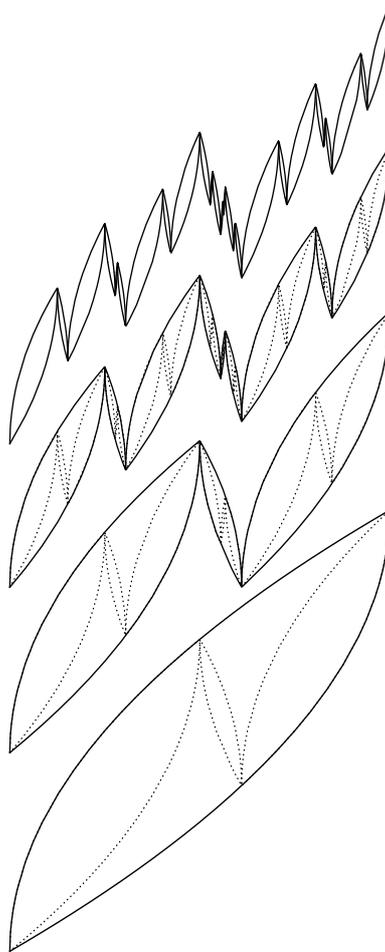


Lipschitzräume

HEIKO BERNINGER



Diplomarbeit im Fach Mathematik

Freie Universität Berlin

Februar 2001

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	3
1 Grundlegendes über Lipschitzräume	7
1.1 Einige Definitionen und Eigenschaften von Lipschitzräumen	7
1.2 H_α und H_α^0 als Standardbeispiele großer und kleiner Lipschitzräume	23
2 Isomorphie zwischen Lipschitzräumen und den Folgenräumen c_0 und ℓ^∞	39
2.1 Die Schauderbasis in H_α^0	39
2.2 Lipschitzräume über Kompakta in \mathbb{R}^m	46
2.3 c_0 und ℓ^∞ als Unterräume von Lipschitzräumen	55
2.4 Isometrische Darstellung von Lipschitzräumen	63
3 Die Dualität $\ell ip(K)'' = Lip(K)$	83
3.1 Der Ausgangspunkt von de Leeuw	83
3.2 Der isometrische Isomorphismus durch Approximationsansätze	88
3.3 Beweisvarianten für Räume komplexwertiger Lipschitzfunktionen	95
3.4 Die Kantorovich-Rubinstein-Norm	102
3.5 Die Separationseigenschaft	110
4 Anwendung der Theorie der M-Ideale auf Lipschitzräume	125
4.1 Grundlegendes zu M -Idealen und Beispiele	125
4.2 Die 3-Kugel-Eigenschaft von H_α^0 in Teilräumen von H_α	136

Schlußbemerkungen	163
Literaturverzeichnis	167

Einleitung

Es ist der Begriff der Stetigkeit zweifellos einer der zentralen Begriffe in der Mathematik. Einerseits kann man diesen Begriff, auf das topologisch “Allernötigste” reduziert, derart allgemein mengentheoretisch fassen, daß man zu seinem Verständnis noch nicht einmal wissen muß, was eine Zahl ist. Andererseits wird man facettenreichen Ausdifferenzierungen dieses Begriffs in der Analysis begegnen.

So kann man sich zum Beispiel, wenn man eine stetige Abbildung zwischen zwei metrischen Räumen mit der ε - δ -Definition betrachtet, die Frage stellen, “wie stetig” diese Abbildung denn eigentlich ist. Handelt es sich beim Urbildraum um ein Kompaktum, so weiß man, daß man zu einem ε das δ unabhängig vom betrachteten Punkt wählen kann. Ordnet man jedem δ das “größtmögliche” ε zu, mit dem die Definition “funktioniert”, erhält man den Stetigkeitsmodul $\omega(\delta)$ einer Abbildung. Je flacher dieser Stetigkeitsmodul für kleine δ ist, desto besser wird man die Güte der Stetigkeit einer Abbildung beurteilen.

Eine besonders “angenehme” Form der Stetigkeit — die Lipschitz-Stetigkeit — liegt vor, wenn die Abbildung nicht “zu stark dehnt” in dem Sinne, daß man die Abstände der Bilder stets durch ein Vielfaches der Abstände der Urbilder abschätzen kann. Ist dieses Vielfache kleiner als 1, so handelt es sich um eine kontrahierende Abbildung, die an den Banachschen Fixpunktsatz erinnert, welcher gewiß ein gutes Beispiel für die Tragweite dieses Stetigkeitskonzepts darstellt. Durch die allgemeine Definition der Lipschitz-Stetigkeit lassen sich auch die Hölder-stetigen Abbildungen fassen, deren Stetigkeitsmodul nicht mehr unterhalb einer Ursprungsgeraden, sondern nur noch unterhalb einer Wurzelfunktion liegen muß. Die Hölder-stetigen Abbildungen treten dann als Spezialfälle gewisser Lipschitz-stetiger Abbildungen in Erscheinung.

Untersuchungsgegenstand der vorliegenden Arbeit sind Lipschitz- bzw. Hölder-stetige Funktionen auf Kompakta mit Werten in \mathbb{R} oder \mathbb{C} . Funktionen dieser Art kommen in verschiedenen Bereichen der Analysis zur Anwendung. Als erstes wird man an die berühmt gewordene “Lipschitz-Bedingung” im Satz von Picard-Lindelöf denken, welche durch eine Anwendung des schon erwähnten Banachschen Fixpunktsatzes die lokale Existenz und Eindeutigkeit, ja sogar die “sukzessive Approximierbarkeit”, der Lösung von Anfangswertproblemen sicherstellt. Gerade zu diesem Zweck (natürlich ohne den Banachschen Fixpunktsatz zu kennen) wurde diese Bedingung 1868 von Rudolf Lipschitz (1832–1903)

eigentlich erdacht (siehe hierzu [14], [10, S. 543], [36, S. 150] und [37, S. 499]). Um die klassische Lösbarkeit gewisser partieller Differentialgleichungen wie der Poisson-Gleichung oder der inhomogenen Wärmeleitungsgleichung zu gewährleisten, fordert man neben der Stetigkeit der vorgelegten Funktion meist, daß diese zusätzlich eine (lokale) Hölderbedingung erfüllt (siehe Theoreme 3.7 und 11.4 in [56]). Dies wurde erstmals 1882 von Otto Hölder (1859–1937) in seiner Dissertation [21, S. 9 ff] (siehe auch [14]) für die Poisson-Gleichung vorgerechnet. Auch in der harmonischen Analysis haben Hölderbedingungen eine Bedeutung. So kann bekanntlich die Fourierreihe einer stetigen Funktion an überabzählbar vielen Stellen oder auf einer dichten Menge oder sogar auf einer Menge von zweiter Kategorie divergieren (siehe [61, Vol. I, S. 301]), wohingegen man bei Hölder-stetigen Funktionen weiß, daß hier die Fourierreihe sogar gleichmäßig gegen die Funktion konvergiert. Letzteres ist das Theorem von Dini-Lipschitz, siehe [61, Vol. 1, S. 63].

Die Menge der Lipschitz-stetigen Funktionen auf einem Kompaktum K bildet einen (dichten) Unterraum im Raum aller stetigen Funktionen auf K versehen mit der Supremumsnorm. Indem man jeder Lipschitzfunktion ihre größtmögliche Steigung zuordnet, kann man auf diesem Unterraum eine neue Norm einführen, welche in diesem eine wesentlich feinere Topologie als die Supremumsnorm induziert und ihn zu einem Banachraum, dem (großen) Lipschitzraum $Lip(K)$, macht. Alle Funktionen, deren Steigungen lokal gegen Null gehen, bilden darin einen abgeschlossenen Unterraum, den kleinen Lipschitzraum $lip(K)$. Ziel der vorliegenden Arbeit ist es nun, aus verschiedenen Blickwinkeln der Banachraumtheorie Antworten auf die Frage zu finden: “Wie liegt der kleine Lipschitzraum im großen?”

Um diese bewußt nicht präzise formulierte Frage angehen zu können, sollen im ersten Kapitel zunächst einige grundlegende Tatsachen zu Lipschitzräumen zusammengestellt werden, und zwar zum einen in Form von allgemeinen Ergebnissen und zum anderen in Form eines naheliegenden Beispiels von Lipschitzräumen auf dem Kompaktum $[0, 1]$. Hier wird auch die Bedeutung der Hölder-Stetigkeit als wichtiger Spezialfall der Lipschitz-Stetigkeit klar.

Im zweiten Kapitel wird die obige Frage zunächst wieder für Lipschitzräume auf dem Einheitsintervall, dann für Lipschitzräume auf Kompakta in \mathbb{R}^m — es handelt sich dabei eigentlich um Räume von Hölderfunktionen — auf folgende Weise beantwortet: Es gibt einen Isomorphismus des Folgenraums ℓ^∞ auf den großen Lipschitzraum, unter dem der kleine Lipschitzraum als Bild von c_0 auftritt. Im allgemeinen Fall wird unter natürlichen Voraussetzungen zumindest eine isomorphe Kopie von c_0 als komplementierter Unterraum von $lip(K)$ gefunden und in $Lip(K)$ ein zu ℓ^∞ isomorpher Unterraum angegeben. Schließlich wird der Frage nach isometrischen Isomorphismen zwischen $lip(K)$ und c_0 bzw. $Lip(K)$ und ℓ^∞ nachgegangen, die nur unter sehr starken Einschränkungen an K existieren. In diesem Zusammenhang wird auch zum ersten Mal der große Lipschitzraum als zweiter Dual des kleinen Lipschitzraums auftreten — ein Phänomen, das im dritten Kapitel der Arbeit einer näheren Betrachtung unterzogen wird.

Die Tatsache, daß sich in vielen Fällen der kleine zum großen Lipschitzraum “so ähnlich verhält” wie der Folgenraum c_0 zu ℓ^∞ wird durch den isometrischen Isomorphismus unterstrichen, der zwischen $\text{lip}(K)''$ und $\text{Lip}(K)$ immer dann existiert, wenn $\text{lip}(K)$ eine gewisse Reichhaltigkeitsbedingung erfüllt. Die Überlegungen, die zu diesem Ergebnis führen, werden in Kapitel 3 zusammengetragen. Es werden dabei vier Techniken vorgestellt, die zwar alle den gleichen Ausgangspunkt wählen, sich aber im weiteren Vorgehen stark voneinander abheben und zu unterschiedlich allgemeinen Aussagen führen. Des weiteren wird ein Ansatz zur Sprache kommen, der über eine genaue Analyse des Maßraums über dem betrachteten Kompaktum, versehen mit einer geeigneten Norm, den gewünschten isometrischen Isomorphismus liefert. Schließlich werden die Bedingungen, unter denen dieser Isomorphismus existiert, genauer untersucht.

Im vierten und letzten Kapitel der Arbeit wird die Lage des kleinen Lipschitzraums im großen aus der Perspektive der Theorie über M -Ideale in Banachräumen betrachtet. Nach einer kurzen Darstellung der für diese Erörterung wichtigsten Ergebnisse der Theorie werden Ansätze zur Beantwortung der Frage gesucht, ob bzw. unter welchen Voraussetzungen der kleine Lipschitzraum ein M -Ideal im großen ist. Im Zuge dessen werden für das in Kapitel 1 betrachtete Beispiel von Lipschitzräumen auf dem kompakten Einheitsintervall die Schwierigkeiten aufgezeigt, die diese Frage aufwirft, und positive sowie negative Teilergebnisse geliefert. Schließlich wird für das Kompaktum $K = [0, 1]$, versehen mit geeigneten Metriken, ein abgeschlossener Unterraum von $\text{Lip}(K)$ angegeben, in dem sich $\text{lip}(K)$ als echtes M -Ideal erweist.

Herzlich danken möchte ich Dirk Werner für seine engagierte, geduldige und sehr persönliche Unterstützung bei der Erstellung dieser Arbeit. Ich habe einiges von ihm gelernt.

Ich denke an all jene, welche der Widrigkeiten kundig sind, die dem “Ersten im Bunde” wieder und wieder begegnen, wohlwissend daß es doch am Ende gut geht.

“Und gewinnt das Ufer und eilet fort
 Und danket dem rettenden Gotte,
 Da stürzt die raubende Rotte
 Hervor aus des Waldes nächtlichem Ort,
 Den Pfad ihm sperrend, und schnaubet Mord
 Und hemmet des Wanderers Eile
 Mit drohend geschwungener Keule.”

Kapitel 1

Grundlegendes über Lipschitzräume

1.1 Einige Definitionen und Eigenschaften von Lipschitzräumen

Definition 1.1.1. Sei (K, d) ein metrischer Raum und f eine reell- oder komplexwertige Funktion auf K , für die gilt

$$L(f) = \sup_{\substack{x, y \in K \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)} < \infty.$$

Dann heißt f *Lipschitz-stetig* bzw. *Lipschitzfunktion* auf K und $L(f)$ die *Lipschitzkonstante* von f . Mit $Lip(K)$ sei die Menge aller beschränkten Lipschitzfunktionen auf K bezeichnet, worin $lip(K)$ diejenige Teilmenge von Funktionen sei, für die die *lip-Bedingung* gilt:

$$\lim_{\substack{d(x, y) \rightarrow 0 \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)} = 0.$$

Es ist klar, daß $Lip(K)$ sowie $lip(K)$ mit der punktweisen Addition und skalaren Multiplikation Unterräume im Raum $C^b(K)$ aller beschränkten stetigen Funktionen auf K bilden. Es ist sogar $L(\cdot)$ eine Halbnorm auf $Lip(K)$, leider jedoch keine Norm, denn es gilt $L(f) = 0 \Leftrightarrow f = \text{const}$. Nun gibt es verschiedene Möglichkeiten, dieses (relativ kleine) Manko zu beheben und mittels $L(\cdot)$ zu einer Norm auf $Lip(K)$ zu gelangen. Im folgenden wird die in der Literatur am häufigsten verwandte (vgl. [33], [24], [25], [15] und [49]) vorgestellt.

Satz und Definition 1.1.2. *Mit der Lipschitznorm*

$$\|f\|_L = \max(\|f\|_\infty, L(f))$$

wird $Lip(K)$ zu einem Banachraum, dem Lipschitzraum auf K . Der kleine Lipschitzraum $lip(K)$ ist dann ein abgeschlossener Unterraum in $Lip(K)$.

Beweis. $\|\cdot\|_L$ ist als Maximum endlich vieler Halbnormen eine Halbnorm und wegen der Normeigenschaft von $\|\cdot\|_\infty$ auch eine Norm. Zur Vollständigkeit von $Lip(K)$ sei eine Cauchyfolge (f_n) in $Lip(K)$ gegeben. Nach Definition der Lipschitznorm ist (f_n) auch Cauchyfolge in $C^b(K)$ bezüglich der Supremumsnorm. Wegen der Vollständigkeit von $C^b(K)$ existiert ein $f \in C^b(K)$ mit $f_n \xrightarrow{\text{glm.}} f$. Gezeigt wird nun, daß sogar $f_n \xrightarrow{L(\cdot)} f$, also auch $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_L} f$ gilt, woraus $f \in Lip(K)$ und die Vollständigkeit von $Lip(K)$ folgt. Seien hierzu $\varepsilon > 0$ und $x, y \in K, x \neq y$, gegeben. Wähle $N(\varepsilon)$ so, daß $\|f_n - f_m\|_L \leq \frac{\varepsilon}{3}$ für $n, m \geq N(\varepsilon)$ gilt, und zusätzlich $m \geq M(\varepsilon, x, y) \geq N(\varepsilon)$ so groß, daß $\|f_m - f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3} d(x, y)$ ist. Dann folgt

$$\begin{aligned} \frac{|(f_n - f)(x) - (f_n - f)(y)|}{d(x, y)} &\leq \frac{|(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(y)|}{d(x, y)} + \\ \frac{|f_m(x) - f(x)|}{d(x, y)} + \frac{|f_m(y) - f(y)|}{d(x, y)} &\leq L(f_n - f_m) + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \leq \varepsilon \end{aligned}$$

unabhängig von x und y , also $L(f_n - f) \leq \varepsilon$ für $n \geq N(\varepsilon)$.

Zur Abgeschlossenheit von $lip(K)$ betrachte eine Folge (f_n) in $lip(K)$, für die $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_L} f \in Lip(K)$ gilt. Zu $\varepsilon > 0$ sei $n \in \mathbb{N}$ so groß, daß $\|f_n - f\|_L \leq \frac{\varepsilon}{2}$, und $\delta > 0$ so klein, daß $\frac{|f_n(x) - f_n(y)|}{d(x, y)} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ ist, falls $d(x, y) \leq \delta$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)} &\leq \frac{|f(x) - f_n(x) - (f(y) - f_n(y))|}{d(x, y)} + \frac{|f_n(x) - f_n(y)|}{d(x, y)} \\ &\leq L(f - f_n) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon \end{aligned}$$

für $d(x, y) \leq \delta$. □

Man sieht leicht, daß die Lipschitznorm eine feinere Topologie auf $Lip(K)$ erzeugt als die Supremumsnorm, daß insbesondere $Lip(K)$ im allgemeinen nicht abgeschlossen in $C^b(K)$ ist (vergleiche auch Bemerkung 1.1.14 und [52, S. 23]: den Abschluß bilden gerade die gleichmäßig stetigen Funktionen). Zur Illustration betrachte man das folgende Beispiel der Lipschitz-stetigen Funktionen $f_n, n \in \mathbb{N}$, auf $([0, 1], |\cdot|)$ (vergleiche Beispiel 4.2.1) mit $\|f_n\|_L \rightarrow \infty$, die in der Supremumsnorm gegen $f : f(x) = \sqrt{x}$ konvergieren:

$$f_n : f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n} x & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ \sqrt{x} & \text{für } \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Eine weitere in der Literatur anzutreffende Normierung von $Lip(K)$, die ebenfalls die Supremumsnorm involviert, findet man immer dann vor, wenn neben der Banachraumstruktur von $Lip(K)$ auch das Produkt zweier Lipschitzfunktionen von Interesse ist (vgl. [44] und [2]):

Satz und Definition 1.1.3. *Mit der Norm*

$$\|f\|_A = \|f\|_\infty + L(f)$$

wird $Lip(K)$ zu einer Banachalgebra mit Einheit, der Lipschitzalgebra auf K . $lip(K)$ ist eine abgeschlossene Unteralgebra von $Lip(K)$ mit Einheit. $Lip(K)$ und $lip(K)$ sind invers abgeschlossen, d.h. enthalten mit f auch f^{-1} im Falle $\inf_{x \in K} |f(x)| > 0$.

