1. Aussagen

Unter **Aussagen** verstehen wir sprachliche Gebilde, von denen man sinnvoll annehmen kann, sie seien entweder "wahr" oder "falsch". (Wir betreiben eine zweiwertige Logik.) Statt "eine Aussage ist wahr" sagt man auch "sie ist richtig" oder "sie gilt".

Aussagen kann man negieren; die Negation einer Aussage ist wieder eine Aussage. Zwei Aussagen lassen sich mit Hilfe von Verbindungswörtern zu neuen Aussagen verknüpfen. Wir beschränken uns auf den Gebrauch der *Junktoren* "es ist nicht wahr, daß" (kurz: "nicht"), "und", "oder", "wenn - dann", "genau dann, wenn".

1.1 Definition Bezeichnen p und q Aussagen, so verabreden wir:

Die **Negation** "nicht p" (Zeichen: $\neg p$) ist wahr, wenn p falsch ist, und falsch, wenn p wahr ist.

Die **Konjunktion** "p und q" (Zeichen: $p \wedge q$) ist nur dann wahr, wenn beide Aussagen wahr sind.

Die **Disjunktion** "p oder q" (Zeichen: $p \vee q$) ist nur dann falsch, wenn beide Aussagen falsch sind.

Die **Implikation** "wenn p, dann q" (Zeichen: $p \Rightarrow q$) ist nur dann falsch, wenn p wahr und q falsch ist.

Die **Äquivalenz** "p genau dann, wenn q" (Zeichen: $p \Leftrightarrow q$) ist nur dann wahr, wenn beide Aussagen wahr oder beide Aussagen falsch sind.

Man nennt p die *Prämisse (Voraussetzung)* und q die *Konklusion (Behauptung)* der Implikation $p \Rightarrow q$.

Für $p \Rightarrow q$ sind noch folgende Redewendungen gebräuchlich:

p impliziert q,
p ist hinreichend für q,
q ist notwendig für p.

Für $p \Leftrightarrow q$ sagt man auch:

p dann und nur dann, wenn q,
p äquivalent q,
p ist notwendig und hinreichend für q.

Wir stellen die Verabredungen noch einmal übersichtlich in *Wahrheitstafeln* zusammen. Dabei schreiben wir abkürzend "w" für wahr und "f" für falsch. Man nennt w und f die beiden Wahrheitswerte einer Aussage.

p	$\neg p$
w	f
f	w

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
w	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	f	w	w	f
f	f	f	f	w	w

Merke: Eine Implikation mit falscher Prämisse ist wahr.

Der Wahrheitswert einer aus einzelnen Aussagen zusammengesetzten Aussage ergibt sich allein und vollständig aus den Wahrheitswerten der Einzelaussagen.

Beispiel: $p \Rightarrow (q \vee r)$.

p	q	r	$q \vee r$	$p \Rightarrow (q \vee r)$
w	w	w	w	w
w	w	f	w	w
w	f	w	w	w
w	f	f	f	f
f	w	w	w	w
f	w	f	w	w
f	f	w	w	w
f	f	f	f	w

In der Mathematik spielt der **Beweis** von Aussagen eine wesentliche Rolle. Eine Aussage - mag sie auch noch so einsichtig erscheinen - wird erst dann als "wahr" anerkannt und als (mathematischer) **Satz** bezeichnet, wenn ihre Gültigkeit durch logische Schlüsse aus anderen "wahren" Aussagen nachgewiesen worden ist. Am Anfang einer mathematischen Theorie stehen Aussagen, deren Gültigkeit nicht in Frage gestellt wird, die als "wahr" angenommen werden; sie heißen **Axiome**. Die Gesamtheit dieser Axiome heißt (ein) **Axiomensystem** dieser mathematischen Theorie.

Die Grundform des logischen Schließens ist die **Abtrennungsregel** ("modus ponens"). Sie erlaubt es, bei einer wahren Implikation von der (Wahrheit der) Prämisse auf die (Wahrheit der) Konklusion zu schließen. Aus diesem Grunde liest man eine wahre Implikation $p \Rightarrow q$ auch: "Aus p folgt q." Bei einer wahren Äquivalenz kann von jeder der beiden Aussagen auf die andere geschlossen werden. Man spricht in diesem Fall von einem umkehrbaren Schluß.

