Dann gilt:

$C \setminus (A \cap B) = C \cap \complement(A \cap B) = C \cap (\complement A \cup \complement B) = (C \cap \complement A) \cup (C \cap \complement B)$

$= (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$ ❑

In der Mathematik werden All- oder Existenzaussagen meistens über die Elemente einer bestimmten Menge ausgesprochen. Daher definieren wir Quantoren, deren Wirkung auf die Elemente einer Menge eingeschränkt ist.

4.5 Definition

Es sei A eine Menge, Px eine Aussageform. Wir verabreden:

$$\bigwedge_{x \in A} Px \;:\Leftrightarrow\; \bigwedge_{x} (x \in A \Rightarrow Px) \quad \text{und} \quad \bigvee_{x \in A} Px \;:\Leftrightarrow\; \bigvee_{x} (x \in A \wedge Px).$$

$\bigwedge_{x \in \emptyset} Px$ ist stets wahr, $\bigvee_{x \in \emptyset} Px$ stets falsch. Die Tatsache, daß $\bigwedge_{x \in \emptyset} Px$ stets wahr ist, gibt Anlaß zu scherzhaften Aussagen über die Elemente der leeren Menge:

Die Elemente der leeren Menge sind grün.
Die Elemente der leeren Menge sind blau.
Die Elemente der leeren Menge sind nicht blau.
Alle drei Aussagen sind wahr; denn ihre Negationen (Es gibt ein Element der leeren Menge, das ...) sind falsch.
Man beachte, daß die dritte Aussage nicht die Negation der zweiten Aussage ist.

Die Gesetze 2.1 (Axiom) und 2.2 der Prädikatenlogik über die Negation von All- und Existenzaussagen $\bigwedge_x Px$ und $\bigvee_x Px$ gelten entsprechend für $\bigwedge_{x\in A} Px$ und $\bigvee_{x\in A} Px$. Als Beispiel beweisen wir $\neg \bigwedge_{x\in A} Px \Leftrightarrow \bigvee_{x\in A} \neg Px$.

Es ist $\neg \bigwedge_{x\in A} Px \overset{4.5}{\Leftrightarrow} \neg \bigwedge_x (x\in A \Rightarrow Px) \overset{2.1}{\Leftrightarrow} \bigvee_x \neg (x\in A \Rightarrow Px)) \overset{1.4k}{\Leftrightarrow} \bigvee_x (x\in A \wedge \neg Px)$
$\overset{4.5}{\Leftrightarrow} \bigvee_{x\in A} \neg Px$.

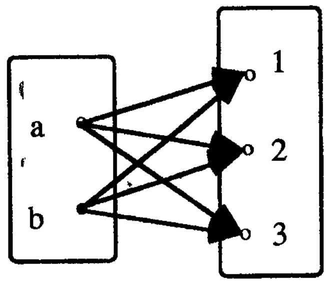
Zum Schluß definieren wir noch das kartesische Produkt von Mengen sowie die Potenzmenge.

4.6 Definition
(a,b) heißt das **geordnete Paar** aus den Objekten a und b. Dabei heißt a die *erste* und b die *zweite Koordinate* von (a,b). Zwei geordnete Paare sind genau dann gleich, wenn ihre ersten Koordinaten gleich sind und ihre zweiten Koordinaten gleich sind:
$(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$.

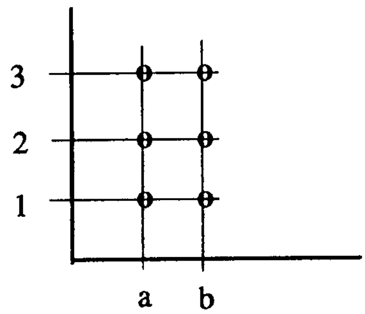
Entsprechend betrachtet man *Tripel*, *Quadrupel*,....., allgemein: **n-Tupel**.

$A \times B := \{(a,b) \mid a\in A \text{ und } b\in B\}$ heißt das **kartesische Produkt** von A und B.
Statt $A \times A$ schreibt man auch A^2.

Beispiel: $\{a, b\} \times \{1, 2, 3\} = \{(a,1), (a,2), (a,3), (b,1), (b,2), (b,3)\}$



Jeder Pfeil repräsentiert ein geordnetes Paar. (Pfeildiagramm)



Jeder Punkt repräsentiert ein geordnetes Paar. (Prinzip des Koordinatensystems)

4.7 Definition
Ist A eine Menge, so heißt die Menge aller Teilmengen von A

$$\mathcal{P}(A) := \{X \mid X \subset A\}$$

die **Potenzmenge** von A.