Beweis. Analog zu $\|\cdot\|_L$ ist auch $\|\cdot\|_A$ eine Norm, die zudem wegen

$$\|f\|_L \leq \|f\|_A \leq 2\|f\|_L$$

zu $\|\cdot\|_L$ äquivalent ist, so daß auch mit $\|\cdot\|_A$ der Vektorraum $Lip(K)$ ein Banachraum und $lip(K)$ abgeschlossen in $Lip(K)$ ist. Des weiteren gilt für $f, g \in Lip(K), x, y \in K, x \neq y$

$$\begin{aligned} \frac{|(fg)(x) - (fg)(y)|}{d(x, y)} &\leq \frac{|(fg)(x) - f(x)g(y)|}{d(x, y)} + \frac{|f(x)g(y) - (fg)(y)|}{d(x, y)} \\ &\leq \|f\|_\infty \frac{|g(x) - g(y)|}{d(x, y)} + \|g\|_\infty \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)}. \end{aligned}$$

Einerseits sieht man damit $L(fg) \leq \|f\|_\infty L(g) + \|g\|_\infty L(f)$, also

$$\begin{aligned} \|fg\|_A &\leq \|g\|_\infty \|f\|_\infty + \|f\|_\infty L(g) + \|g\|_\infty L(f) \leq \|f\|_\infty \|g\|_A + \|g\|_\infty L(f) \\ &\leq \|f\|_A \|g\|_A, \end{aligned}$$

womit $\|\cdot\|_A$ den Raum $Lip(K)$ zu einer Banachalgebra macht. Andererseits sieht man damit, daß im Falle $f, g \in lip(K)$ auch $f \cdot g \in lip(K)$ ist, d.h. $lip(K)$ eine abgeschlossene Unteralgebra von $Lip(K)$ ist. Die Einheit ist natürlich die konstante Funktion **1**.

Zur inversen Abgeschlossenheit beachte man mit $\varepsilon = \inf_{x \in K} |f(x)| > 0$

$$\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(y)} \right| \leq \frac{1}{\varepsilon^2} |f(x) - f(y)|,$$

womit $\|f^{-1}\|_A \leq \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon^2} L(f)$ ist und f^{-1} mit die lip -Bedingung erfüllt, wenn sie für f gilt. \square

Ist K kompakt, reicht es natürlich, für die inverse Abgeschlossenheit die Nullstellenfreiheit von f vorauszusetzen. Mit der Modifikation $\|f \cdot g\|_L \leq 2\|f\|_L \|g\|_L$ gelten die obigen Aussagen auch für $Lip(K)$ mit der Norm $\|\cdot\|_L$. Daß sich der Faktor 2 in dieser Abschätzung im allgemeinen nicht verbessern läßt, $Lip(K)$ mit $\|\cdot\|_L$ also keine Banachalgebra ist, zeigt schon das Beispiel der Funktion $f \in Lip([0, 1], |\cdot|)$ mit $f(x) = x$ und $(f^2)'(x) = 2x$.

Neben den beiden genannten Möglichkeiten, $Lip(K)$ mittels $L(\cdot)$ und $\|\cdot\|_\infty$ zu normieren, kann man auch die Tatsache ausnutzen, daß $L(\cdot)$ nicht weit von einer Norm entfernt ist, und zwar in dem Sinne, daß $L(f) = 0 \Leftrightarrow f = \text{const.}$ gilt. Hierzu reicht die Funktionsauswertung an einem Basispunkt $x_0 \in K$ (vgl. I.4.6 in [55]). Man beachte, daß man durch dieses Vorgehen eine größere Funktionenmenge als $Lip(K)$ normieren kann.

Satz und Definition 1.1.4. *Mit einem Basispunkt $x_0 \in K$ gilt:*

(i) *Der Vektorraum $LiP(K)$ aller Lipschitzfunktionen auf K wird mit*

$$\|f\|_{L'} = \max(|f(x_0)|, L(f)) \quad \text{oder mit} \quad \|f\|_{A'} = |f(x_0)| + L(f)$$

zu einem Banachraum, in dem der Unterraum $liP(K)$ aller Funktionen, die die lip-Bedingung erfüllen, abgeschlossen ist.

(ii) *Die Mengeneinklusion $Lip(K) \subseteq LiP(K)$ ist genau dann echt, wenn K unbeschränkt ist. Ist K beschränkt, so sind die Normen $\|\cdot\|_L$, $\|\cdot\|_{L'}$, $\|\cdot\|_A$ und $\|\cdot\|_{A'}$ alle äquivalent.*

Beweis. (i) Wieder gilt $\|f\|_{L'} \leq \|f\|_{A'} \leq 2\|f\|_{L'}$, und der Beweis des Satzes 1.1.2 läßt sich auf $\|\cdot\|_{L'}$ übertragen: Ist (f_n) eine Cauchyfolge in $LiP(K)$ bezüglich $\|\cdot\|_{L'}$, so ist zunächst $(f_n(x_0))$ Cauchyfolge in \mathbb{R} oder \mathbb{C} , also konvergent. Für $x \neq x_0$ ist für n, m groß genug $\frac{|(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(x_0)|}{d(x, x_0)} \leq \varepsilon$ und $|(f_n - f_m)(x_0)| \leq \varepsilon$, also $|(f_n - f_m)(x)| \leq \varepsilon d(x, x_0) + \varepsilon$, so daß auch $(f_n(x))$ eine Cauchyfolge ist. Damit existiert der punktweise Grenzwert f von (f_n) , für den das $\frac{\varepsilon}{3}$ -Argument wie im Beweis zu Satz 1.1.2 durchführbar ist. Die Abgeschlossenheit von $liP(K)$ in $LiP(K)$ folgt ebenfalls analog.

(ii) Für die Funktion $f_{x_0} : x \mapsto d(x, x_0)$ gilt mit der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$\frac{|f_{x_0}(x) - f_{x_0}(y)|}{d(x, y)} = \frac{|d(x, x_0) - d(y, x_0)|}{d(x, y)} \leq \frac{d(x, y)}{d(x, y)} = 1,$$

also $f_{x_0} \in LiP(K)$, und f_{x_0} ist genau dann unbeschränkt, wenn K unbeschränkt ist. Ist K beschränkt mit Durchmesser $\text{diam}(K)$, so folgt für jedes $f \in LiP(K)$ wegen

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{d(x, x_0)} d(x, x_0) \quad \forall x \in K$$

die Abschätzung

$$\|f\|_{\infty} \leq |f(x_0)| + L(f) \text{diam}(K),$$

mithin $\|f\|_{L'} \leq \|f\|_L \leq \max(1, \text{diam}(K)) \|f\|_{L'}$. Damit ist alles gezeigt. \square

Für beschränktes K sind damit alle Aussagen von Satz 1.1.3 auf die Normen $\|\cdot\|_{L'}$ und $\|\cdot\|_{A'}$ übertragbar, bis auf die Tatsache, daß man hier keine Banachalgebren erwarten kann. Das Beispiel $f : f(x) = x$ auf $[0, 1]$ (mit Basispunkt 0) liefert wieder $L(f^2) = 2(L(f))^2 = 2$. Die im Beweis zu 1.1.4 (ii) gegebenen Funktionen f_{x_0} zeigen mittels $\frac{|f_{x_0}^2(x) - f_{x_0}^2(x_0)|}{d(x, x_0)} = d(x, x_0)$, daß für unbeschränktes K der Raum $LiP(K)$ mit der punktweisen Multiplikation keine Algebra ist.

Dem Problem, daß die konstanten Funktionen einer Normierung von $Lip(K)$ oder $LiP(K)$ entgegenstehen, kann man auch dadurch begegnen, daß man sie, wie im folgenden geschehen, auf geeignete Weise aus dem betrachteten Funktionenraum herausnimmt (vgl. [42], [7] und [50]).

Satz und Definition 1.1.5. *Sei mit einem Basispunkt $x_0 \in K$ der Teilraum $Lip_0(K) = \{f \in LiP(K) : f(x_0) = 0\}$ von $LiP(K)$ und analog $lip_0(K)$ definiert. Dann ist $L(\cdot)$ eine Norm auf $Lip_0(K)$, die diesen Raum zu einem Banachraum macht, in dem $lip_0(K)$ abgeschlossen ist.*

Beweis. Aus $L(f) = 0$ folgt nun $f = 0$, und der Rest geht wie im Beweis zu Satz 1.1.4, nur einfacher. \square

Eine zweite Möglichkeit, sich der konstanten Funktionen zu entledigen, besteht darin, den von ihnen aufgespannten Unterraum N aus dem Raum $LiP(K)$ herauszufaktorisieren (vgl. [32] und [60]). Dazu beobachtet man, daß $LiP(K)$ mit der Halbnorm $L(\cdot)$ vollständig ist: Ist nämlich (f_n) in $LiP(K)$ Cauchyfolge, so ist $(f_n - f_n(x_0))$ Cauchyfolge im Banachraum $Lip_0(K)$, so daß ein $f \in Lip_0(K)$ existiert mit $f_n - f_n(x_0) \xrightarrow{L(\cdot)} f$, womit auch $f_n \xrightarrow{L(\cdot)} f$ in $LiP(K)$ folgt. So sieht man leicht ein (vgl. Lemma I.1.3 in [55]), daß $L(\cdot)$ auf dem Quotientenraum $H(K) := LiP(K)/N$ eine Banachraum-Norm induziert. Gleiches gilt für $\Lambda(K) := lip_0(K)/N$. Des weiteren liefert für K mit Basispunkt x_0 die (wohldefinierte!) Abbildung $[f] \mapsto f - f(x_0)$ einen isometrischen Isomorphismus von $H(K)$ auf $Lip_0(K)$, der $\Lambda(K)$ auf $lip_0(K)$ abbildet. Man sieht also, daß sich die beiden Arten, die Konstanten auf K “wegzudiskutieren”, im Ergebnis gar nicht unterscheiden, und daß insbesondere $Lip_0(K)$ nicht vom Basispunkt abhängt. Bezeichnet \mathbb{K} den Körper \mathbb{R} oder \mathbb{C} , je nach Wahl von \mathbb{K} -wertigen Lipschitzfunktionen, so besteht zudem mittels der Abbildung $(f, c) \mapsto f + c$, $c \in \mathbb{K}$, eine Isomorphie zwischen $Lip_0(K) \oplus \mathbb{K}$ und $LiP(K)$ (isometrisch falls \oplus_1 mit $\|\cdot\|_{A'}$ bzw. \oplus_∞ mit $\|\cdot\|_{L'}$ gewählt wird; wähle für den Nachweis den Basispunkt x_0 in $Lip_0(K)$ und in $LiP(K)$ gleich). Zusammenfassend gilt der

Satz 1.1.6. *Es bestehen mit den obigen Bezeichnungen folgende Isomorphien:*

$$\begin{aligned} H(K) &= LiP(K)/N \cong Lip_0(K) \\ \Lambda(K) &= lip_0(K)/N \cong lip_0(K) \\ Lip_0(K) \oplus \mathbb{K} &\simeq LiP(K) \\ lip_0(K) \oplus \mathbb{K} &\simeq liP(K) \end{aligned}$$

Daß, je nachdem, welche Norm für eine Fragestellung am günstigsten erscheint, die Verwendung der Begriffe “Lipschitznorm” und “Lipschitzraum” nicht einheitlich ist, wird nach den obigen Überlegungen nicht mehr überraschen. So werden auch in dieser Arbeit diese Begriffe dem jeweils betrachteten Raum mit seiner Norm “angepaßt”. Da wir Lipschitzräume nicht als Banachalgebren betrachten wollen, werden von nun an die Versionen aus Satz 1.1.2 für $Lip(K)$ bzw. $lip(K)$ und aus Satz 1.1.5 für $Lip_0(K)$ bzw. $lip_0(K)$ verwandt, die in dieser Reihenfolge auch in der Literatur am häufigsten auftreten. Des weiteren müssen wir für die Beweise der entscheidenden Sätze die Kompaktheit von K fordern, so daß sich auch meist eine Unterscheidung zwischen den Funktionenmengen $LiP(K)$ und $Lip(K)$ erübrigt.

Bemerkung 1.1.7. Vom Banachraum-theoretischen Standpunkt aus können wir von vornherein von der Vollständigkeit des metrischen Raums K ausgehen, denn jede Lipschitz-stetige Funktion auf K kann als gleichmäßig stetige Funktion eindeutig unter Beibehaltung ihrer Lipschitzkonstanten auf die Vervollständigung \overline{K} von K fortgesetzt werden. Es gilt also $Lip(K) \cong Lip(\overline{K})$.

Daß man sich für die Betrachtung des Lipschitzraums $Lip(K)$ zudem auf metrische Räume K mit $\text{diam}(K) \leq 2$ beschränken kann, zeigt die folgende einfache Überlegung: Sei K' die Menge K mit der neuen Metrik d' , definiert durch $d'(x, y) = \min(d(x, y), 2)$ für $x, y \in K$, dann sind K und K' homöomorph, und die lip -Bedingung gilt für dieselben Funktionen. Ist $L'(\cdot)$ die Lipschitz-Halbnorm auf $Lip(K')$ und $L(\cdot)$ die entsprechende in $Lip(K)$, so gilt

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{d'(x, y)} \geq \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)}$$

mit Gleichheit für $d(x, y) \leq 2$, also $L'(f) \geq L(f)$ für $f \in Lip(K')$. Im Falle $d(x, y) \geq 2$ gilt aber $\frac{|f(x) - f(y)|}{d'(x, y)} \leq \|f\|_\infty$, d.h. insgesamt hat man

$$L'(f) \leq \max(\|f\|_\infty, L(f))$$

für $f \in Lip(K)$. Es folgt, daß $Lip(K)$ und $Lip(K')$ sowie $lip(K)$ und $lip(K')$ dieselben Elemente haben und mittels der Identität jeweils isometrisch isomorph sind.

Schließlich liefert eine hübsche Überlegung von Nik Weaver (siehe S. 340 in [50]), daß Lip -Räume als spezielle Lip_0 -Räume angesehen werden können: Man verseehe K' mit einem zusätzlichen Basispunkt e und definiere $d'(x, e) = 1 \ \forall x \in K'$. Mit dem daraus entstandenen metrischen Raum $K_0 = K' \cup \{e\}$ ist dann $Lip(K') \cong Lip_0(K_0)$ mittels der Abbildung, die $f \in Lip(K)$ durch $f(e) = 0$ auf $Lip_0(K_0)$ fortsetzt. Weaver spricht hier von einem “trivial but nonobvious result (if one can use such a phrase)”.

Zusammenfassend gilt also der

Satz 1.1.8. *Für einen metrischen Raum K hat man mit den Bezeichnungen der obigen Bemerkung 1.1.7 die isometrischen Isomorphismen*

$$Lip(K) \cong Lip(\overline{K}) \cong Lip(K') \cong Lip_0(K_0).$$

Das gleiche gilt für die entsprechenden kleinen Lipschitzräume.

Es wurde oben bereits angedeutet, daß es sich lohnt, Lipschitzräume auf Kompakta zu betrachten. Des weiteren mag der Leser bislang eine Motivation für die Definition der kleinen Lipschitzräume vermissen. Um etwas Licht in dieses Dunkel zu bringen, sei daher bereits an dieser Stelle der folgende schöne auf Karel de Leeuw [33] zurückgehende Einbettungssatz formuliert, der in Kapitel 3 eine entscheidende Bedeutung haben wird. Wir definieren zunächst die dafür benötigten Begriffe.

Definition 1.1.9. Sei in K ein kompakter metrischer Raum und in der Menge $\text{diag}(K^2) = \{(x, x) : x \in K\}$ die Diagonale in K^2 vorgelegt. Dann wird mit \hat{K} die disjunkte Vereinigung der topologischen Räume K und $K^2 \setminus \text{diag}(K^2)$ bezeichnet. $C^b(\hat{K})$ ist der Banachraum der beschränkten stetigen Funktionen auf (dem lokalkompakten!) \hat{K} , und $C_0(\hat{K})$ ist der darin enthaltene Unterraum der im “Unendlichen” verschwindenden Funktionen, die wie üblich erklärt sind: Für ein Element $f \in C_0(\hat{K})$ findet man zu jedem $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge $M \subseteq \hat{K}$, so daß $\|f|_{\hat{K} \setminus M}\|_\infty \leq \varepsilon$ gilt.