1.2 Satz (Abtrennungsregel) Ist p wahr und ist $p \Rightarrow q$ wahr, so ist q wahr.

Beweis:

$p \Rightarrow q$ ist in drei der vier möglichen Fälle wahr:

p	q	$p \Rightarrow q$
w	w	w
~~w~~	~~f~~	~~f~~
f	w	w
f	f	w

Wenn p wahr ist (1. Fall), dann ist q ebenfalls wahr.

□

1.3 Definition

Eine aus einzelnen Aussagen mit Hilfe von Junktoren zusammengesetzte Aussage, die unabhängig von den Wahrheitswerten der Einzelaussagen wahr ist, nennt man **aussagenlogisch allgemeingültig**, ein **Gesetz der Aussagenlogik** oder eine **Tautologie**.

Beispiele:

$p \vee \neg p$ ("tertium non datur") ist eine Tautologie. (Stellen Sie die Wahrheitstafel auf.)

Um zu zeigen, daß $p \Rightarrow (q \vee r)$ keine Tautologie ist, genügt es, die vierte Zeile der obigen Wahrheitstafel anzugeben.

p	q	r	$q \vee r$	$p \Rightarrow (q \vee r)$
w	f	f	f	f

Im folgenden Satz stellen wir die wichtigsten Tautologien zusammen. Um Klammern einzusparen, vereinbaren wir:

$\boxed{\neg \text{ bindet stärker als } \wedge \text{ und } \vee, \quad \wedge \text{ und } \vee \text{ binden stärker als } \Rightarrow \text{ und } \Leftrightarrow}$.

1.4 Satz (Gesetze der Aussagenlogik)

p, q, r seien Aussagen. Dann sind die folgenden Aussagen wahr:

a) $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ — Kommutativgesetze
$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

b) $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$ — Assoziativgesetze
$p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$

c) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ — Distributivgesetze
$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

! d) $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ — Gesetze von DE MORGAN
$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

e) $\neg\neg p \Leftrightarrow p$ — Gesetz von der doppelten Negation

! f) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg p \vee q$ — Umformung der Implikation
$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ — Umformung der Äquivalenz

g) $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ — Transitivität der Implikation
$(p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r) \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$ — Transitivität der Äquivalenz

! h) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ — Kontraposition

i) $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Leftrightarrow (p \wedge q \Rightarrow r)$ — Prämissenverschmelzung

j) $p \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow p)$ — Indirekte Beweise
$p \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow (q \wedge \neg q))$

! k) $\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$ — Negation der Implikation

Sind p, q zusammengesetzte Aussagen und ist $p \Leftrightarrow q$ eine Tautologie, so nennt man p und q **aussagenlogisch äquivalent**. Ist $p \Rightarrow q$ eine Tautologie, so sagt man: Die Aussage q **folgt aussagenlogisch aus** p.

Beweis

durch Wahrheitstafeln oder mit Hilfe bereits bewiesener Gesetze, z. B. h)

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \Rightarrow \neg p$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$
w	w	w	f	f	w	w
w	f	**f**	w	f	**f**	w
f	w	w	f	w	w	w
f	f	w	w	w	w	w

oder: $(p \Rightarrow q) \overset{(f)}{\Leftrightarrow} \neg p \vee q$, $\neg p \vee q \overset{(e)}{\Leftrightarrow} \neg p \vee \neg\neg q$, $\neg p \vee \neg\neg q \overset{(a)}{\Leftrightarrow} \neg\neg q \vee \neg p$, $\neg\neg q \vee \neg p \overset{(f)}{\Leftrightarrow} (\neg q \Rightarrow \neg p)$, und aufgrund der Transitivität der Äquivalenz folgt $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$.