Beispiele:
$\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$,
$\mathcal{P}(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}$, $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

Aufgaben

Aufgabe 4.1

Entscheiden Sie, ob A = B oder A ≠ B gilt:

a) $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,1,3\}$

b) $A = \{1,1,2\}$, $B = \{2,2,1\}$

c) $A = \{x \mid x \in \mathbb{R} \ \land \ x \neq x\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \ \land \ x < 0\}$

Aufgabe 4.2

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

a) $\emptyset \in \emptyset$ b) $\emptyset \subset \emptyset$ c) $\emptyset \in \{\emptyset\}$

d) $\emptyset \subset \{\emptyset\}$ e) $\{\emptyset\} \subset \emptyset$ f) $\{\emptyset\} \in \{\emptyset,\{\emptyset\}\}$

g) $\{\emptyset\} \subset \{\emptyset,\{\emptyset\}\}$ h) $\{\emptyset,\emptyset\} \subset \{\emptyset\}$ i) $\{\emptyset,\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$

j) $\emptyset = \{\emptyset\}$ k) $\{\emptyset\} = \{\{\emptyset\}\}$

Aufgabe 4.3

Geben Sie Beispiele für Mengen A,B,C an, so daß

a) $A \in B$ und $A \subset B$, b) $A \in B \in C$ und $A \in C$, c) $A \in B \in C$ und $A \notin C$.

Aufgabe 4.4

A, B, C, X seien Mengen. Beweisen Sie:

a) $A \cup B = B \cup A$

b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

c) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

d) $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$

Aufgabe 4.5

A, B, C seien Mengen. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$

b) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$

Aufgabe 4.6

a) Untersuchen Sie die logische Abhängigkeit folgender Aussagen:

(1) $A \subset B$ (2) $A \cap B = A$ (3) $A \cup B = B$

(4) $A \cap B = \emptyset$ (5) $A = \emptyset \ \land \ B = \emptyset$ (6) $A = \emptyset \ \lor \ B = \emptyset$

(7) $A \setminus B = A$ (8) $A \setminus B = B$ (9) $A \setminus B = \emptyset$

b) Beweisen Sie die Äquivalenz der Aufgaben (1) bis (3).

Aufgabe 4.7

A, B seien Mengen mit

a) $A \cap B = A \cup B$, b) $A \cap B = A \setminus B$, c) $A \cup B = A \setminus B$.

Was kann man im Fall a) über A und B, im Fall b) über A und im Fall c) über B aussagen?

Aufgabe 4.8

A, B seien Mengen. Zeigen Sie, daß genau eine Menge X existiert, die den folgenden Gleichungen genügt:

$$A \cup B = A \cup X \quad \text{und} \quad A \cap X = \emptyset.$$

Anleitung: Geben Sie erstens eine Menge X an, für die die Gleichungen erfüllt sind. (Existenz einer Lösung) Zeigen Sie zweitens die Eindeutigkeit: Sind X und Y zwei Lösungen des Gleichungssystems, dann folgt $X = Y$.

Aufgabe 4.9

X sei eine Menge. Für $A \subset X$ werde das Komplement von A (bezüglich X) definiert durch $\complement A = \{x \mid x \in X \wedge \neg(x \in A)\}$. Zeigen Sie für $A \subset X$, $B \subset X$:

a) $\complement \emptyset = X$, $\complement X = \emptyset$

b) $A \cap \complement A = \emptyset$, $A \cup \complement A = X$

c) $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$, $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$

d) $\complement\complement A = A$

e) $A \subset B \Leftrightarrow \complement B \subset \complement A$

f) $A \cap \complement B = \emptyset \wedge B \cap \complement A = \emptyset \Rightarrow A = B$

Aufgabe 4.10

X sei eine Menge, $A \subset X$, $B \subset X$. Das Komplement (bezüglich X) sei wie in der vorhergehenden Aufgabe definiert.

a) Zeigen Sie: $A \setminus B = A \cap \complement B$.

b) Berechnen Sie mit Hilfe von a):

$\complement(A \setminus B)$, $A \setminus (A \setminus B)$, $A \cap (B \setminus A)$, $A \cup (B \setminus A)$, $A \setminus (A \cap B)$, $(A \cup B) \setminus B$.

Aufgabe 4.11

A, B seien Mengen. Zeigen Sie, daß die Mengen $A \setminus B$ und $A \cap B$ disjunkt sind und ihre Vereinigung A ist.

Aufgabe 4.12

Geben Sie die Potenzmenge der Menge $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ an.

Aufgabe 4.13 Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

a) $\emptyset \in \mathfrak{P}(\emptyset)$,

b) $\emptyset \subset \mathfrak{P}(\emptyset)$,

c) $\{\emptyset\} \in \mathfrak{P}(\emptyset)$,

d) $\{\emptyset\} \subset \mathfrak{P}(\emptyset)$,

e) $\emptyset \in \mathfrak{P}\mathfrak{P}(\emptyset)$,

f) $\{\emptyset\} \in \mathfrak{P}\mathfrak{P}(\emptyset)$,

g) $\{\emptyset\} \subset \mathfrak{P}\mathfrak{P}(\emptyset)$.

Aufgabe 4.14

Bilden Sie die Negation folgender Aussagen:

a) Es gibt eine Menge A, so daß für alle Mengen X gilt: A ist nicht Element von X, oder X ist die leere Menge.

b) Jede Menge X hat die Eigenschaft: Wenn X leer ist, dann existiert eine Menge A, die Element von X ist.