Damit lautet der Einbettungssatz von de Leeuw:

Satz 1.1.10. Die Abbildung $\Phi : Lip(K) \rightarrow C^b(\hat{K})$, definiert durch

$$\Phi f(x) = f(x) \quad \text{und} \quad \Phi f(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{d(x, y)},$$

ist linear und isometrisch, und es ist $lip(K) = \Phi^{-1}(C_0(\hat{K}))$.

Beweis. Die Wohldefiniertheit ist klar nach Konstruktion, die Linearität auch, die Isometrie-Eigenschaft gilt nach Wahl der Norm $\|\cdot\|_L$ in $Lip(K)$. Für die Aussage über die Lage von $lip(K)$ in $C_0(\hat{K})$ benötigt man neben der lip -Bedingung nur die Tatsache, daß $\{(x, y) \in K^2 \setminus \text{diag}(K^2) : d(x, y) \geq \varepsilon\}$ für jedes $\varepsilon > 0$ kompakt ist. Für $lip(K) \supseteq \Phi^{-1}(C_0(\hat{K}))$ berücksichtigt man, daß es für $f \in Lip(K) \setminus lip(K)$ Folgen $(x_n), (y_n)$ in K mit Grenzwert $x \in K$ und ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $|\Phi f(x_n, y_n)| > \varepsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, wobei $\{(x_n, y_n) : n \in \mathbb{N}\} \subseteq K^2 \setminus \text{diag}(K^2)$ nicht kompakt ist. \square

Bemerkung 1.1.11. Da durch die Werte von Φf auf K die Werte Φf auf $K^2 \setminus \text{diag}(K^2)$ schon festgelegt sind, ist Φ im allgemeinen nicht surjektiv. Des weiteren ist $\Phi(Lip(K))$ bzw. $\Phi(lip(K))$ keine Unter algebra von $C^b(\hat{K})$, da das Produkt der Steigungen im allgemeinen nicht gleich der Steigung des Produkts zweier Funktionen ist. Formuliert man den Satz analog für die Lipschitzalgebra $Lip(K)$ mit der Norm $\|\cdot\|_A$ (siehe S. 367 f in [2]), so ist also Φ im allgemeinen kein Algebrenhomomorphismus. Versucht man den Satz auf lokalkompakte K zu übertragen, so ist zwar \hat{K} immer noch lokalkompakt, die Hauptaussage des Satzes $lip(K) = \Phi^{-1}(C_0(\hat{K}))$ wird dann aber falsch (bzw. gilt nur noch mit “ \supseteq ”). Um sie “richtig zu machen”, muß man weitere Einschränkungen am kleinen Lipschitzraum vornehmen, sprich, man definiert $lip(K)$ dann einfach “passend” (vergleiche S. 341 in [50] und den Schluß der Schlußbemerkungen).

Wir müssen in der vorliegenden Arbeit an zahlreichen Stellen eine Unterscheidung zwischen Räumen reellwertiger und komplexwertiger Lipschitzfunktionen treffen, da sich bestimmte Eigenschaften reellwertiger Lipschitzfunktionen nicht ohne weiteres bzw. nur abgeschwächt auf komplexwertige übertragen lassen. Offensichtlich ist das folgende Konzept (mit welchem Weaver in [48] arbeitet) überhaupt nur auf reellwertige Funktionen anwendbar.

Satz 1.1.12. *Der Banachraum $Lip(K)$ aller beschränkten reellwertigen Lipschitzfunktionen auf einem metrischen Raum K ist unter Bildung des (punktweisen) Supremums $\bigvee f_n$ und des Infimums $\bigwedge f_n$ endlich vieler Elemente $f_n \in Lip(K)$ abgeschlossen und damit ein Unterverband im Verband aller beschränkten reellwertigen Funktionen auf K mit \bigvee und \bigwedge . Gleiches gilt für $lip(K)$. Des weiteren existiert für jede beschränkte Menge $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq Lip(K)$ das Supremum und das Infimum in $Lip(K)$, wobei gilt*

$$\left\| \bigvee f_\alpha \right\|_L \leq \sup\{\|f_\alpha\|_L\} \quad \text{und} \quad \left\| \bigwedge f_\alpha \right\|_L \leq \sup\{\|f_\alpha\|_L\}.$$

Einen Verband, in dem das Supremum bzw. Infimum über beliebig viele Elemente immer existiert, nennt man *vollständig*. Mit dem Ergebnis ist daher zum Beispiel die Einheitskugel $B_{Lip(K)}$ ein vollständiger Verband. Für $B_{lip(K)}$ ist dies übrigens in vielen (“vernünftigen”) Fällen nicht so (vergleiche die Bemerkung vor Satz 3.5.4 in Kapitel 3). Es sei noch darauf hingewiesen, daß $Lip(K)$ kein Banachverband ist, da mit dem Betrag $|f| = f \vee (-f)$ das “Riesz-Norm-Gesetz” $|f| \leq |g| \Rightarrow \|f\|_L \leq \|g\|_L$ im allgemeinen nicht gilt, denn der Betrag “erkennt” Steigungen nicht. Man betrachte als Gegenbeispiel auf $([0, 1], |\cdot|)$ die Funktionen $f : x \mapsto x^2$ und $g : x \mapsto x$.

Beweis. Um die Abgeschlossenheit von $Lip(K)$ und $lip(K)$ unter Bildung des Supremums oder des Infimums endlich vieler Funktionen einzusehen, braucht man nur zu bemerken, daß $f \vee g = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ und $f \wedge g = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$ gilt und mit f wegen $\|f(x) - |f(x) - f(y)|| \leq |f(x) - f(y)|$ stets auch $|f|$ in $Lip(K)$ bzw. $lip(K)$ ist. Sei nun eine durch $M \in \mathbb{R}^+$ beschränkte Menge $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq Lip(K)$ gegeben. Wegen $-\bigvee f_\alpha = \bigwedge(-f_\alpha)$ reicht es, die linke der beiden Ungleichungen zu zeigen. Für die Supremumsnorm ist die Abschätzung klar. Seien $x, y \in K, x \neq y$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $f_\beta \in \{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$ so, daß $\sup_{\alpha \in I}\{f_\alpha(x)\} \leq f_\beta(x) + \varepsilon d(x, y)$ ist, dann gilt

$$\frac{(\bigvee f_\alpha)(x) - (\bigvee f_\alpha)(y)}{d(x, y)} \leq \frac{f_\beta(x) + \varepsilon d(x, y) - f_\beta(y)}{d(x, y)} \leq M + \varepsilon.$$

□

Das Beispiel der im Beweis zu Satz 1.1.4 (ii) angegebenen Funktionen $\{f_{x_0}\}_{x_0 \in K} \subseteq Lip(K)$, definiert durch $f_{x_0}(x) = d(x, x_0)$, zeigt, daß es genügend viele Lipschitzfunktionen auf K gibt, um die Punkte von K zu trennen. Mit dem obigen Satz ist dann mittels der Funktionen $f_{x_0, M} : x \mapsto \min(d(x, x_0), M)$ mit $M \in \mathbb{R}^+$ auch $Lip(K)$ punktetrennend. Des weiteren enthalten die Lipschitzfunktionen auf K genügend Informationen, um damit auf die Metrik von K zurückzuschließen, konkret:

Satz 1.1.13. *$Lip(K)$ ist punktetrennend, und es gilt sogar*

$$d(x, y) = \sup\{|f(x) - f(y)| : f \in Lip(K), L(f) \leq 1\} \quad \forall x, y \in K.$$

Beweis. Die Abschätzung “ \geq ” ist offensichtlich, und “ \leq ” sieht man ein, wenn man $f = f_{x,d(x,y)}$ setzt, womit $|f(x) - f(y)| = |0 - d(x,y)|$ gilt. \square

Bemerkung 1.1.14. Leider kann man von $lip(K)$ oder $liP(K)$ noch nicht einmal erwarten, mehr Funktionen zu enthalten als diejenigen, die trivialerweise immer in diesen Räumen sind, nämlich die Konstanten. Für ein Gebiet K in \mathbb{R} oder \mathbb{R}^n mit der euklidischen Metrik liefert die lip -Bedingung die Differenzierbarkeit von $f \in liP(K)$ mit überall verschwindender Ableitung, so daß $liP(K)$ nur aus den konstanten Funktionen besteht. Man kann sich nun die Frage stellen, wie der metrische Raum K beschaffen sein muß, um zu gewährleisten, daß $lip(K)$ “genügend viele” Funktionen enthält — zum Beispiel, um die Punkte von K zu trennen. Man beachte, daß $lip(K)$ nach Satz 1.1.3 eine (im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ selbstadjungierte) Unter algebra von $C(K)$ ist. Die Punktentrennung von $lip(K)$ wäre damit für kompakte K nach dem Satz von Stone-Weierstraß hinreichend dafür, daß $lip(K)$ dicht in $C(K)$ liegt, also in der Tat eine gewisse “Größe” aufweist.

Betrachtet man zu dieser Fragestellung wieder die Funktionen f_{x_0} im Beweis zu Satz 1.1.4 (ii), so sieht man, daß die Funktionen $\bar{f}_{x_0} : x \mapsto \bar{d}(x, x_0)$ punkt trennend und in $liP(K)$ sind, falls \bar{d} eine andere Metrik auf K ist, für die $\frac{\bar{d}(x,y)}{d(x,y)} \rightarrow 0$ gilt im Falle $d(x,y) \rightarrow 0$. Interessanterweise liefert ein wenig beachteter Artikel von A. G. O’Farrell [11] sogar eine Umkehrung dieses Ergebnisses.

Definition 1.1.15. Eine Metrik \bar{d} auf (K, d) heißt lokal kleiner als d bzw. d heißt lokal größer als \bar{d} , wenn

$$\frac{\bar{d}(x,y)}{d(x,y)} \rightarrow 0 \quad \text{folgt für} \quad d(x,y) \rightarrow 0.$$

Satz 1.1.16. Wenn der metrische Raum (K, d) eine kleinere Metrik zuläßt, so trennt $lip(K)$ die Punkte von K . Ist (K, d) separabel, so gilt auch die Umkehrung.

Sieht man sich für die Umkehrung die Gleichung in Satz 1.1.13 näher an, so mag man eine Vorstellung davon gewinnen, wie man vorgehen könnte, um eine kleinere Metrik \bar{d} über Funktionen aus $lip(K)$ zu definieren. Die nachfolgend ausgeführte Idee von O’Farrell verlangt, daß man sich zur Definition von \bar{d} auf abzählbar viele Funktionen aus $lip(K)$ beschränken kann, die schon die Punkte von K trennen. Damit dies gewährleistet ist, wird gefordert, daß der topologische Raum $K^2 \setminus \text{diag}(K^2)$ ein Lindelöf-Raum ist, d.h. daß jede offene Überdeckung dieses Raums eine abzählbare Teilüberdeckung besitzt. Hinreichend hierfür ist, daß dieser Raum das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, was, da er metrisierbar ist, äquivalent zu dessen Separabilität bzw. zu der von K ist (siehe S. 38 ff, insbesondere Satz 1.3.17, und S. 447, 12), in [43]). Daher die Zusatzvoraussetzung.

Beweis. Analog zur Bemerkung vor dem Satz 1.1.13 liefern die “abgeschnittenen” Funktionen $\bar{f}_{x_0, M}$ die erste Behauptung.

Für die zweite Behauptung wähle zu jedem Punkt $(x, y) \in K^2$ mit $x \neq y$ ein $f_{x,y} \in \text{lip}(K)$ mit $f_{x,y}(x) \neq f_{x,y}(y)$ und o.B.d.A. $L(f_{x,y}) \leq 1$ und definiere stetige Funktionen $F_{x,y}$ auf K^2 durch $F_{x,y}(z, w) = f_{x,y}(z) - f_{x,y}(w)$. Dann ist $N(x, y) = \{(z, w) \in K^2 : F_{x,y}(z, w) \neq 0\}$ eine offene Umgebung von $(x, y) \in K^2$ und die Familie aller $N(x, y)$ für $x \neq y$ eine offene Überdeckung des Lindelöf-Raums $K^2 \setminus \text{diag}(K^2)$. Ist $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von kleinen Lipschitzfunktionen $f_n = f_{x_n, y_n}$, die einer abzählbaren Teilüberdeckung von $K^2 \setminus \text{diag}(K^2)$ mit $\{N(x_n, y_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ entspricht, so definiere (eingedenk $L(f_n) \leq 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$) für alle $x, y \in K^2$

$$\bar{d}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |f_n(x) - f_n(y)| \quad (\leq d(x, y)).$$

Damit ist \bar{d} eine Metrik, da die Menge $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ die Punkte von K trennt. Daß $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{|f_n(x) - f_n(y)|}{d(x, y)} \rightarrow 0$ für $d(x, y) \rightarrow 0$ gilt, sieht man mittels eines $\frac{\epsilon}{2}$ -Arguments (Abschneiden des Reihenrests und Nutzen der lip -Bedingung für endlich viele f_n). \square

Es ist mit dem obigen Satz ein Punkt erreicht, an dem die Hölder-stetigen Funktionen auf den Plan treten können. Aus dem Satz folgt zum Beispiel (nach Bemerkung 1.1.14), daß die euklidische Metrik auf \mathbb{R}^n keine lokal kleinere Metrik zuläßt. Man kann sich natürlich fragen, ob es umgekehrt eine lokal größere Metrik als die euklidische auf \mathbb{R}^n gibt. Eine allgemeine Antwort auf diese Frage liefert die Beobachtung, daß mit jeder Metrik d auf K auch d^α (definiert durch $d^\alpha(x, y) = (d(x, y))^\alpha \ \forall x, y \in K$) für $0 < \alpha < 1$ eine Metrik auf K definiert. Beim Beweis dieser Tatsache stößt man auf die für diese Aussage wesentlichen Eigenschaften der Wurzelfunktionen (vergleiche auch die in [49, S. 346] von Weaver gegebenen Eigenschaften):

Satz und Definition 1.1.17. *Es bezeichne Ω die Menge aller monoton steigenden Funktionen $\omega : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ (1), so daß $\omega(0) = 0$ (2), $\lim_{t \rightarrow 0} \omega(t) = 0$ (3), $\lim_{t \rightarrow 0} \omega(t)/t = \infty$ (4) gilt und die Funktion $t \mapsto \omega(t)/t$ auf \mathbb{R}^+ monoton fallend ist (5). Ist dann d eine Metrik auf der Menge K , so ist $\omega(d)$ für jedes $\omega \in \Omega$ eine lokal größere Metrik als d auf K . $\omega(d)$ heiße verallgemeinerte Höldermetrik auf K , und für $\omega(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha < 1$ heißt $\omega(d) = d^\alpha$ Höldermetrik auf K zum Exponenten α .*

Beweis. Aus (5) folgt die Semiadditivität von $\omega \in \Omega$: Für $0 < \lambda < 1$ und $t > 0$ gilt $\frac{\omega(\lambda t)}{\lambda t} \geq \frac{\omega(t)}{t}$, also $\lambda \omega(t) \leq \omega(\lambda t)$, und das gleiche mit $(1 - \lambda)$ anstelle von λ liefert $\omega(t) \leq \omega(\lambda t) + \omega((1 - \lambda)t)$. Zusammen mit der Monotonie und der Semiadditivität von ω folgt aus der Dreiecksungleichung von d nun die von $\omega(d)$. Wegen (1), (2) und (4) gilt $\omega(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$, so daß $\omega(d)$ eine Metrik ist und darüberhinaus (mit (1)) aus $\omega(d(x, y)) \rightarrow 0$ notwendig $d(x, y) \rightarrow 0$ folgt. Letzteres liefert mit (4) schließlich

$$\lim_{d(x,y) \rightarrow 0} \frac{d(x, y)}{\omega(d(x, y))} = \lim_{d(x,y) \rightarrow 0} \frac{d(x, y)}{\omega(d(x, y))} = 0.$$

\square

Das Beispiel der Funktion

$$f : x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x} & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ x & \text{für } x \geq 1. \end{cases}$$

zeigt, daß die Funktionen in Ω nicht notwendig konkav sein müssen. Die Stetigkeit von $\omega \in \Omega$ in 0 (d.h. (3)) ist nicht notwendig für die Aussage des Satzes, nichtsdestotrotz eine sehr natürliche Voraussetzung, die gewährleistet, daß $\omega(d)$ und d äquivalente Metriken sind, d.h. die gleiche Topologie auf K erzeugen. Andernfalls wäre $\omega(d)$ äquivalent zur diskreten Metrik auf K und trivialerweise $Lip(K) = lip(K)$. Im Lichte der obigen Ergebnisse lassen sich nun Hölder-stetige Funktionen als Lipschitzfunktionen mit besonderen Eigenschaften auffassen:

Definition 1.1.18. Ist (K, d) ein metrischer Raum, $0 < \alpha < 1$ und $\omega \in \Omega$, so bezeichne K^α bzw. K^ω den mit der Höldermetrik d^α bzw. mit der verallgemeinerten Höldermetrik $\omega(d)$ versehenen Raum K . Der Lipschitzraum $LiP(K^\alpha)$ heißt Hölderraum (auf K zum Exponenten α), seine Elemente heißen Hölderfunktionen bzw. Hölder-stetig auf K . Entsprechend definiert man den kleinen Hölderraum $lip(K^\alpha)$ und die verallgemeinerten Hölderräume. Die Lipschitzhalbnorm in $LiP(K^\alpha)$ sei mit $L_\alpha(\cdot)$ bezeichnet und Hölderhalbnorm genannt, die Norm in $LiP(K^\alpha)$ heiße Höldernorm. Analog sei auch $L_\omega(\cdot)$ und die verallgemeinerte Höldernorm erklärt. Die Begriffe finden auch für Lip statt LiP Verwendung.