Man schreibt dafür verkürzt (wenn auch nicht ganz korrekt)

$$(p \Rightarrow q) \overset{(f)}{\Leftrightarrow} \neg p \vee q \overset{(e)}{\Leftrightarrow} \neg p \vee \neg\neg q \overset{(a)}{\Leftrightarrow} \neg\neg q \vee \neg p \overset{(f)}{\Leftrightarrow} (\neg q \Rightarrow \neg p).$$

Ein weiterer Beweis durch Äquivalenzumformungen:

k) $\neg(p \Rightarrow q) \overset{(f)}{\Leftrightarrow} \neg(\neg p \vee q) \overset{(d)}{\Leftrightarrow} \neg\neg p \wedge \neg q \overset{(e)}{\Leftrightarrow} p \wedge \neg q$ ❑

Indirekte Beweise:

Der Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$ ist das bekannteste Beispiel eines *indirekten Beweises.* Statt p ($\sqrt{2}$ ist irrational) zu beweisen, widerlegt man die Aussage $\neg p$, "führt $\neg p$ zum Widerspruch".

Annahme: $\sqrt{2}$ ist rational. Dann ist $\sqrt{2}$ darstellbar als Bruch $\frac{m}{n}$ mit m, n nicht beide durch 2 teilbar. (Sonst kürze man den Bruch.) Aus $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ folgt $2 = \frac{m^2}{n^2}$ und damit $2n^2 = m^2$. Also ist m^2 gerade. Dann ist auch m gerade, $m = 2k$. (Denn das Quadrat jeder ungeraden Zahl ist ungerade!) Aus $2n^2 = m^2$ und $m = 2k$ folgt $2n^2 = 4k^2$, d.h. $n^2 = 2k^2$. Also ist auch n gerade. Das ist ein Widerspruch; m, n sollten nicht beide durch 2 teilbar sein. ❑

In vielen Fällen läßt sich ein indirekter Beweis vermeiden, wenn man zur Kontraposition der Aussage übergeht: Anstelle der Implikation $p \Rightarrow q$ beweist man deren (logisch äquivalente) *Kontraposition* $\neg q \Rightarrow \neg p$.

Beispiel: Für positive Zahlen gilt: $a^2 < b^2 \Rightarrow a < b$.

1. *Indirekter Beweis.* Es sei $a^2 < b^2$. Annahme: $a \geq b$. Dann folgt durch Multiplikation mit a, daß $a^2 \geq ab$, und durch Multiplikation mit b, daß $ab \geq b^2$, also $a^2 \geq b^2$. Das ist ein Widerspruch.

2. *Beweis durch Übergang zur Kontraposition.* Anstelle von $a^2 < b^2 \Rightarrow a < b$ beweisen wir die Kontraposition der Aussage: $a \geq b \Rightarrow a^2 \geq b^2$.
Aus $a \geq b$ folgt durch Multiplikation mit a, daß $a^2 \geq ab$, und durch Multiplikation mit b, daß $ab \geq b^2$. Also ist $a^2 \geq b^2$.

Aufgaben

Aufgabe 1.1

Welche der folgenden sprachlichen Gebilde sind Aussagen?

a) $2 \cdot 2 = 5$
b) Quadrate schmecken bitter.
c) Alle Menschen sind sterblich.
d) Bist Du gesund?
e) Auf Alpha Centaur leben intelligente Wesen.
f) Eßt mehr Gemüse!
g) Porsche baut die besten Autos.

Aufgabe 1.2

p sei eine wahre, q und r seien falsche Aussagen. Welche Wahrheitswert haben die folgenden Aussagen:

a) $(p \wedge r) \vee (q \Rightarrow r)$
b) $\neg q \vee p$
c) $\neg q \Rightarrow (p \vee r)$
d) $\neg(p \wedge q) \vee (p \vee r)$

Aufgabe 1.3

Zeigen Sie mit Hilfe von Wahrheitstafeln, daß die folgenden Aussagen wahr sind:

a) $\neg(p \wedge q) \;\Leftrightarrow\; \neg p \vee \neg q$
b) $(p \Leftrightarrow q) \;\Leftrightarrow\; (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
c) $p \wedge (q \vee r) \;\Leftrightarrow\; (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
d) $(p \vee q \Rightarrow r) \;\Leftrightarrow\; (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$

Aufgabe 1.4

Beweisen Sie die folgenden Umformungen, und geben Sie bei jedem Schritt an, welches Gesetz der Aussagenlogik benutzt wird:

a) $(p \vee q) \wedge r \;\Leftrightarrow\; (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
b) $(p \vee q) \wedge (r \vee s) \;\Leftrightarrow\; (p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge s)$
c) $(p \Rightarrow q) \;\Leftrightarrow\; ((p \wedge \neg q) \Rightarrow q)$
d) $(p \wedge q \Rightarrow r) \;\Leftrightarrow\; ((p \wedge \neg r) \Rightarrow \neg q)$