Satz 1.1.19. *Ist (K, d) ein beschränkter metrischer Raum, so gilt für jedes $\omega \in \Omega$ die Mengeneinklusion $Lip(K) \subseteq lip(K^\omega)$. Insbesondere ist $lip(K^\omega)$ punktetrennend.*

Beweis. Sei $f \in Lip(K)$, dann ist

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{\omega(d(x, y))} = \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)} \frac{d(x, y)}{\omega(d(x, y))} \leq L(f) \frac{d(x, y)}{\omega(d(x, y))}$$

beschränkt und strebt gegen 0 für $\omega(d(x, y)) \rightarrow 0$, da d lokal kleiner als $\omega(d)$ ist. \square

Wir werden in Kapitel 3 (siehe Korollar 3.5.12 und zur Vorfreude Satz 1.2.7) eine weitreichende Verschärfung dieses Satzes erhalten (der ja in der vorliegenden Form anstelle von $\omega(d)$ für jede lokal größere Metrik gilt). Die verallgemeinerten Höldermetriken $\omega(d)$ sind nämlich nicht nur lokal größer als d , sie lassen darüberhinaus auch eine Folge lokal kleinerer Metriken zu, die $\omega(d)$ in einer gewissen gleichmäßigen Art approximieren. Dies sichert neben der Punkttrennung von $lip(K^\omega)$ sogar eine gewisse Art der gleichmäßigen Punkttrennung, welche auch als Fortsetzungssatz für kleine Lipschitzfunktionen auf K^ω formuliert werden kann. Aus diesem folgt dann für Kompakta K (man beachte, daß mit d auch $\omega(d)$ eine kompakte Metrik ist und umgekehrt), daß die Inklusion des obigen Satzes sogar eine dichte Einbettung ist, eine Aussage, die im Kern eine Art Stone-Weierstraß-Satz für kleine Lipschitzräume ist.

Es ist nur natürlich, die Frage zu stellen, ob sich Entsprechungen gewisser Aussagen, deren Gültigkeit man für stetige Funktionen kennt, im Bereich der Lipschitzfunktionen wiederfinden lassen. Als fundamental für die in Kapitel 3 benötigten Fortsetzungseigenschaften kleiner Lipschitzfunktionen stellt sich der folgende Fortsetzungssatz für (große) Lipschitzfunktionen heraus. Er gibt eine Antwort auf die Frage, ob es für Lipschitzfunktionen eine Analogie zum Satz über die Fortsetzbarkeit stetiger Funktionen von Tietze-Urysohn gibt. Die Antwort könnte kaum befriedigender aussehen:

Satz 1.1.20. *Es sei f eine Lipschitzfunktion auf einer Teilmenge M eines metrischen Raumes K mit Werten in \mathbb{R} . Dann läßt sich f unter Beibehaltung seiner Lipschitzkonstanten zu einer Lipschitzfunktion F auf K fortsetzen. Ist f komplexwertig, so existiert auch eine Fortsetzung F von f auf K mit $L(F) \leq \sqrt{2}L(f)$. Ist f beschränkt, so kann die obige Fortsetzung so gewählt werden, daß $\|F\|_\infty = \|f\|_\infty$ für reellwertiges f und $\|F\|_\infty = \sqrt{2} \|f\|_\infty$ für komplexwertiges f gilt.*

Diese schöne Aussage, welche so gänzlich ohne Zusatzvoraussetzungen an f , M oder K auskommt, wurde gleich mehrmals unabhängig voneinander veröffentlicht (siehe [39] und [8]). Dies ist jedoch verständlich, denn der Beweis ist denkbar einfach. Man stößt nämlich auf der Suche nach notwendigen Bedingungen an eine Fortsetzung F für ein reellwertiges f , so daß $L(F) = L(f)$ gilt, sofort auf Bedingungen, die sich als hinreichend erweisen: Offenbar muß (mit $L = L(f)$) für $x \in K \setminus M$ die Ungleichungskette

$$f(y) - L d(x, y) \leq F(x) \leq f(y) + L d(x, y)$$

für alle $y \in M$ gelten. Notwendig ist also die Ungleichung

$$\sup_{y \in M} (f(y) - L d(x, y)) \leq \inf_{y \in M} (f(y) + L d(x, y)), \quad (1.1.1)$$

die aber wegen

$$f(y) - f(z) \leq L d(y, z) \leq L (d(x, y) + d(x, z)) \quad \forall y, z \in M$$

immer erfüllt ist. Erinnert man sich an den Gedankengang im Beweis zum Satz von Hahn-Banach (siehe S. 94 f in [55]), könnte man nun f Punkt für Punkt auf $K \setminus M$ und schließlich durch Anwendung des Zornschen Lemmas wie gewünscht auf ganz K fortsetzen. Glücklicherweise bleibt uns dieser nicht-konstruktive Ansatz erspart, denn in (1.1.1) stehen schon zwei Möglichkeiten, F auf ganz K zu definieren. Die linke findet sich [39], die rechte in [8]. Wir entscheiden uns für die ältere von McShane (1934) in [39].

Beweis. Wegen (1.1.1) ist F mit der Definition

$$F(x) = \sup_{y \in M} (f(y) - L d(x, y)) \quad \forall x \in K$$

auf K wohldefiniert und eine Fortsetzung von f . Des weiteren gilt für $x_1, x_2 \in K$ mit $F(x_1) \geq F(x_2)$

$$\begin{aligned} 0 \leq F(x_1) - F(x_2) &= \sup_{y \in M} (f(y) - L d(x_1, y)) - \sup_{y \in M} (f(y) - L d(x_2, y)) \\ &\leq \sup_{y \in M} (f(y) - L d(x_1, y) - (f(y) - L d(x_2, y))) \leq L \sup_{y \in M} (d(x_2, y) - d(x_1, y)) \\ &\leq L d(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Ist f beschränkt, so ist nach Satz 1.1.12 auch \overline{F} , definiert durch

$$\overline{F}(x) = \min(F(x), \|f\|_\infty) \quad \forall x \in K$$

eine Fortsetzung von f auf K mit $L(\overline{F}) = L(f)$ und $\|\overline{F}\|_\infty = \|f\|_\infty$.

Ist $f = f_1 + i f_2$ komplexwertig mit reellwertigen f_k , so gilt $\|f_k\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ und $L(f_k) \leq L(f)$ für $k = 1, 2$, und es existieren Fortsetzungen F_k von f_k mit $L(F_k) \leq L(f)$ und $\|F_k\|_\infty \leq \|f\|_\infty$. Dann ist $F = F_1 + i F_2$ eine Fortsetzung von f mit

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| &= |(F_1(x) - F_1(y)) + i(F_2(x) - F_2(y))| = \\ &\sqrt{|F_1(x) - F_1(y)|^2 + |F_2(x) - F_2(y)|^2} \leq \sqrt{L^2(d(x, y))^2 + L^2(d(x, y))^2} \\ &\leq \sqrt{2} L d(x, y) \quad \forall x, y \in K. \end{aligned}$$

und $|F(x)| = \sqrt{|F_1(x)|^2 + |F_2(x)|^2} \leq \sqrt{2} \|f\|_\infty \quad \forall x \in K. \quad \square$

Bemerkung 1.1.21. Die Aussage des obigen Satzes verdeutlicht einmal mehr, daß man im allgemeinen zwischen reellwertigen und komplexwertigen Lipschitzfunktionen auf K unterscheiden muß. Denn obwohl die Aussage für reellwertige Funktionen keine Wünsche offen lassen dürfte, enthält sie doch den Wertutropfen, daß man sie für komplexwertige Funktionen nicht ohne weitere Zusatzvoraussetzungen an die Geometrie von K verschärfen kann. T. M. Jenkins gibt hierzu in [24] ein einfaches Gegenbeispiel (vergleiche auch Bemerkung 3.5.5). Gleichzeitig liefert er mit der ‐Lipschitz-vier-Punkt-Eigenschaft‐ eines metrischen Raumes ein notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür, daß die Aussage des Fortsetzungssatzes für reellwertige Funktionen auch für komplexwertige gilt: Ein Raum K hat die Lipschitz-vier-Punkt-Eigenschaft, wenn jede komplexwertige Lipschitzfunktion auf drei Punkten in K stets auf einen beliebigen vierten unter Beibehaltung ihrer Lipschitzkonstanten fortgesetzt werden kann. Die vorgenannte Aussage erhält Jenkins dann durch Anwendung eines Theorems von Helly, das besagt: Wenn sich je $n + 1$ Mengen einer Familie von abgeschlossenen, beschränkten und konvexen Teilmengen des euklidischen \mathbb{R}^n nichtleer schneiden, dann haben alle Mengen dieser Familie einen Punkt gemeinsam. Die Lipschitz-vier-Punkt-Eigenschaft folgt zum Beispiel aus der einfacher nachzuprüfenden ‐Euklidischen Vier-Punkt-Eigenschaft‐, die ein metrischer Raum dann hat, wenn je vier Punkte dieses Raums stets isometrisch in den \mathbb{R}^3 eingebettet werden können.

Es ist klar, daß man die Aussage des obigen Fortsetzungssatzes auf \mathbb{R}^n -wertige Lipschitzfunktionen verallgemeinern kann. In der Literatur findet man mit verschiedensten Voraussetzungen an Urbild- und Zielraum zahlreiche Varianten dieses Satzes (siehe [39], [47] und [8]).

Der folgende Satz, in dem $Lip(K)$ als ein Dualraum identifiziert wird, ist als Abrundung unserer allgemeinen einleitenden Betrachtungen zu Lipschitzräumen gedacht. Einerseits stellt er ein Ergebnis dar, das gewiß für sich genommen schon von Interesse ist und mit welchem sich zudem unter natürlichen Voraussetzungen im Licht von Korollar 2.3.3 große von kleinen Hölderräumen absetzen. Andererseits hat der Satz und seine Beweisidee auch im weiteren Verlauf noch eine Bedeutung, denn er dient in Kapitel 3 als Sprungbrett für ein Resultat, wonach $Lip(K)$ unter bestimmten Voraussetzungen sogar als ein Bidualraum in Erscheinung tritt.

Satz 1.1.22. *Sei K ein metrischer Raum, $x \in K$ und $\delta_x \in Lip(K)'$ mit $\delta_x(f) = f(x) \forall f \in Lip(K)$, also das Auswertungsfunktional an der Stelle x . Sei weiter V der Normabschluß des durch $\{\delta_x\}_{x \in K}$ aufgespannten Unterraums in $Lip(K)'$. Dann ist V' isometrisch isomorph zu $Lip(K)$.*

Bemerkung 1.1.23. Der Beweis dieses Satzes wird in Anlehnung an einen Beweis von Johnson in [25, S. 156 f] geführt, der diesen Satz für Räume vektorwertiger Lipschitzfunktionen formuliert. Da hier zum ersten Mal diejenige Abbildung auftritt, die sich als zentral für Kapitel 3 dieser Arbeit herausstellen wird, wollen wir zunächst auf die Essenz der zugrundeliegenden einfachen Idee, die sich erstmals wieder bei K. de Leeuw in [33] findet, gesondert eingehen.

Die kanonische Einbettung $i_X : X \rightarrow X''$ eines normierten Raums in seinen Bidualraum (siehe [55, S. 104 f]) liefert die einfache Tatsache, daß ein zweiter Prädual eines Raums — falls existent — immer bereits in diesem vorhanden ist. Nichttrivial ist das “umgekehrte” Problem, eine “vernünftige” Realisierung der Elemente in X'' anzugeben, in der sich die Gestalt der Elemente von X wiederfindet. Hat man jedoch speziell einen normierten Raum X von Funktionen, die auf einer Menge K definiert sind, und auf dem die Punktauswertungsfunktionale δ_x stetig sind, so kann man jedem Funktional $F \in X''$ wieder eine Funktion $I(F)$ auf K zuordnen, einfach durch die Definition $I(F)(x) = F(\delta_x) \forall x \in K$. Ist zusammen mit der kanonischen Einbettung i_X das Element $F = i_X(f)$ für ein $f \in X$, so folgt $I(F)(x) = i_X(f)(\delta_x) = \delta_x(f) = f(x)$, also $I(i_X(f)) = f$. Die lineare Abbildung $I : X'' \rightarrow I(X'')$ liefert also einen Funktionenraum $I(X'')$, in den der ursprüngliche natürlich eingebettet ist. Man kann sich nun fragen, wie $I(X'')$ (und damit vielleicht auch X'') aussieht, wenn X gegeben ist (oder auch umgekehrt), und diese Frage hat tatsächlich eine Relevanz. Im folgenden starten wir bei $X = Lip(K)$ und kommen wieder bei $I(X'') = Lip(K)$ heraus, in Kapitel 3 werden wir bei $lip(K)$ starten und ebenfalls bei $Lip(K)$ herauskommen.

Beweis. Es sei im folgenden die Norm in $Lip(K)'$ mit $\|\cdot\|'_L$ und die Norm in $Lip(K)''$ mit $\|\cdot\|''_L$ bezeichnet.

Zunächst sind die Punktauswertungsfunktionale $\delta_x, x \in K$, auf $Lip(K)$ stetig, und es gilt $\|\delta_x\|'_L \leq 1$ wegen $|\delta_x(f)| = |f(x)| \leq \|f\|_L$ und $\|\delta_x - \delta_y\|'_L \leq d(x, y)$ wegen $|(\delta_x - \delta_y)(f)| = |f(x) - f(y)| \leq \|f\|_L d(x, y)$.

Daher ist die lineare Abbildung $I : Lip(K)'' \rightarrow Lip(K)$, definiert durch

$$I(F)(x) = F(\delta_x) \quad \forall F \in Lip(K)'' \quad \forall x \in K,$$

kontrahierend, denn es ist $\|I(F)\|_\infty = \sup_{x \in K} |F(\delta_x)| \leq \|F\|'_L$ und

$$L(I(F)) = \sup_{\substack{x, y \in M \\ x \neq y}} \frac{|F(\delta_x) - F(\delta_y)|}{d(x, y)} \leq \sup_{\substack{x, y \in M \\ x \neq y}} \frac{\|F\| \|\delta_x - \delta_y\|}{d(x, y)} \leq \|F\|'_L.$$

Andererseits folgt mit der kanonischen Einbettung $i_{Lip(K)} : Lip(K) \rightarrow Lip(K)''$ gemäß Vorbemerkung $I \circ i_{Lip(K)} = Id_{Lip(K)}$ und

$$\|f\|_L = \|I(i_{Lip(K)}(f))\|_L \leq \|i_{Lip(K)}(f)\|'_L = \|f\|_L \quad \forall f \in Lip(K),$$

so daß I Norm 1 hat und surjektiv, d.h. insgesamt eine Quotientenabbildung ist (bzw. mit $i_{Lip(K)}$ als Projektion in $Lip(K)''$ mit Norm 1 aufgefaßt werden kann). Nun gilt wegen $I(F) = 0 \Leftrightarrow F(\delta_x) = 0 \quad \forall x \in K$ mit den Bezeichnungen des Satzes $\ker(I) = V^\perp$. Damit besteht aber gemäß Satz III.1.10 in [55] die isometrische Isomorphie $Lip(K)''/V^\perp \cong Lip(K)$, und andererseits gilt mit dem abgeschlossenen Unterraum V in $Lip(K)$, ebenfalls nach Satz III.1.10 in [55], kanonisch $V' \cong Lip(K)''/V^\perp$, also insgesamt $Lip(K) \cong V'$. \square

Einige Bemerkungen zu diesem Satz scheinen angebracht:

Es ist klar, daß der obige Beweisgedanke das gleiche liefert für den Raum $X = \ell^\infty(K) = I(X'')$ aller beschränkten Funktionen auf K mit der Supremumsnorm.

Das erste Ergebnis dieser Art taucht übrigens in einem Artikel von Arens und Eells [1] über topologische Einbettungen auf, die einen durch gewisse Funktionen auf K mit endlichem Träger (vergleiche obigen Beweis) generierten freien Vektorraum mit einer geeigneten Norm versehen und damit einen Prädual von $Lip_0(K)$ erhalten. Wir werden in Theorem 3.4.5 durch Überlegungen, die von Kantorovich und Rubinstein angestellt wurden (nachzulesen in [29] und in Abschnitt 3.4), auf einen Prädual von $Lip(K)$ in Form eines speziellen Maßraums auf K stoßen. Auch hier werden wieder die Punktauswertungsfunktionale eine besondere Rolle spielen. Weaver weist in [52, S. 40] auf die nach wie vor offene Frage hin, ob der Prädualraum von $Lip(K)$ bis auf isometrische Isomorphie eindeutig ist.

Interessanterweise sind wir bei unserem obigen Beweis mit relativ einfachen Techniken ausgekommen. Im allgemeinen würde man natürlich zu weitaus stärkeren Geschützen aus der Banachraumtheorie greifen (vergleiche [20, § 23] zu Dualraumkriterien nach Dixmier). Die Tatsache etwa, daß $i_X(X)$ im Bidualraum X'' komplementiert ist vermöge einer Projektion mit Norm 1 (das ist bei uns I) und einem w^* -abgeschlossenen Komplement (das ist $\ker(I)$ als Annihilator oder auch Polare von V), ist äquivalent dazu, daß X zu einem Dualraum

isometrisch isomorph ist. Als Beispiel sei noch der Satz von Dixmier-Ng zitiert, der besagt, daß X isometrisch isomorph zu einem Dualraum ist, wenn es auf X eine lokalkonvexe Hausdorff-Topologie gibt, bezüglich der die Einheitskugel B_X kompakt ist. Im Falle von $X = Lip(K)$ drängt sich da die Topologie der punktweisen Konvergenz auf, bezüglich der $B_{Lip(K)}$ natürlich abgeschlossen ist. Wegen $B_{Lip(K)} \subseteq (B_{\mathbb{K}})^K$ und dem Satz von Tychonov (siehe B.2.10 in [55]) ist $B_{Lip(K)}$ damit in dieser Topologie auch kompakt. Im Hinblick auf unseren Beweis beachte man, daß die Funktionale in V bezüglich der Topologie der punktweisen Konvergenz stetig sind.

Bemerkung 1.1.24. Das Ende dieses einführenden Abschnitts sei einer Versuchung gewidmet, die angesichts der vor der Durchführung des Beweises von Satz 1.1.20 gemachten Bemerkung und des gerade besprochenen Satzes 1.1.22 sehr verlockend erscheint, der man aber nicht erliegen sollte. Im Zusammenhang mit dem Beweis des Fortsetzungssatzes wurde deutlich, daß man große Lipschitzfunktionen von Teilmengen $M \subseteq K$ völlig analog wie im Beweis zum Satz von Hahn-Banach Funktionale von Unterräumen $U \subseteq X$ eines Banachraumes X mit dem Zornschen Lemma fortsetzen kann. Und mit dem letzten Satz 1.1.22 sieht man auch, daß dies kein Zufall ist, ja man könnte sogar den Versuch unternehmen, mit diesem Satz den Fortsetzungssatz für Lipschitzfunktionen aus dem Satz von Hahn-Banach *herzuleiten*, und zwar durch die folgende Überlegung: Mit $M \subseteq K$ sei V'_M gemäß Satz 1.1.22 isometrisch isomorph zu $Lip(M)$ und V'_K isometrisch isomorph zu $Lip(K)$. Eine Lipschitzfunktion auf M “ist” damit ein Funktional auf dem Abschluß von $\text{span} \{\delta_x\}_{x \in M}$ in $Lip(M)'$ mit $f(\delta_x) = f(x) \forall x \in M$ und besitzt nach Hahn-Banach wegen $V_M \subseteq V_K$ eine normgleiche Fortsetzung F auf V_K mit $F(\delta_x) = F(x) \forall x \in K$ und damit $F(x) = f(x) \forall x \in M$. Daß dieses Argument einen Haken haben muß, sieht man schon daran, daß man damit die normgleiche Fortsetzbarkeit auch für komplexwertige Lipschitzfunktionen erhielte, was nach Bemerkung 1.1.21 aber nicht möglich ist.

Der Knackpunkt besteht in der Aussage “ $V_M \subseteq V_K$ ”, welche weit weniger trivial als die Mengeninklusion $U_M := \text{span} \{\delta_x\}_{x \in M} \subseteq \text{span} \{\delta_x\}_{x \in K} =: U_K$ ist und als isometrische Einbettung $i : V_M \rightarrow V_K$ erkannt werden muß, um eine Anwendung des Satzes von Hahn-Banach zu ermöglichen und damit obiger Argumentation zu ihrem Recht zu verhelfen. Mit der Norm $\|\cdot\|_M$ auf V_M und $\|\cdot\|_K$ auf V_K braucht man dafür aber den Nachweis der Gleichheit

$$\|\ell\|_M = \sup_{f \in B_{Lip(M)}} |\ell(f)| = \sup_{f \in B_{Lip(K)}} |i(\ell)(f)| = \|i(\ell)\|_K \quad \forall \ell \in V_M,$$

worin nur “ \geq ” mit der Restriktionsabbildung $R : Lip(K) \rightarrow Lip(M)$ klar ist. Für die umgekehrte Abschätzung “ \leq ” benötigt man aber wieder die normgleiche Fortsetzbarkeit von Lipschitzfunktionen von M auf K , also gerade das, was man eigentlich zeigen wollte. Wir werden übrigens noch zwei weitere Situationen erleben (siehe Bemerkung 2.2.12 und den Beweis (v) \Rightarrow (iv) von Theorem 3.5.3), in denen sich die Anwendung von Satz 1.1.20 als Fehlerquelle erweist.

Im Buch [29, S. 233] von Kantorovich wurde der Versuchung, Satz 1.1.20 mit Hahn-Banach und dem dortigen oben schon genannten Prädual von $Lip(K)$ zu

beweisen, leider nachgegeben. Da dieser Prädualraum nur im reellen Fall und mit einer unabhängig von Lipschitzfunktionen definierten Norm daherkommt, hat man dort noch Chancen auf Erfolg — man müßte sich aber anstrengen (siehe Abschnitt 3.4)! Interessant ist in diesem Zusammenhang noch eine Bemerkung von Weaver in [52, S. 42/43]. Weaver betrachtet den auch schon erwähnten von Arens und Eells [1] definierten Prädual von $Lip(K)$ (begründet, wieso dieser ein besonderer ist, siehe [52, S. 41]) und weist auf die oben genannte isometrische Injektion i als Folge des Fortsetzungssatzes hin (tappt also nicht in die Falle). Er behauptet dort aber auch — ohne Begründung natürlich — daß es möglich ist, die Normerhaltung von i unabhängig von diesem Satz zu erhalten und ihn damit aus dem Satz von Hahn-Banach zu gewinnen. Und auf Nachfrage erhält man auch eine kleine Skizze der Begründung per email.

1.2 H_α und H_α^0 als Standardbeispiele großer und kleiner Lipschitzräume

In diesem Abschnitt wollen wir uns ein etwas genaueres Bild von Lipschitzräumen machen, indem wir eine gewisse Klasse von konkreten einfachen Lipschitzräumen näher ansehen. Es ist naheliegend, hierfür das Einheitskompaktum $[0, 1]$, versehen mit der gewöhnlichen Metrik, heranzuziehen und darauf gleich eine ganze Klasse von Lipschitzräumen zu betrachten, zum Beispiel mit dem Basispunkt $x_0 = 0$ alle Hölderräume $H_\alpha := Lip_0([0, 1]^\alpha)$ und $H_\alpha^0 := lip_0([0, 1]^\alpha)$ mit $0 < \alpha \leq 1$. Diese Räume wurden erstmals Anfang der 60er Jahre ausgiebig und gewinnbringend studiert. Die wichtigsten Ergebnisse aus dieser Zeit stammen von J. Musielak und Z. Semadeni [42], Z. Ciesielski [7], K. de Leeuw [33] sowie von S. G. Krein und Y. I. Petuin [32]. Hier wollen wir zunächst die grundlegenden Erkenntnisse von Musielak und Semadeni, die von Krein und Petuin ergänzt und erweitert wurden, genauer betrachten.

Erinnern wir uns an die in der Einleitung dieser Arbeit gestellte Frage, wie der kleine Lipschitzraum im großen liegt, so können wir diese Frage nun auf die ganze Familie von Lipschitzräumen $\{H_\alpha\}$ bzw. $\{H_\alpha^0\}$ mit $0 < \alpha \leq 1$ ausdehnen. Mit Blick auf Satz 1.1.19 und der Beobachtung, daß für $0 < \alpha' < \alpha$ die Metrik $d^{\alpha'} = (d^\alpha)^{\frac{\alpha'}{\alpha}}$ eine Höldermetrik zu $d^{\alpha'}$ mit dem Exponenten $0 < \frac{\alpha'}{\alpha} < 1$ ist (also lokal größer als d^α), folgen die grundlegenden Mengeninklusionen

$$H_\alpha \subseteq H_{\alpha'}^0 \subseteq H_{\alpha'} \quad \text{für} \quad \alpha' < \alpha. \quad (1.2.1)$$

$\{H_\alpha\}$ und $\{H_\alpha^0\}$ bilden also jeweils eine mit fallendem α aufsteigende Familie von Mengen. Dabei ist jeweils die Einbettung in einen größeren Raum stetig mit (siehe Beweis zu Satz 1.1.19 mit d^α statt d und $d^{\alpha'}$ statt $\omega(d)$)

$$L_{\alpha'}(f) \leq L_\alpha(f) \quad \forall f \in H_\alpha. \quad (1.2.2)$$

Des weiteren sind natürlich die obigen Inklusionen echt, da für $h : x \mapsto x^\alpha$ stets $h \in H_{\alpha'} \Leftrightarrow \alpha' \leq \alpha$ gilt: Wegen der Semiadditivität der Wurzelfunktion

(siehe Beweis zu Satz 1.1.17) gilt für $0 \leq y \leq x$ stets $x^\alpha \leq y^\alpha + (x - y)^\alpha$, also $\frac{x^\alpha - y^\alpha}{d^\alpha(x, y)} \leq 1$, und mit $y = 0$ sieht man $L_\alpha(h) = 1$ und (mit $x \rightarrow 0$) $h \notin H_\alpha^0$. Es ist klar, daß für jedes $g \in H_\alpha$ auch die um c ($0 < c < 1$) nach rechts verschobene und in $[0, c]$ durch 0 fortgesetzte Funktion g_c in H_α ist. Für unser obiges h bedeutet dies, daß $\{h_c\}_{c \in [0, 1]}$ mit

$$h_c : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq c \\ (x - c)^\alpha & \text{für } c \leq x \leq 1 \end{cases}$$

eine überabzählbare Familie von Funktionen in $[0, 1]$ ist, für die (mit $c' \leq c$) gilt:

$$\frac{(h_{c'} - h_c)(c) - (h_{c'} - h_c)(c')}{(c - c')^\alpha} = \frac{(c - c')^\alpha - 0}{(c - c')^\alpha} = 1,$$

also $L_\alpha(h_{c'} - h_c) \geq 1$ (sogar = 1, wie man leicht sieht). Das bekannte Kardinalitätsargument (vergleiche Beispiel (c) zu Satz I.2.9 in [55]) liefert nun den

Satz 1.2.1. H_α ist nicht separabel für $0 < \alpha \leq 1$.

Bemerkung 1.2.2. Man wird über die Aussage dieses Satzes nach den in Abschnitt 1.1 zusammengestellten Ergebnissen nicht mehr sonderlich überrascht sein, denn wir haben im Beweis zu Satz 1.1.4 (ii) bereits einfache aus der Metrik d (was hat man auch sonst zur Verfügung!) gewonnene Lipschitzfunktionen $f_{x_0} : x \mapsto d(x, x_0)$ auf allgemeinen metrischen Räumen K mit $L(f_{x_0}) = 1$ kennengelernt, die unseren obigen h_c ja im wesentlichen entsprechen. Mit verschiedenen $x_0, y_0 \in K$ hat man dann

$$\begin{aligned} L(f_{x_0} - f_{y_0}) &\geq \frac{|f_{x_0}(x_0) - f_{y_0}(x_0) - (f_{x_0}(y_0) - f_{y_0}(y_0))|}{d(x_0, y_0)} \\ &= \frac{|-d(x_0, y_0) - d(y_0, x_0)|}{d(x_0, y_0)} = 2 \end{aligned}$$

und damit die Nicht-Separabilität von $LiP(K)$, falls K überabzählbar ist. Mit den beschränkten Funktionen $x \mapsto \min(d(x, x_0), d(y_0, x_0))$ (siehe Satz 1.1.12) erhält man das gleiche für $Lip(K)$. In Abschnitt 2.3 werden wir jedoch auch dieses Ergebnis weiter verallgemeinern (siehe Korollar 2.3.5), indem wir uns noch der Überabzählbarkeit von K als Voraussetzung entledigen.

Analog zu obigem $h : x \mapsto x^\alpha$ gilt auch $f_{x_0} \in LiP(K) \setminus lip(K)$, sobald x_0 ein Häufungspunkt in K ist. Wir werden später, ebenfalls in Abschnitt 2.3, die Lücke zwischen den Hölderräumen $Lip(K^\alpha)$ und $lip(K^\alpha)$ unter der an den metrischen Raum gestellten Voraussetzung $\inf_{x \neq y} d(x, y) = 0$ näher untersuchen und feststellen, daß diese, auch unter Banachraum-theoretischen Gesichtspunkten, "ziemlich groß" ist (vergleiche Theorem 2.3.1 und Korollar 2.3.4).

Wir werden sehen, daß die Eigenschaft der H_α , nicht separabel zu sein, von den kleinen Hölderräumen H_α^0 für $0 < \alpha < 1$ nicht geteilt wird. Doch zunächst wollen wir uns den Sonderfall $\alpha = 1$ (für den ja $H_1^0 = \{0\}$ gilt) noch etwas genauer ansehen.

Satz 1.2.3. $H_1 = Lip_0([0, 1])$ ist isometrisch isomorph zu $L^\infty([0, 1])$ mittels der Abbildung

$$\begin{aligned}\Phi : L^\infty([0, 1]) &\rightarrow H_1 \\ \Phi(g)(x) &= \int_0^x g(t) dt.\end{aligned}$$

Beweis. Die offenbar lineare Abbildung Φ ist wohldefiniert und kontraktiv, da für alle $x, y \in [0, 1], x \neq y$,

$$\frac{|\Phi(g)(x) - \Phi(g)(y)|}{|x - y|} = \frac{1}{|x - y|} \left| \int_y^x g(t) dt \right| \leq \|g\|_\infty \quad \forall g \in L^\infty([0, 1])$$

erfüllt ist. Andererseits sind die Lipschitzfunktionen in H_1 als absolut stetige Funktionen fast überall differenzierbar, und es gilt nach dem Hauptsatz (siehe A.1.10 (a) in [55])

$$f(x) = \int_0^x f'(t) dt \quad \text{mit} \quad L(f) = \sup_{0 \leq x < x+h \leq 1} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{h} \geq \|f'\|_\infty.$$

Also ist Φ surjektiv mit $\Phi(f') = f$. Nach dem zweiten Teil des Hauptsatzes (siehe A.1.10 (b) in [55]) ist Φ auch injektiv mit $(\Phi(g))' = g \quad \forall g \in L^\infty([0, 1])$. Zusammen mit $\|\Phi^{-1}(f)\|_\infty \leq L(f)$ ist Φ also ein isometrischer Isomorphismus. \square

Definition 1.2.4. Sei mit $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = 1, n \in \mathbb{N}$, eine Partition des Intervalls $[0, 1]$ gegeben. Bezeichnet χ_A die charakteristische Funktion der Menge $A \subseteq [0, 1]$, so heißt eine Funktion $g \in L^\infty([0, 1])$ *Treppenfunktion*, wenn mit reellen oder komplexen $b_k, k = 1, \dots, n$,

$$g = \sum_{k=1}^n b_k \chi_{[a_{k-1}, a_k)}$$

fast überall auf $[0, 1]$ zutrifft. Die Menge der *Regelfunktionen* ist gerade der Abschluß der Treppenfunktionen in $L^\infty([0, 1])$. Weiter sei eine Funktion $f \in H_1$, welche auf jedem Intervall $[a_{k-1}, a_k], k = 1, \dots, n$, linear ist, als *polygonale Funktion* oder als *Polygon* bezeichnet. Die Punkte $(a_k, f(a_k)), k = 0, \dots, n$, heißen *Knoten* des Polygons. Sind die Koordinaten aller Knoten eines Polygons rational (oder in $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ im Falle einer komplexwertigen Funktion), so nennt man das Polygon *rational*.

Bemerkung 1.2.5. Durch Satz 1.2.3 mag man eine Vorstellung davon gewinnen, wie “stark” die Lipschitznorm auf H_1 ist, denn obwohl in der Supremumsnorm H_1 nur ein kleiner Teilraum des vergleichsweise großen $L^\infty([0, 1])$ ist, erhält man durch die Lipschitznorm so viel Information über die Konvergenz in H_1 , daß man die ganze Reichhaltigkeit von $L^\infty([0, 1])$ dazu braucht, um diese zu beschreiben. Beispielsweise sieht man schnell, daß obiges Φ die Treppenfunktionen in $L^\infty([0, 1])$ auf die polygonalen Funktionen abbildet, so daß genau die Funktionen $f \in H_1$ durch Polygone in der Norm $L(\cdot)$ approximierbar sind, für die $f = \Phi(g)$ mit einer Regelfunktion g auf $[0, 1]$ gilt. Da

Regelfunktionen insbesondere Riemann-integrierbar sind, kann kein $f \in H_1$, für das $\Phi^{-1}(f)$ nicht Riemann-integrierbar ist, durch Polygone in der Lipschitznorm angenähert werden. Sind weiter $f \in H_1$ differenzierbar in $x_0 \in (0, 1)$ und $h \in H_1$ nicht differenzierbar in x_0 mit existenter links- und rechtsseitiger Ableitung $h'_-(x_0)$ und $h'_+(x_0)$ und gilt $h'_+(x_0) - h'_-(x_0) = a$, so folgt $(h'_+(x_0) - f'_+(x_0)) + (f'_-(x_0) - h'_-(x_0)) = a$ und $L(h - f) \geq \frac{|a|}{2}$. Insbesondere kann ein Polygon mit einem Knoten an einer irrationalen Stelle nicht durch rationale Polygone in der Lipschitznorm $L(\cdot)$ approximiert werden. Dies ändert sich jedoch schnell, wenn man H_1 mit einer Höldernorm versieht:

Lemma 1.2.6. *Für $0 < \alpha < 1$ liegt die Menge aller polygonalen Funktionen dicht im Raum $(H_1, L_\alpha(\cdot))$.*

Wir werden in Abschnitt 2.1 eine weitaus stärkere Aussage beweisen (nämlich Theorem 2.1.2), die das obige Lemma und auch einige weitere Ergebnisse in diesem Abschnitt impliziert. Trotzdem wollen wir uns zumindest die interessante Beweisidee von Musielak und Semadeni zu Gemüte führen.