Aufgabe 1.5

Welche der folgenden Aussagen sind Tautologien?

a) $\neg(p \Rightarrow q) \;\Leftrightarrow\; (q \Rightarrow p)$
b) $\neg(p \Leftrightarrow q) \;\Leftrightarrow\; (p \Leftrightarrow \neg q)$
c) $((p \Rightarrow q) \Rightarrow r) \;\Leftrightarrow\; (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$
d) $((p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r) \;\Leftrightarrow\; (p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r))$

Aufgabe 1.6

Negieren Sie die folgenden Aussagen:

a) Wenn ich Durst habe, trinke ich Milch.
b) Ich trinke keine Milch, wenn ich Durst habe.
c) Ich trinke dann und nur dann Milch, wenn ich Durst habe.
d) Ich trinke genau dann keine Milch, wenn ich keinen Durst habe.
e) Ich trinke nur dann keine Milch, wenn ich Durst habe. (Man vergleiche mit b).)

Es bedeute: d Ich habe Durst.
m Ich trinke Milch.

Aufgabe 1.7

a) Geben Sie Wahrheitstafeln für die folgenden Aussagen an:
   i) "entweder p oder q", ii) "weder p noch q".

b) Schreiben Sie diese Aussagen mit Hilfe von $\neg$, $\wedge$, $\vee$.

c) Negieren Sie diese Aussagen.

Aufgabe 1.8

Es sei $p \mid q :\Leftrightarrow \neg(p \wedge q)$ (SHEFFER-Funktion, "nand").

a) Stellen Sie die Wahrheitstafel von $\mid$ auf.

b) Ist $p \mid (q \mid r) \Leftrightarrow (p \mid q) \mid r$ eine Tautologie?

c) Zeigen Sie, daß sich $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ alle nur durch $\mid$ ausdrücken lassen.

Aufgabe 1.9

Wenn ich Karten bekomme, gehe ich ins Theater. Wenn ich ins Theater gehe, sehe ich "Die Physiker". Ich bekomme Karten, oder ich ärgere mich. Ich sehe "Die Physiker" nicht. Formalisieren Sie diese Aussagen. Was kann man aus ihnen schließen?

Es bedeute:	k	Ich bekomme Karten.
	t	Ich gehe ins Theater.
	a	Ich ärgere mich.
	p	Ich sehe die Physiker.

Aufgabe 1.10

Wenn der Täter ein Mann ist, dann ist er von kleinem Wuchs. Wenn er von kleinem Wuchs ist, dann stieg er durch das Fenster ein.
Der Täter ist ein Mann, oder er trug zumindest Männerkleidung. Wenn er Männerkleidung trug, dann - vorausgesetzt, daß die Aussage des Augenzeugen zuverlässig ist - stieg er durch das Fenster ein.
Die Tatortbesichtigung ergab, daß der Täter nicht durch das Fenster eingestiegen war.

Es bedeute:	m	Der Täter ist ein Mann.
	k	Er ist von kleinem Wuchs.
	s	Er stieg durch das Fenster ein.
	a	Er trug Männerkleidung.
	z	Die Aussage des Zeugen ist zuverlässig.

Aufgabe 1.11

Wenn ich die Prüfung bestehe, bekomme ich den Führerschein. Ich bestehe die Prüfung oder mein Bruder gewinnt die Wette. Wenn ich den Führerschein bekomme, kaufe ich mir ein Auto. Ich kaufe mir kein Auto. Was können Sie daraus schließen?

Es bedeute:	p	Ich bestehe die Prüfung.
	f	Ich bekomme den Führerschein.
	w	Mein Bruder gewinnt die Wette.
	a	Ich kaufe mir ein Auto.

2. Aussageformen

Entfernt man aus einer Aussage eine oder mehrere **Konstanten** und besetzt die Leerstellen durch Platzhalter, sogenannte **Variable**, so entsteht eine **Aussageform**.

Beispiele:

x ist eine Quadratzahl,
x ist durch 2 teilbar
x ist durch y teilbar,
x ist durch x teilbar.