Beweisskizze. Es werden für $0 < \alpha \leq 1$ die folgenden durch die Abbildung Φ aus Satz 1.2.3 in $L^\infty([0, 1])$ induzierten Normen $\|\cdot\|_\alpha^\Phi$ betrachtet:

$$\|g\|_\alpha^\Phi := L_\alpha(\Phi(g)) = \sup_{0 \leq x < x+h \leq 1} h^{-\alpha} \left| \int_x^{x+h} g(t) dt \right| \quad \forall g \in L^\infty([0, 1]).$$

Damit reicht es zu zeigen, daß die Treppenfunktionen für $0 < \alpha < 1$ dicht in $(L^\infty([0, 1]), \|\cdot\|_\alpha^\Phi)$ liegen. Da Linearkombinationen charakteristischer Funktionen dicht in $(L^\infty([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ sind und, wie leicht zu sehen, $\|g\|_\alpha^\Phi \leq \|g\|_\infty \quad \forall g \in L^\infty([0, 1])$ gilt, liegen sie auch dicht in $(L^\infty([0, 1]), \|\cdot\|_\alpha^\Phi)$, so daß nur nachzuweisen bleibt, daß jede charakteristische Funktion χ_A einer meßbaren Menge $A \subseteq [0, 1]$ durch Treppenfunktionen in der Norm $\|\cdot\|_\alpha^\Phi$ approximierbar ist. Und letzteres funktioniert tatsächlich, wenn man eine genügend feine Partition von $[0, 1]$ wählt mit äquidistanten Teilintervallen $[a_k, b_k]$ und auf diesen das approximierende g als Mittelwert $\frac{1}{|a_k - b_k|} \int_{a_k}^{b_k} \chi_A(t) dt$ von χ_A auf $[a_k, b_k]$ definiert. \square

Im Hinblick auf die Bemerkung zu Satz 1.1.19 ist das folgende Dichtheitsresultat interessant:

Satz 1.2.7. *Die Menge H_1 liegt dicht in H_α^0 für jedes $\alpha < 1$.*

Auch dieser Satz wird in Abschnitt 2.1 als Korollar des viel stärkeren Theorems 2.1.2 abfallen und in Abschnitt 2.2 (Korollar 2.2.7) und schließlich in Kapitel 3 (Korollar 3.5.12) noch weiter verallgemeinert. Um ihn jedoch in diesem einfachen Fall direkt einzusehen, wollen wir den Beweis von Musielak und Semadeni an dieser Stelle durchexerzieren.

Beweis. Zu $f \in H_\alpha^0$ betrachte für $n \in \mathbb{N}$ die Funktionen f_n , definiert durch

$$f_n(x) = n \int_x^{x+\frac{1}{n}} f(t) dt - n \int_0^{\frac{1}{n}} f(t) dt \quad x \in [0, 1],$$

indem man $f(x) = f(1)$ für $x \geq 1$ setzt. Man sieht, daß diese Definition schöne Effekte hat: Zunächst nähert man durch das erste Integral $f(x)$ immer besser an, für $n \rightarrow \infty$ erhält man die Ableitung der Integralfunktion über f an der Stelle x , also $f(x)$. Der zweite Term geht für $n \rightarrow \infty$ gegen 0 und sichert $f_n(0) = 0$. Schreibt man $\frac{1}{n}f_n(x)$ als Differenz der Integrale $\int_{\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} - \int_0^x$ über $f(t)$, so sieht man, daß jedes f_n stetig differenzierbar ist, also nach dem Mittelwertsatz (oder nach Satz 1.2.3) in H_1 liegt. Mit der Variablentransformation $t = x + s$ im ersten Integral erhält man

$$f_n(x) - f(x) = n \int_0^{\frac{1}{n}} (f(x+s) - f(x) - f(s)) ds.$$

Sei abkürzend noch $L_{\alpha,x,h}(g) = \frac{|g(x+h)-g(x)|}{h^\alpha} \quad \forall g \in H_\alpha$ geschrieben, also $L_\alpha(g) = \sup_{0 \leq x < x+h \leq 1} L_{\alpha,x,h}(g)$. Wähle nun ein $\varepsilon > 0$. Wir unterscheiden zwei Fälle. Wegen $f \in H_\alpha^0$ existiert ein $\delta > 0$, so daß $L_{\alpha,x,h}(f) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $x \in [0, 1]$ gilt, wenn $h \leq \delta$ ist. In diesem Fall folgt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} L_{\alpha,x,h}(f_n - f) &= h^{-\alpha} n \left| \int_0^{\frac{1}{n}} (f(x+s+h) - f(x+h) - f(x+s) + f(x)) ds \right| \\ &\leq n \int_0^{\frac{1}{n}} (L_{\alpha,x+s,h}(f) + L_{\alpha,x,h}(f)) ds \leq n \frac{1}{n} \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \right) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Im Falle $h > \delta$ ist

$$\begin{aligned} L_{\alpha,x,h}(f_n - f) &\leq n \int_0^{\frac{1}{n}} \left(\frac{|f(x+s+h) - f(x+s)|}{s^\alpha} + \frac{|f(x+h) - f(x)|}{s^\alpha} \frac{s^\alpha}{h^\alpha} \right) ds \\ &\leq \frac{2nL_\alpha(f)}{h^\alpha} \int_0^{\frac{1}{n}} s^\alpha ds \leq \frac{2nL_\alpha(f)}{\delta^\alpha} \frac{1}{(\alpha+1)n^{\alpha+1}} = \frac{2L_\alpha(f)}{\delta^\alpha(\alpha+1)n^\alpha} \leq \varepsilon \text{ für große } n. \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir $L_\alpha(f_n - f) \leq \varepsilon$ für hinreichend großes n . □

Wir notieren noch das sich unmittelbar ergebende

Korollar 1.2.8. Die Menge $\bigcup_{\varepsilon > 0} H_{\alpha+\varepsilon}$ liegt dicht in H_α^0 für alle $\alpha < 1$.

Es schließt sich nun das schon angekündigte zu Satz 1.2.1 gehörige Resultat an, welches auch (vergleiche Korollar 2.3.5 und Satz 3.1.9) in allgemeineren Fällen gilt und einen wichtigen Unterschied zwischen kleinen und großen Lipschitzräumen aufzeigt.

Satz 1.2.9. Die kleinen Hölderräume H_α^0 und die Räume H_α , versehen mit der Norm $L_{\alpha'}(\cdot)$ für $0 < \alpha' < \alpha \leq 1$, sind separabel. Konkreter gilt: Die Menge aller rationalen Polygone liegt dicht in diesen Räumen.

Zum Beweis beachte man erstens, daß die Aussage über die Räume H_α wegen (1.2.1) aus der über die Räume H_α^0 folgt, und zweitens, daß nach Lemma 1.2.6 und Satz 1.2.7 die Menge der Polygone in jedem kleinen Hölderraum H_α^0 dicht

liegt. Es muß also nur noch gezeigt werden, daß Polygone in der Norm L_α für $\alpha < 1$ durch rationale Polygone angenähert werden können (was ja — siehe Bemerkung 1.2.5 — in der Norm $L_1(\cdot)$ nicht stimmt!). Dies sieht man jedoch mit dem folgenden Lemma leicht ein.

Lemma 1.2.10. *Sei f stetig auf $[0, 1]$ und jeweils linear in $[a, b]$ und $[b, c]$ für $0 \leq a < b < c \leq 1$. Des weiteren sei $a < y < b$ und g_y definiert durch*

$$g_y(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in [0, y] \cup [c, 1] \\ \text{linear in } [y, c]. \end{cases}$$

Dann gilt $\lim_{y \rightarrow b} L_\alpha(f - g_y) = 0$ für $0 < \alpha < 1$.

Der Beweis dieses Lemmas liefert die Abschätzung $L_\alpha(f - g_y) \leq C(b - y)^{1-\alpha}$ mit einer Konstanten $C > 0$. Dies nachzurechnen ist nicht schwer, aber wenig erquickend, so daß wir hier darauf verzichten wollen — zumal uns die Aussage des Satzes 1.2.9, die wir damit zeigen wollen, in Abschnitt 2.1 direkt ins Auge springen wird.

Für die Interpolationstheorie ist es wichtig zu wissen, auf welche Weise Räume einer aufsteigenden Familie von Banachräumen ineinander liegen. S. G. Krein und Y. I. Petuin definieren in [32] zu diesem Zweck *Skalen* von Banachräumen. Bevor wir diesen Begriff mit Leben füllen, halten wir für die Familie $\{H_\alpha^0\}_{\alpha \in (0,1)}$ fest, daß nach Satz 1.2.7 der Raum H_α^0 in $H_{\alpha'}^0$ für $\alpha' < \alpha$ dicht eingebettet ist. Diese Einbettung ist wegen (1.2.2) sogar kontraktiv. Krein und Petuin nennen eine solche Einbettung *normal*. Wir können den nun folgenden Satz mit gutem Recht als ein Analogon zum Einbettungssatz von Rellich (siehe V.2.13 in [55]) ansehen und uns gleichzeitig über den geringen Beweisaufwand freuen.

Satz 1.2.11. *Im Falle $0 < \alpha' < \alpha < 1$ ist H_α^0 normal und kompakt in $H_{\alpha'}^0$ eingebettet.*

Beweis. Es ist nur noch die Kompaktheit der Inklusionsabbildung (also der Identität) zu zeigen. Sei also $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine durch $M > 0$ beschränkte Folge in H_α^0 . Dann ist (f_n) gleichmäßig beschränkt und glücklicherweise auch gleichgradig stetig, so daß die Voraussetzungen des Satzes von Arzelà-Ascoli (an was sollte man sonst auch denken?) erfüllt sind. Also existiert eine gleichmäßig konvergente Teilfolge, o.B.d.A. (f_n) selbst. Wir zeigen, daß diese eine Cauchyfolge in $H_{\alpha'}^0$ ist. Es ist

$$\begin{aligned} & \frac{|(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(y)|}{|x - y|^{\alpha'}} = \\ & \left(\frac{|f_n(x) - f_n(y)|}{|x - y|^\alpha} + \frac{|f_m(x) - f_m(y)|}{|x - y|^\alpha} \right) |x - y|^{\alpha - \alpha'} \leq 2M|x - y|^{\alpha - \alpha'}. \end{aligned}$$

Letzteres ist $\leq \varepsilon$ für $|x - y| \leq \left(\frac{\varepsilon}{2M}\right)^{\frac{1}{\alpha - \alpha'}} =: h$. Im Fall $|x - y| > h$ ist

$$\frac{|(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(y)|}{|x - y|^{\alpha'}} \leq \frac{2\|f_n - f_m\|_\infty}{h^{\alpha'}} \leq \varepsilon$$

für hinreichend große n, m aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz von (f_n) . Also gilt für solche n, m : $L_{\alpha'}(f_n - f_m) \leq \varepsilon$. \square

Es ist klar, daß die Aussage des Satzes anstelle von H_α^0 auch für H_α , $\alpha \leq 1$ gilt und der obige Beweis der Kompaktheitsaussage nur die Kompaktheit des zugrundegelegten metrischen Raums $[0, 1]$ (als Voraussetzung für Arzelà-Ascoli) erfordert. Mit dem Beweis sieht man zum Beispiel auch, daß die Einheitskugel in einem Lipschitzraum über einem Kompaktum bezüglich der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz immer präkompakt ist. Auf diese Tatsache werden wir in Kapitel 3 (konkret im Beweis zu Satz 3.1.7) zurückgreifen.

Wir wollen noch eine Beobachtung zum Verhalten der Norm $L_\alpha(f) = \varphi(\alpha)$ für festes f in Abhängigkeit von α machen (solange dies für ein f Sinn ergibt). Ist etwa $0 < \beta < \alpha < \gamma \leq 1$ und $f \in H_\gamma$, so ist α als Konvexkombination $\alpha = \beta \frac{\gamma - \alpha}{\gamma - \beta} + \gamma \frac{\alpha - \beta}{\gamma - \beta}$ darstellbar, und es gilt für $x, y \in [0, 1]$, $x \neq y$

$$\varphi_{x,y}(\alpha) := \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} = \left(\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\beta} \right)^{\frac{\gamma - \alpha}{\gamma - \beta}} \left(\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\gamma} \right)^{\frac{\alpha - \beta}{\gamma - \beta}},$$

so daß $\alpha \mapsto \varphi_{x,y}(\alpha)$ logarithmisch konvex ist bzw. genauer $\alpha \mapsto \log \varphi_{x,y}(\alpha)$ eine wegen (1.2.2) monoton steigende Gerade (zwischen 0 und γ) beschreibt (vergleiche mit der Aussage über das Verhalten von $\log \|T\|$ im Interpolationssatz von Riesz-Thorin (II.4.2 in [55])); hier betrachten wir anstelle von T einfach die Inklusionsabbildung von H_α nach $H_{\alpha'}$ für $\alpha' \leq \alpha$. Damit ist der Epigraph (d.h. die Fläche über dem Graphen) der Funktion $\alpha \mapsto \sup_{x,y \in [0,1], x \neq y} \log \varphi_{x,y}(\alpha)$ als Schnitt konvexer Mengen wieder konvex, d.h. wir erhalten für $L_\alpha(f) = \sup_{x,y \in [0,1], x \neq y} \varphi_{x,y}(\alpha)$ das

Lemma 1.2.12. *Solange $L_\alpha(f) < \infty$ bleibt, ist für ein festes Hölder-stetiges f*

$$\varphi : \alpha \mapsto L_\alpha(f)$$

eine monoton steigende logarithmisch konvexe Funktion.

Mit diesem Ergebnis und Satz 1.2.11 erhalten Krein und Petuin, indem sie die beiden Resultate quasi definitorisch verbraten, in $\{H_\alpha^0\}_{\alpha \in (0,1)}$ eine *kompakte normale Skala*, die sie *Hölder-Skala* nennen. Es ist möglich, diese Skala an den Rändern $\alpha = 0$ und $\alpha = 1$ (unter Beibehaltung der Eigenschaften) “stetig fortzusetzen”. Zu diesem Zweck schreibt man die in 1.1.1 definierte *lip*-Bedingung, die ja für die diskrete Metrik d^0 eine leere Bedingung ist, in der Form

$$|f(x) - f(y)| = o(d^\alpha(x, y)),$$

mit dem kleinen Landau-Symbol $o(\cdot)$ und versteht für den Fall $\alpha = 0$ unter $|f(x) - f(y)| = o(1)$ wie üblich die Forderung $\lim_{d(x,y) \rightarrow 0} |f(x) - f(y)| = 0$, die man dann als die “richtige” *lip*-Bedingung für die diskrete Metrik auffaßt. Unter Verwendung dieser Konvention erhält man dann mit H_0^0 den Raum der in 0 verschwindenden stetigen Funktionen f auf $[0, 1]$ mit der (zu $\|\cdot\|_\infty$ äquivalenten) Norm $L_0(f) = \sup_{x,y \in [0,1]} |f(x) - f(y)|$. Entsprechend ist H_0 der

Raum der in 0 verschwindenden beschränkten Funktionen auf $[0, 1]$ (f erfüllt $|f(x) - f(y)| = O(1)$, und $O(\cdot)$ ist das große Landau-Symbol), versehen mit der Norm $L_0(\cdot)$. An den anderen Rand $\alpha = 1$ müssen Krein und Petuin allerdings unkanonisch $H_1^0 = H_1$ setzen, um die Eigenschaften der Hölder-Skala zu erhalten.

Musielak und Semadeni arbeiten mit dem folgenden Konzept. Zu den Eigenschaften von F -Normen (die in Ermangelung an Homogenität, die hier auch nicht benötigt wird, meist “keine sind”) schaue man in ein passendes Buch, zum Beispiel in [23, S. 38].

Definition 1.2.13. Eine Familie von Banachräumen $\{X_\alpha \|\cdot\|_\alpha\}$ mit α aus einem Intervall I , $X_\alpha \subseteq X_{\alpha'}$ mit $\|x\|_{\alpha'} \leq \|x\|_\alpha$ ($\forall x \in X_\alpha$) für $\alpha' < \alpha$, heißt *stetig bezüglich* α , wenn für alle $\alpha \in I$ folgendes gilt:

- (i) Für $x \in \bigcup_{\varepsilon>0} X_{\alpha+\varepsilon}$ gilt $\|x\|_\alpha = \lim_{\alpha' \searrow \alpha} \|x\|_{\alpha'}$.
- (ii) Für $x \in \bigcap_{\varepsilon>0} X_{\alpha-\varepsilon}$ gilt $\|x\|_\alpha = \lim_{\alpha' \nearrow \alpha} \|x\|_{\alpha'}$ ($= \infty$ möglich).
- (iii) $\bigcup_{\varepsilon>0} X_{\alpha+\varepsilon}$ ist dicht in $(X_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$.
- (iv) X_α ist dicht in $\bigcap_{\varepsilon>0} X_{\alpha-\varepsilon}$ bezüglich der F-Norm (vgl. VIII.6.15 in [55])

$$\|x\|_\alpha^* = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\|x\|_{\alpha_n}}{1 + \|x\|_{\alpha_n}},$$

wenn (α_n) eine monoton steigende Folge mit Grenzwert α ist.

- (v) $\{x : x \in \bigcap_{\varepsilon>0} X_{\alpha-\varepsilon}, \sup_{\varepsilon>0} \|x\|_{\alpha-\varepsilon} < \infty\} = X_\alpha$.

$\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ heißt *stetig von unten*, wenn (i), (ii) und (iii) gelten, und *stetig von oben*, wenn (i), (ii), (iv) und (v) erfüllt sind.

Man beachte, daß mit (ii) und dem Steigungsverhalten von $\|\cdot\|_\alpha$ die Inklusion “ \subseteq ” in (v) eine sehr natürliche Forderung ist (“ \supseteq ” ist nach Voraussetzung immer erfüllt). Des weiteren gilt aus dem gleichen Grund in (iv) $\|x\|_\alpha^* \leq \|x\|_\alpha$ $\forall x \in X_\alpha$. In der Definition der einseitigen Stetigkeit werden die Begriffe “oben” und “unten” als Inklusionsrichtungen verstanden. Mit unseren Ergebnissen und H_0^0 wie bei Krein und Petuin erhalten wir als

Korollar 1.2.14. Die Familie der kleinen Hölderräume $\{H_\alpha^0\}_{\alpha \in [0,1]}$ ist stetig von unten und die Familie der großen Hölderräume $\{H_\alpha\}_{\alpha \in (0,1]}$ ist stetig von oben.

Beweis. (iii) für die Stetigkeit von $\{H_\alpha^0\}_{\alpha \in [0,1]}$ von unten ist Satz 1.2.8 bzw. der Weierstraßsche Approximationssatz im Fall $\alpha = 0$. Musielak und Semadeni beweisen (i) und (ii) mit Lemmata über Familien parameterabhängiger stetiger Funktionen. Wir wissen aber schon, daß die Funktion $\varphi : \alpha \mapsto L_\alpha(f)$ stetig ist, denn sie ist ja logarithmisch konvex, d.h. die Funktion $\log \varphi$ ist stetig, und

zwar auch in $\alpha = 0$, da sie mit φ monoton steigend ist. Natürlich könnte man dies auch direkt mit der Definition von $L_\alpha(f)$ einsehen. Das müssen wir auch zumindest für $\alpha = 1$, um die Stetigkeit von $\{H_\alpha\}_{\alpha \in (0,1]}$ von unten zu erhalten. (iv) ist für diese Familie erfüllt, da wegen (1.2.1) die Inklusion $\bigcap_{\varepsilon > 0} H_{\alpha-\varepsilon} \subseteq H_{\alpha_1}^0$ gilt und H_α dicht in $H_{\alpha_1}^0$ ist (man verwende noch die Monotonie von $\alpha \mapsto L_\alpha(f)$). (v) ist klar, da $\sup_{\varepsilon > 0} L_{\alpha-\varepsilon}(f) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} L_{\alpha-\varepsilon}(f) = L_\alpha(f) < \infty$ gerade das Kriterium für $f \in H_\alpha$ ist. \square

Da sich die Anforderung an ein f , in H_α^0 zu liegen, nicht in $L_\alpha(f) < \infty$ erschöpft, ist $\{H_\alpha^0\}_{\alpha \in [0,1]}$ nicht stetig von unten (man beachte $\bigcap_{\varepsilon > 0} H_{\alpha-\varepsilon}^0 = \bigcap_{\varepsilon > 0} H_{\alpha-\varepsilon}$). Insgesamt sind beide Familien nur jeweils einseitig stetig, und $\{H_\alpha\}$ ist auch keine normale Skala, denn H_α ist nicht dicht in $H_{\alpha'}$ für $\alpha' < \alpha$, da dies wegen (1.2.1) sonst auch für $H_{\alpha'}^0$ zutreffen müßte. Die Funktion $f \in B_{H_{\alpha'}}$, definiert durch $f(x) = x^{\alpha'}$, hat sogar den Abstand 1 vom Unterraum $H_{\alpha'}^0 \supseteq H_\alpha$, denn es gilt für jedes $g \in H_{\alpha'}^0$ wegen der *lip*-Bedingung

$$L_{\alpha'}(f - g) \geq \frac{|(f - g)(x) - (f - g)(0)|}{|x - 0|^{\alpha'}} = \left| 1 - \frac{g(x)}{x^{\alpha'}} \right| \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1.$$

Man kann also für $H_{\alpha'}^0 \subseteq H_{\alpha'}$ im Rieszschen Lemma (siehe I.2.6 in [55]) $\delta = 0$ wählen. Es ist leicht einzusehen, daß mit der Funktion $f_{x_0} : x \mapsto d^{\alpha'}(x, x_0)$ (siehe Beweis zu Satz 1.1.4 (ii)) die gleiche Aussage für die Lage von $\text{lip}_0(K^{\alpha'})$ in $\text{Lip}_0(K^{\alpha'})$ für jeden beliebigen metrischen Raum K mit Basispunkt x_0 gilt. Speziell können wir damit noch festhalten, daß wegen $\bigcup_{\varepsilon > 0} H_{\alpha+\varepsilon} \subseteq H_\alpha^0$ Eigenschaft (iii) für $\{H_\alpha\}$ und wegen (1.2.2) und $H_\alpha \subseteq \bigcap_{\varepsilon > 0} H_{\alpha-\varepsilon}^0$ die Eigenschaft (iv) für $\{H_\alpha^0\}$ verletzt ist.

Bemerkung 1.2.15. Nach den obigen Ergebnissen, die insbesondere für die Hölderskala $\{H_\alpha^0\}_{\alpha \in (0,1)}$ ergiebig waren, wollen wir uns hier noch einige Gedanken darüber machen, was die “glatten” Funktionen, konkret die bei 0 verschwindenden C^1 -Funktionen $C_0^1([0, 1])$ oder C^∞ -Funktionen $C_0^\infty([0, 1])$ mit H_1 bzw. den Hölderräumen zu tun haben. Zunächst schließen wir aus der Bemerkung zu Satz 1.2.3, daß die C^1 -Funktionen weit davon entfernt sind, in H_1 dicht zu liegen. Versehen wir $f \in C_0^1([0, 1])$ mit der Norm $\|f'\|_\infty$, sehen wir sogar, daß vermöge der Abbildung

$$\Phi_{|(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)} : C([0, 1]) \rightarrow C_0^1([0, 1])$$

der Satz 1.2.3 mit dem “gewöhnlichen” Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung für die hier betrachteten kleineren Räume völlig analog gilt. Insbesondere ist $C_0^1([0, 1])$ abgeschlossen in der Lipschitznorm $L(\cdot)$, und die C^∞ -Funktionen liegen bezüglich dieser Norm dicht in $C_0^1([0, 1])$, da sie nach Weierstraß dicht in $C([0, 1])$ liegen.

Was aber ist der Abschluß der glatten Funktionen in der Höldernorm $L_\alpha(\cdot)$? Der Wunsch, hier eine weitere Rechtfertigung für die Definition der kleinen Lipschitzräume zu erhalten, wird nicht enttäuscht. Zunächst sind die in 0 verschwindenden C^1 -Funktionen auf $[0, 1]$ in H_1 , also wegen (1.2.1) auch in H_α^0 für

alle $\alpha < 1$. Daß wir darüberhinaus

$$\overline{C_0^1([0,1])}^{L^\alpha(\cdot)} = H_\alpha^0 \quad (1.2.3)$$

schon gezeigt haben, sieht man, wenn man sich den Beweis von Satz 1.2.7 nochmals zu Gemüte führt. Genauer haben wir (bis auf die Konstante) zu $f \in H_\alpha^0$ einfach die Faltung $f * n\chi_{[-\frac{1}{n},0]}$ zur Approximation herangezogen. Um eine C^∞ -Funktion zu erhalten, böte sich natürlich die Friedrichsche Glättung $f * \varphi_\varepsilon$ gemäß II.5.6 in [55] an. Den Beweisgedanken von Satz 1.2.7 auf eine solche Faltung mit $\varepsilon \rightarrow 0$ zu übertragen, erscheint indes schwierig, so daß wir im folgenden noch einen anderen Weg einschlagen wollen.

Wir haben in Satz 1.2.3 gesehen, daß Lipschitzfunktionen auf $[0,1]$ eine Ableitung in $L^\infty([0,1])$ haben. Dies wird man von den Hölderfunktionen ($f : x \mapsto x^\alpha$ ist ein Beispiel) natürlich nicht mehr erwarten können — ja diese brauchen noch nicht einmal von beschränkter Variation zu sein (wir werden in Kapitel 4, siehe Bemerkung 4.2.19, hierzu ein Beispiel sehen). Umgekehrt allerdings wird man hoffen, daß Funktionen mit einer “schlimmeren” Ableitung, naheliegenderweise vielleicht einer Ableitung in $L^p([0,1]) \supseteq L^\infty([0,1])$ für $p < \infty$, noch Hölderstetig sind. Da wir hier im Gegensatz zu S. 206 in [55] nicht den Begriff der schwachen Ableitung brauchen, einigen wir uns auf folgendes:

Definition 1.2.16. Ist mit $AC([0,1])$ der Raum aller absolut stetigen Funktionen auf $[0,1]$ bezeichnet, so definieren wir für $1 \leq p \leq \infty$ den Raum

$$H_0^{1,p} := \{f \in AC([0,1]), f(0) = 0, f' \in L^p([0,1])\}$$

und geben ihm die Norm $\|f\|_{1,p} = (\int_0^1 |f'(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}} = \|f'\|_p$ für $p < \infty$ bzw. $\|f\|_{1,\infty} = \|f'\|_\infty$.

Damit liegt f' für jedes $f \in H_0^{1,p}$ auch in $L^1([0,1])$, so daß für alle Elemente von $H_0^{1,p}$ der Hauptsatz (A.1.10 in [55]) anwendbar ist, und mit diesem sehen wir sofort den Isomorphismus

$$H_0^{1,p} \cong L^p([0,1]) \quad (1.2.4)$$

vermöge der Ableitung in $H_0^{1,p}$ analog zu Satz 1.2.3. Jetzt sind wir in der glücklichen Lage, wenigstens einmal in dieser Arbeit für unsere Hölderräume auch die Höldersche Ungleichung (siehe [53] und [22]) anwenden zu können.

Satz 1.2.17. Sei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ für $1 \leq p < \infty$ und $\alpha = \frac{1}{q}$. Dann liegt $H_0^{1,p}$ dicht in H_α^0 mit

$$L_\alpha(f) \leq \|f'\|_p \quad \forall f \in H_0^{1,p}.$$

Beweis. Sei zunächst $p > 1$ und $\alpha = \frac{1}{q}$. Für jedes $f \in H_0^{1,p}$ folgt mit der konstanten Funktion $\mathbf{1}$ auf $[0,1]$ und der Hölderschen Ungleichung

$$|f(x) - f(y)| = \left| \int_x^y f'(t) dt \right| \leq \|f'\|_{L^p([x,y])} \|\mathbf{1}\|_{L^q([x,y])} \leq \|f'\|_{L^p([0,1])} |x - y|^{\frac{1}{q}},$$

also $L_\alpha(f) \leq \|f'\|_p$. Weiter folgt aus der absoluten Stetigkeit des Integrals bezüglich des Maßes

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq \left(\int_x^y |f'(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \rightarrow 0 \quad \text{für } |x - y|^\alpha \rightarrow 0,$$

mithin $f \in H_\alpha^0$. Darüberhinaus gilt trivialerweise $C_0^1([0, 1]) \subseteq H_0^{1,p}$, so daß wegen (1.2.3) die Einbettung $H_0^{1,p} \hookrightarrow H_\alpha^0$ dicht ist.

Den Fall $p = 1$ sieht man mit $H_0^0 = (C_0([0, 1]), L_0(\cdot))$ genauso. \square

Benutzen wir jetzt noch die bekannte Tatsache (siehe II.5.6 in [55]), daß die C^∞ -Funktionen für $1 \leq p < \infty$ dicht in $L^p([0, 1])$ liegen, und die Trivialität, daß der Isomorphismus in (1.2.4) die C^∞ -Funktionen in $H_0^{1,p}$ auf die C^∞ -Funktionen in $L^p([0, 1])$ abbildet, so erhalten wir mit dem obigen Satz das

Korollar 1.2.18. *Für alle $\alpha < 1$ ist H_α^0 der Abschluß der in 0 verschwindenden C^∞ -Funktionen auf $[0, 1]$ bezüglich der Höldernorm $L_\alpha(\cdot)$.*

Für $\alpha = 0$ und $H_0^0 = (C_0([0, 1]), L_0(\cdot))$ wie gehabt sieht man die Aussage sofort mit dem Weierstraßschen Approximationssatz. Für $\alpha = 1$ gilt die Aussage auch, wenn wir diesmal $H_1^0 = C_0^1([0, 1])$ setzen. Mit den kleinen Hölderräumen interpolieren wir also (wenn wir "Interpolation" im Sinne dieses Dichtheitsergebnisses verstehen) zwischen den stetigen und den stetig-differenzierbaren Funktionen.

Bemerkung 1.2.19. Mit (1.2.4) und Satz 1.2.17 sieht man, daß die Familie der L^p -Räume auf natürliche Weise mit der Familie der kleinen Hölderräume zusammenhängt, und zwar über eine kontraktive Injektion

$$i_p : L^p([0, 1]) \rightarrow H_\alpha^0,$$

die jeden L^p -Raum für $1 \leq p < \infty$ dicht in den kleinen Hölderraum zum Exponenten $0 \leq \alpha = 1 - \frac{1}{p} < 1$ einbettet (mit wachsendem p oder α werden die Räume kleiner). Einmal mehr erhalten wir hieraus die Separabilität der kleinen Hölderräume, denn die $L^p([0, 1])$ -Räume sind für $1 \leq p < \infty$ bekanntlich separabel. Korollar I.2.15 in [55] liefert sogar mit den Polynomen eine dichte Teilmenge, womit es in obigem Korollar 1.2.18 auch die Polynome getan hätten. Sicher ist i_p nicht surjektiv (es sei denn man nimmt den Fall $p = \infty$ hinzu und setzt $H_0^0 = H_1$), denn es gibt in jedem kleinen Hölderraum Funktionen, die nicht absolut stetig sind (siehe Bemerkung 4.2.19). Was aber passiert, wenn man nur absolut stetige kleine Hölderfunktionen betrachtet? Wie groß ist die "Lücke" in der Mengeninklusion

$$H_0^{1,p} \subseteq H_\alpha^0 \cap AC([0, 1]),$$

oder steht hier etwa immer eine Gleichheit? Beispielsweise haben (mit $q > 1$) die absolut stetigen Standardfunktionen $f_q : x \mapsto x^{\frac{1}{q}}$ mit $f_q \in H_\alpha^0$ für jedes

$\alpha < \frac{1}{q}$ die Ableitung $f'_q : x \mapsto \frac{1}{q}x^{\frac{1}{q}-1} = \frac{1}{q}x^{-\frac{1}{p}}$, und diese liegt in $L^{p'}([0, 1])$ für $p' < p = \frac{1}{1-\frac{1}{q}}$, also auch für $p'' = \frac{1}{1-\alpha}$. Im Falle $\alpha = 0$ jedenfalls ist die obige Mengeninklusion eine Gleichheit, denn nach dem schon oft zitierten Hauptsatz (A.1.10 in [55]) gilt (bis auf Konstanten) gerade

$$f \in H_0^0 \cap AC([0, 1]) \iff f' \in L^1([0, 1]).$$

In diesem Zusammenhang kann man sich auch bei den “dichten” Inklusionen

$$H_\alpha \subseteq \bigcap_{\varepsilon > 0} H_{\alpha-\varepsilon}^0 \quad \text{für } 0 < \alpha \leq 1 \quad (1.2.5)$$

und

$$\bigcup_{\varepsilon > 0} H_{\alpha+\varepsilon} \subseteq H_\alpha^0 \quad \text{für } 0 \leq \alpha < 1 \quad (1.2.6)$$

die Frage nach der “Lücke dazwischen” stellen. Diese ist in beiden Fällen stets nichttrivial.