Aussageformen sind weder wahr noch falsch. Wenn man alle Variablen durch Konstanten ersetzt, entsteht wieder eine Aussage. Dabei müssen gleiche Variable überall durch die gleiche Konstante ersetzt werden. Zu jeder Variablen gehört die Angabe eines Objektbereichs (Definitionsbereichs), der alle Objekte enthält, die an die Stelle der betreffenden Variablen treten können.

Schreibweise:

Q bedeute:	"... ist eine Quadratzahl".	Eigenschaft, einstelliges Prädikat
Dann bedeutet:		
Qx	" x ist eine Quadratzahl".	Aussageform
Q9	" 9 ist eine Quadratzahl".	Aussage
T bedeute:	" ... ist durch ... teilbar"	Beziehung, zweistelliges Prädikat
Dann bedeutet:		
Txy	" x ist durch y teilbar"	Aussageform mit zwei Variablen
Tx2	" x ist durch 2 teilbar"	Aussageform mit einer Variablen
Txx	" x ist durch x teilbar"	Aussageform mit einer Variablen

Aussageformen können wie Aussagen mit Hilfe von logischen Zeichen zu neuen Aussageformen verbunden werden. Aussagen können als Aussageformen mit null Variablen angesehen werden.

Soll Px als Abkürzung für eine bestimmte Aussageform stehen, so benutzen wir das Zeichen ":⇔", gelesen: "per definitionem äquivalent". Wird etwa Px definiert als die zu $x = a$ äquivalente Aussageform, so schreibt man diese Verabredung: $Px :\Leftrightarrow x = a$ (oder auch $x = a \Leftrightarrow: Px$). Der Doppelpunkt steht auf der Seite des zu Definierenden.

Aus einer Aussageform erhält man eine Aussage, wenn alle Variablen durch Konstanten ersetzt werden. Statt dieser Ersetzung kann man auch Wendungen wie "für alle x", "es gibt ein x" vor die Aussageform setzen, gemeint sind alle x aus dem Definitionsbereich der Variablen x. Dadurch wird eine Variable gebunden. Nicht gebundene Variablen heißen frei. Gebundene Variablen dürfen nicht mehr durch Konstanten ersetzt werden.

Eine Aussage der Form "für alle x gilt", "für jedes x gilt" nennt man eine *Allaussage*.
Eine Aussage der Form "es gibt (mindestens) ein x mit Px", "es existiert (mindestens) ein x mit Px" nennt man eine *Existenzaussage*.

Wir führen die **Quantoren** $\bigwedge$ und $\bigvee$ ein:

$\bigwedge_x$ Px bedeute: Für alle x (aus dem Objektbereich) gilt Px.
Für jedes x (aus dem Objektbereich) gilt Px.

$\bigvee_x$ Px bedeute: Es gibt ein x (aus dem Objektbereich) mit Px.
Es existiert ein x (aus dem Objektbereich) mit Px.

Statt $\bigwedge_x$ Px schreibt man auch $\forall x$ Px, statt $\bigvee_x$ Px auch $\exists x$ Px. Man beachte aber: Die Zeichen $\forall x$ und $\exists x$ sind keine Wortkürzel. Einer Aussageform wie z. B. xy = yx kann die sprachliche Wendung "für alle x,y" oder "für alle x,y∈ $\mathbb{R}$" nachgestellt werden. Nachgestelltes $\forall x,y$ oder $\forall x,y \in \mathbb{R}$ aber ist falsch.

Gebundene Variable sind austauschbar: $\bigwedge_x Px \Leftrightarrow \bigwedge_y Py \Leftrightarrow \bigwedge_z Pz$. Eine ähnliche Rolle spielen in der Mathematik Integrationsvariable und Summationsindizes,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(u)\,du = \int_a^b f(t)\,dt \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^n a_j = \sum_{k=1}^n a_k,$$

oder auch Variable in Funktionstermen $f(x) = x^2$, $f(u) = u^2$ oder $f(t) = t^2$.

Über endlichen Objektbereichen lassen sich All- und Existenzaussagen ohne Quantoren ausdrücken. Enthält der Objektbereich nur die Objekte a, b, c, so kann

$\bigwedge_x$ Px ersetzt werden durch $Pa \wedge Pb \wedge Pc$, $\bigvee_x$ Px ersetzt werden durch $Pa \vee Pb \vee Pc$.
Das erklärt auch unsere Wahl der Zeichen für die Quantoren.

Man beweist eine Allaussage, indem man den Nachweis für ein "beliebiges" Objekt (aus dem Definitionsbereich von x) führt, d.h. für ein Objekt, für das außer der Zugehörigkeit zum Definitionsbereich keine weiteren Eigenschaften vorausgesetzt werden. Häufig bezeichnet man ein solches Objekt, an dem man den Beweis beispielhaft vorführt, mit dem gleichen Buchstaben wie die Variable in der Allaussage.

Beispiel: Das Quadrat jeder geraden Zahl ist gerade; für jede ganze Zahl x gilt: Ist x gerade, so ist auch x^2 gerade. Ist nämlich x eine gerade Zahl, also x = 2y, dann folgt $x^2 = (2y)^2 = 2\,(2y^2)$.

Man beweist eine Existenzaussage, indem man ein entsprechendes Element (aus dem Definitionsbereich von x) vorweist.

Beispiel: Die Aussage "Es gibt eine natürliche Zahl, die gleich ihrem Quadrat ist." ist wahr; denn für die natürliche Zahl 1 gilt $1 = 1^2$.

Gilt $\bigvee_x$ Px, so findet man ein Objekt a, für das die Aussage Pa wahr ist. Gilt $\bigwedge_x$ Px, so kann man nur dann ein Objekt a mit der Eigenschaft P auswählen, also auf die Aussage Pa schließen, wenn der Objektbereich nicht leer ist. (Das setzt man gewöhnlich voraus.) Aber von dieser Einschränkung abgesehen, kann man mehr: Sind b, c, ... weitere Objekte aus dem Objektbereich, so folgt auch Pb, Pc, ...

Beispiel: Für jede reelle Zahl x gilt $x^2 \geq 0$. Daraus kann man schließen: Für nicht-negative reelle Zahlen x, y gilt $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$. (Denn $\sqrt{x} - \sqrt{y}$ ist eine reelle Zahl.) Daraus folgt unter Verwendung der üblichen Rechenregeln $\frac{1}{2}(x + y) \geq \sqrt{xy}$, die bekannte Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel. Da über x, y nichts weiter vorausgesetzt worden ist, als daß es sich um nicht-negative reelle Zahlen handelt, hat man bewiesen: $\frac{1}{2}(x + y) \geq \sqrt{xy}$ für alle nicht-negativen reellen Zahlen x, y.

Über nichtleeren endlichen Objektbereichen ist die Negation einer Allaussage eine Existenzaussage. Wir fordern allgemeiner:

2.1 Axiom der Negation von Allaussagen

Ist P ein Prädikat über einem nichtleeren Objektbereich, so gilt: $\neg \bigwedge_x Px \Leftrightarrow \bigvee_x \neg Px$.

2.2 Satz (Negation von Existenzaussagen)

Ist P ein Prädikat über einem nichtleeren Objektbereich, so gilt: $\neg \bigvee_x Px \Leftrightarrow \bigwedge_x \neg Px$.

Beweis:

Wir wenden 2.1 auf die Aussage $\neg P$ an. Dann erhält man $\neg \bigwedge_x \neg Px \Leftrightarrow \bigvee_x \neg\neg Px$,

also $\neg \bigwedge_x \neg Px \Leftrightarrow \bigvee_x Px$. Geht man auf beiden Seiten zur Negation über, erhält man 2.2.

❑

Damit beherrscht man die Negation von All- und Existenzaussagen. Bei mehrfacher Quantifizierung wird das "nicht" durchgezogen, dabei kehren sich die Quantoren um. Ist etwa S ein vierstelliges Prädikat, so gilt

$$\neg \bigwedge_w \bigvee_x \bigwedge_y \bigwedge_z Swxyz \Leftrightarrow \bigvee_w \bigwedge_x \bigvee_y \bigvee_z \neg Swxyz.$$

In mathematischen Texten schreibt man die quantifizierenden Wendungen "für alle", "für jedes" und "es gibt", "es existiert" aus Gründen der besseren Lesbarkeit meist aus, benutzt also nicht die Quantorenschreibweise. Das spricht aber nicht gegen die Nützlichkeit von Quantoren bei der Umformung von Aussagen, besonders bei der Negation.

Es gibt Möglichkeiten, Quantifizierungen zu vermeiden:

1) Man arbeitet mit Aussageformen und sagt statt $\bigwedge_x Px$ "Px ist allgemeingültig", statt $\bigvee_x Px$ "Px ist erfüllbar".

2) Statt $\bigwedge_x Px$ benutzt man die Wendung: "x sei ein (beliebiges) Objekt aus dem Objektbereich. Dann gilt Px." Diese Formulierung ist in der Mathematik sehr gebräuchlich, da sie dem Beweisschema einer Allaussage entspricht. Auch wir werden diese Sprechweise häufig verwenden.

$$\bigvee_y \bigwedge_x P(x,y) \Rightarrow \bigwedge_x \bigvee_y P(x,y)$$

Beispiel gleichmäßige Stetigkeit $\Rightarrow$ Stetigkeit

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{x_1,x_2\in D} |x_1-x_2|<\delta \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon \qquad \delta=\delta(\varepsilon)$$

$$\bigwedge_{x_1\in[a,b]} \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{x_2\in D} |x_1-x_2| \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon \qquad \delta=\delta(\varepsilon,x_1)$$

Umkehrung gilt i. allg. nicht

$P(x,y) \Leftrightarrow$ X ist Vater von x

Aufgaben

Aufgabe 2.1

Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Die Summe zweier gerader Zahlen ist eine gerade Zahl.
b) Das Quadrat einer geraden Zahl ist eine gerade Zahl.
c) Die Summe zweier ungerader Zahlen ist ungerade.
d) Das Produkt einer ungeraden Zahl mit einer geraden Zahl ist gerade.
e) Für jede natürliche Zahl gilt: Ist n^2 gerade, so ist auch n gerade.
f) Für jede natürliche Zahl gilt: Ist n^2 ungerade, so ist auch n ungerade.

Aufgabe 2.2

Der Objektbereich enthalte genau die reellen Zahlen. Bilden Sie die Negation folgender Aussagen:

a) Es gibt ein x, so daß für alle y gilt $xy = y$.
b) Zu jedem x gibt es ein y mit $xy > 1$.
c) Es gibt kein x mit $x^2 = -1$.
d) Zu jedem x gibt es ein y und ein z, so daß $y < x$ und $x < z$ gilt.

Aufgabe 2.3

Negieren Sie folgende Aussagen:

a) Jede natürliche Zahl, die durch 5 und 2 teilbar ist, ist durch 10 teilbar.
b) Für jede natürliche Zahl gilt: Wenn sie durch 6 teilbar ist, dann ist sie durch 2 und 3 teilbar.
c) Es gibt keine natürliche Zahl, die zugleich Primzahl und gerade ist.
d) Jede natürliche Zahl, die gerade und größer als 3 ist, ist die Summe zweier Primzahlen.
e) Jede natürliche Zahl, die Summe zweier Primzahlen ist, ist gerade und größer als 3.
f) Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es eine Primzahl p, die größer als n ist.

Aufgabe 2.4
Formulieren Sie mit Hilfe von Quantoren unter Verwendung des Gleichheitszeichens die Aussage: Es gibt *genau ein* x mit Px.

Aufgabe 2.5
Eine Funktion $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig in $x_0 \in \mathbb{R}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so gibt, daß für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Wann ist eine Funktion $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ unstetig (d.h. nicht stetig) in $x_0 \in \mathbb{R}$?

Aufgabe 2.6
Eine Funktion $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig in $x_0 \in \mathbb{R}$, wenn für jede Folge (x_n), die gegen $x_0 \in \mathbb{R}$ konvergiert, die Folge $(f(x_n))$ gegen $f(x_0)$ konvergiert.

Wann ist eine Funktion $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ unstetig (d.h. nicht stetig) in $x_0 \in \mathbb{R}$?

Aufgabe 2.7
Zwei Vektoren **a** und **b** sind linear abhängig, wenn es reelle Zahlen α, β gibt, die nicht beide gleich Null sind, so daß gilt: $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = \mathbf{o}$.

Wann sind zwei Vektoren **a** und **b** linear unabhängig, d.h. nicht linear abhängig?