Da die großen Hölderräume die Eigenschaft (v) in Definition 1.2.13 erfüllen, sieht man sofort, wonach man zum Beweis der Echtheit der Inklusion in (1.2.5) suchen muß, nämlich nach einem f mit $L_{\alpha'}(f) < \infty \forall \alpha' < \alpha$ und $L_{\alpha'}(f) \rightarrow \infty$ für $\alpha' \rightarrow \alpha$. Betrachte hierzu die folgende Funktion f (siehe Abbildung 1.1), die als Summe immer kürzer und steiler werdender “ x^α -Bögen” entsteht. Sei für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $x_n = \sum_{k=1}^n (\frac{1}{2})^k$ die Funktion $f_n \in H_\alpha$ (mit $x_0 = 0$) definiert als

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x \leq x_{n-1} \\ n(x - x_{n-1})^\alpha & \text{für } x_{n-1} \leq x \leq x_n \\ n(x_n - x_{n-1})^\alpha & \text{für } x_n \leq x \leq 1 \end{cases}$$

und $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ punktweise auf $[0, 1]$, speziell $f(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{1}{2^\alpha}\right)^k$. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{(x_n - x_{n-1})^\alpha} = \frac{n\left(\frac{1}{2}\right)^{n\alpha}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n\alpha}} = n,$$

also $f \notin H_\alpha$. Aber es ist $f \in H_{\alpha'}$ für jedes $\alpha' < \alpha$. Die Intuition sagt, daß es hierfür reicht,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(1) - f(x_n)}{(1 - x_n)^{\alpha'}} = 0 \quad \forall \alpha' < \alpha$$

nachzuweisen. Sei also $\alpha' < \alpha$ gegeben und $r < 1$ derart, daß $\alpha' < r\alpha$ gilt. Wähle nun $N \in \mathbb{N}$ so groß, daß $\frac{n}{(2^{(1-r)\alpha})^n} \leq 1 \forall n \geq N$ ist. Dann folgt für $n \geq N$

$$f(1) - f(x_n) \leq \sum_{k=n}^{\infty} k \left(\frac{1}{2^\alpha}\right)^k \leq \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{r\alpha}}\right)^k, \quad \text{also}$$

$$f(1) - f(x_n) \leq \frac{(2^{-r\alpha})^n}{1 - 2^{-r\alpha}} \quad \text{und damit}$$

$$\frac{f(1) - f(x_n)}{(1 - x_n)^{\alpha'}} \leq \frac{1}{1 - 2^{-r\alpha}} \frac{(2^{-r\alpha})^n}{(2^{-n})^{\alpha'}} = \frac{1}{1 - 2^{-r\alpha}} (2^{\alpha' - r\alpha})^n \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Nach Zweifeln (vergleiche Beispiel 4.2.11!) kann man mit dem gleichen Vorgehen über geometrische Summen noch auf die Beschränktheit der Terme $\frac{f(x_m) - f(x_n)}{(x_m - x_n)^{\alpha'}}$ für $m > n$ schließen und ist sich dann nach kurzem Bedenken der Tatsache $f \in H_{\alpha'} \quad \forall \alpha' < \alpha$ ganz sicher.

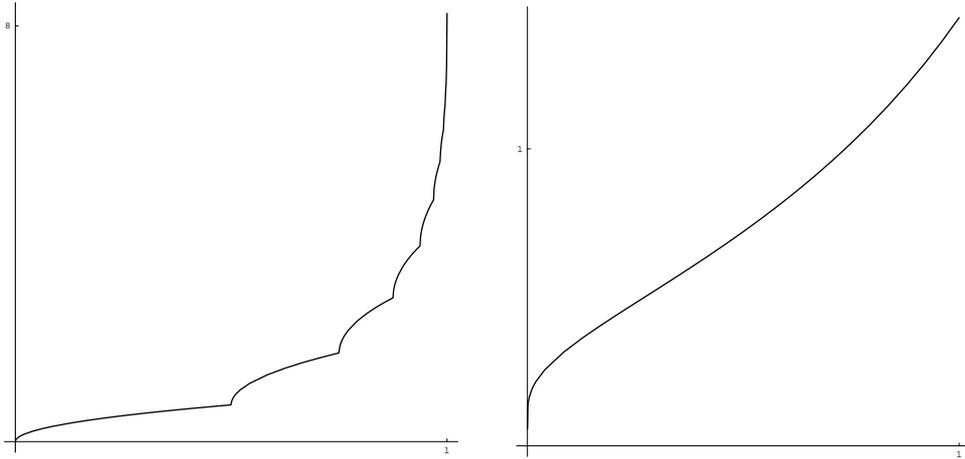


Abbildung 1.1: f : Hölder-stetig genau für alle Exponenten aus $(0, \frac{1}{2})$ Abbildung 1.2: f_0 : eine stetige aber nicht Hölder-stetige Funktion

Für den Nachweis der Nicht-Trivialität der Inklusion in (1.2.6) ist im Falle $\alpha = 0$ eine stetige Funktion gefragt, die zu keinem Exponenten Hölder-stetig ist. Als Beispiel betrachte man die auf $[0, 1]$ stetige Funktion

$$f_0 : f_0(x) = -\frac{1}{\log \frac{x}{2}}$$

mit $f_0(0) := 0$, die in 0 stärker als jede Wurzel steigt (siehe Abbildung 1.2), denn de L'Hospital liefert

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{f_0(x) - f_0(0)}{(x - 0)^\alpha} = \lim_{x \searrow 0} \frac{x^{-\alpha}}{-\log \frac{x}{2}} = \lim_{x \searrow 0} \frac{-\alpha x^{-\alpha-1}}{-\frac{1}{x}} = \lim_{x \searrow 0} \alpha x^{-\alpha} = \infty \quad \forall \alpha > 0.$$

(Mit einer in 4.2.10 vorgestellten Konstruktion ist es sogar möglich, aus f_0 eine stetige Funktion zu gewinnen, welche in keinem Teilintervall von $[0, 1]$ eine Hölderbedingung erfüllt.) Im Fall $\alpha > 0$ könnte man an das analoge Beispiel $f_\alpha : f_\alpha(x) = x^\alpha f_0(x)$ auf $[0, 1]$ denken, für welches aus dem gleichen Grund $f_\alpha \notin H_{\alpha+\varepsilon}$ für jedes $\varepsilon > 0$ gilt. Weiter ist für $y = 0$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow y \\ x \neq y}} \frac{|f_\alpha(x) - f_\alpha(y)|}{|x - y|^\alpha} = 0$$

klar, und für $y > 0$ folgt dies aus der stetigen Differenzierbarkeit von f_α auf $(0, 1]$. Man beachte jedoch, daß damit die *lip*-Bedingung nur punktweise nachgeprüft ist. Was für $|x - y|^\alpha \rightarrow 0$, $x \rightarrow 0$ und x "sehr nahe" bei y mit variablen

x und y passiert (und das ist der noch zu prüfende Fall), ist damit noch nicht klar. Wir werden in Kapitel 4 ein Beispiel sehen (nämlich Beispiel 4.2.11, das oben schon Zweifel streute), welches zeigt, daß aus der punktwisen nicht die gleichmäßige lip -Bedingung folgt. Und obwohl man — nach kurzem Nachsinnen über Satz 1.1.10 — für einen kompakten metrischen Raum K sofort $f \in lip(K)$ schließen kann, wenn f nur die (gleichmäßige!) lip -Bedingung erfüllt (siehe auch Lemma 4.2.13), ist für obiges f_α noch nicht einmal klar, ob überhaupt $f_\alpha \in H_\alpha$ gilt.

Glücklicherweise können wir nach all unserer geleisteten Vorarbeit trotzdem $f_\alpha \in H_\alpha^0$ zeigen, denn es gilt sogar $f_\alpha \in H_0^{1,p}$ mit $p = \frac{1}{1-\alpha}$, womit aus Satz 1.2.17 die Behauptung folgt. Es ist also lediglich noch nachzuweisen, daß die Ableitung

$$f'_\alpha : f'_\alpha(x) = -\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\log \frac{x}{2}} + \frac{x^{\alpha-1}}{(\log \frac{x}{2})^2}$$

in $L^p([0, 1])$ für $p = \frac{1}{1-\alpha}$ liegt, und man rechnet leicht nach, daß hierfür nur die Konvergenz des Integrals

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x |\log x|^p} \quad \forall p > 1$$

gezeigt werden muß. Für $p = 1$ hätten wir übrigens $g : x \mapsto \log |\log x|$ als Stammfunktion des Integranden, also Pech. Für $p > 1$ hat man sogar auch eine einfache Stammfunktion, nämlich $f : x \mapsto \frac{1}{(p-1)|\log x|^{p-1}}$, und damit Glück.

Die bisherigen Ergebnisse, die besonders für die kleinen Hölderräume ergiebig waren, mögen den Eindruck vermitteln, daß der große Lipschitzraum gegenüber dem kleinen sehr unhandlich ist. Dies ist allerdings für unsere großen Hölderräume nicht ganz der Fall, denn es kommt ihnen die folgende wichtige Eigenschaft zu:

Satz 1.2.20. *Die Einheitskugel $B_{H_\alpha^0}$ liegt dicht in der Einheitskugel B_{H_α} bezüglich der Supremumsnorm für $0 < \alpha < 1$.*

Beweis. Sei $f \in B_{H_\alpha}$ und $\varepsilon > 0$. Wir nähern f durch ein Polygon an: Zu $n \in \mathbb{N}$ sei $\{x_k\}_{k=0}^n$ mit $x_k = \frac{k}{n}$ eine äquidistante Partition von $[0, 1]$ und p_n das zugehörige Polygon mit den Eckpunkten $(x_k, f(x_k))$. Dann liegt p_n nach Satz 1.2.3 in H_1 , also auch in H_α^0 , und es folgt $\|f - p_n\|_\infty \leq \varepsilon$ aus der gleichmäßigen Stetigkeit von f , wenn wir n groß genug wählen.

Zu zeigen ist nun noch, daß mit $L_\alpha(f) \leq 1$ auch $L_\alpha(p_n) \leq 1$ gilt. Wir bewahren kühlen Kopf und genießen Schritt für Schritt die Gedanken von Krein und Petuin. Seien zunächst $x, y \in [x_{k-1}, x_k]$, $x \neq y$, für ein $k \in \{1, \dots, n\}$, dann folgt aus der Linearität von p_n auf $[x_{k-1}, x_k]$

$$\begin{aligned} \frac{|p_n(x) - p_n(y)|}{|x - y|^\alpha} &= \frac{|p_n(x) - p_n(y)|}{|x - y|} |x - y|^{1-\alpha} \\ &\leq \frac{|p_n(x_k) - p_n(x_{k-1})|}{|x_k - x_{k-1}|} |x_k - x_{k-1}|^{1-\alpha} = \frac{|f(x_k) - f(x_{k-1})|}{|x_k - x_{k-1}|^\alpha} \leq 1. \end{aligned}$$

Nun seien für die Stellen $a = x_{k-1}$, $b = x_k$ und $u \in [0, 1] \setminus [x_{k-1}, x_k]$ für ein $k \in \{1, \dots, n\}$ die Ungleichungen

$$\frac{|p_n(u) - p_n(a)|}{|u - a|^\alpha} \leq 1 \quad \text{und} \quad \frac{|p_n(u) - p_n(b)|}{|u - b|^\alpha} \leq 1 \quad (1.2.7)$$

vorausgesetzt. Dann folgt mit $\lambda \in (0, 1)$ für jedes $v = \lambda a + (1 - \lambda)b \in (a, b)$ auch

$$\frac{|p_n(u) - p_n(v)|}{|u - v|^\alpha} \leq 1,$$

denn mit der Linearität von p_n auf $[a, b]$ erhält man $p_n(v) = \lambda p_n(a) + (1 - \lambda)p_n(b)$ und damit

$$\begin{aligned} \frac{|p_n(u) - p_n(v)|}{|u - v|^\alpha} &= \frac{|\lambda(p_n(u) - p_n(a)) + (1 - \lambda)(p_n(u) - p_n(b))|}{|\lambda(u - a) + (1 - \lambda)(u - b)|^\alpha} \\ &\stackrel{(1.2.7)}{\leq} \frac{\lambda|u - a|^\alpha + (1 - \lambda)|u - b|^\alpha}{|\lambda(u - a) + (1 - \lambda)(u - b)|^\alpha} \leq 1. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung ist die Konkavität der Wurzelfunktion (wobei man die Annahme $u \notin [a, b]$ beachte — der gegenteilige Fall wurde ja oben bereits besprochen).

Seien nun $x \in (x_{i-1}, x_i)$ und $y \in (x_{k-1}, x_k)$ mit $i < k$ gegeben. Dann gilt (1.2.7) einmal für $u = x_i$, $a = x_{k-1}$ und $b = x_k$ (außer im Spezialfall $x_i = x_{k-1}$, den man sich genauso überlegt) und zum zweiten für $u = x_{i-1}$, $a = x_{k-1}$ und $b = x_k$. Durch zweimalige Anwendung des gerade Bewiesenen sehen wir damit die Gültigkeit von (1.2.7) auch für die Stellen $u = y$, $a = x_{i-1}$ und $b = x_i$, so daß eine dritte Anwendung schließlich

$$\frac{|p_n(x) - p_n(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq 1$$

liefert, wodurch insgesamt $p_n \in B_{H_\alpha^0}$ gezeigt ist. \square

Der Beweis zeigt, daß sogar die rationalen Polygone in B_{H_α} dicht in B_{H_α} bezüglich der Supremumsnorm liegen. Des weiteren liefert der obige Gedankengang noch ein nettes Ergebnis, das einerseits für sich genommen schon interessant ist und andererseits im Hinblick auf die Arbeit in Kapitel 4 zitierfähig festgehalten sei:

Korollar 1.2.21. *Ist g ein Polygon, welches in allen seinen Knoten die Funktion $f \in H_\alpha$ interpoliert, dann gilt $L_\alpha(g) \leq L_\alpha(f)$.*

Wir haben aber fast unbemerkt noch etwas weiteres gezeigt, nämlich eine gewisse Fortsetzungseigenschaft für kleine Hölderfunktionen:

Korollar 1.2.22. *Zu jedem $f \in H_\alpha$, endlich vielen Punkten x_i , $i = 1, \dots, n$, in $[0, 1]$ und $\varepsilon > 0$ gibt es ein $g \in H_\alpha^0$ mit $g(x_i) = f(x_i)$ für alle $i = 1, \dots, n$, so daß $\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$ und $L_\alpha(g) \leq L_\alpha(f)$ gilt.*

Beenden wollen wir dieses einführende Kapitel über die Grundlagen zu Lipschitzräumen mit der Bemerkung, daß die soeben gefundene Art der Lage eines kleinen Lipschitzraums im großen — wie wir noch sehen werden — eine besonders schöne ist.

Kapitel 2

Isomorphie zwischen Lipschitzräumen und den Folgenräumen c_0 und ℓ^∞

2.1 Die Schauderbasis in H_α^0

Wir haben in Abschnitt 1.2 gesehen, daß die kleinen Hölderräume H_α^0 für $0 \leq \alpha < 1$ eine von unten stetige Familie und eine normale Skala von Banachräumen bilden. Um diese Eigenschaften auch am Rand $\alpha = 0$ zu erhalten, setzten wir H_0^0 als den Raum $C_0([0, 1])$ aller in 0 verschwindenden stetigen Funktionen auf $[0, 1]$. (Da wir hier nur Isomorphie-Überlegungen anstellen, ist es einerlei, ob dieser Raum die Norm $L_0(\cdot)$ oder die dazu äquivalente üblichere Supremumsnorm trägt.) Weiterhin haben wir in 1.2 festgestellt, daß die (rationalen) Polygone dicht in den kleinen Hölderräumen liegen. Dieses Ergebnis kennt man auch im Raum H_0^0 , nur weiß man für diesen Raum noch mehr, denn eine gewisse Menge spezieller einfacher Polygone bildet sogar eine Schauderbasis in $C([0, 1])$ bzw. in $C_0([0, 1])$. Aufgrund der Tatsache, daß $C_0([0, 1])$ mit den kleinen Hölderräumen in der oben genannten Weise zusammenhängt, ist es daher naheliegend, diese Schauderbasis als Teilmenge der Hölderräume näher zu untersuchen. Genau dies hat Z. Ciesielski 1959/60 in [6] und [7] getan — und er kam dabei auf bemerkenswerte Resultate.

Zu Beginn wollen wir die Schauderbasis in $C_0([0, 1])$ (vgl. V.6.16 in [55]) einführen. Seien χ_n , $n = 1, 2, \dots$, die in $L^2([0, 1])$ orthonormierten Haar-Funktionen, definiert durch $\chi_1 = \mathbf{1}$ und für $m = 0, 1, \dots$; $k = 1, \dots, 2^m$:

$$\chi_{2^m+k}(x) = \begin{cases} \sqrt{2^m} & \text{für } x \in \left[\frac{2k-2}{2^{m+1}}, \frac{2k-1}{2^{m+1}} \right), \\ -\sqrt{2^m} & \text{für } x \in \left[\frac{2k-1}{2^{m+1}}, \frac{2k}{2^{m+1}} \right], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Seien weiter für $x \in [0, 1]$ und $n = 1, 2, \dots$ die Funktionen φ_n definiert durch

$$\varphi_n(x) = \int_0^x \chi_n(t) dt.$$

Man sieht, daß die Funktionen φ_n einfache Polygone beschreiben, speziell für $n = 2^m + k \geq 2$ liefert der Graph von φ_n ein gleichseitiges Dreieck über dem Intervall $[\frac{2k-2}{2^{m+1}}, \frac{2k}{2^{m+1}}]$, mit dem Intervall als Basis, der halben Basislänge $\frac{1}{2^{m+1}}$, mit der Spitze für $x = \frac{2k-1}{2^{m+1}}$ und der Höhe $\frac{\sqrt{2^m}}{2^{m+1}} = \frac{1}{2\sqrt{2^m}}$.

Satz 2.1.1. *Die Menge $\{\varphi_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, ist eine Schauderbasis im Raum $C_0([0, 1])$. Es gilt sogar*

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^1 \chi_n(t) df(t) \right] \varphi_n \quad \forall f \in C_0([0, 1]).$$

Beweis. Es sei eine Funktion $f \in C_0([0, 1])$ vorgelegt sowie $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ und $x_{2^m+k} = \frac{2k-1}{2^{m+1}}$ für $m = 0, 1, \dots$ und $k = 1, \dots, 2^m$. Dann definiere p_n für $n \geq 1$ analog zum Beweis zu Satz 1.2.20 als das Polygon auf $[0, 1]$, welches genau in x_0, x_1, \dots, x_n seine Knoten hat und f in diesen interpoliert. Es folgt aus der gleichmäßigen Stetigkeit von f wieder $\|f - p_n\|_{\infty} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, so daß (mit $p_0 = 0$) die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (p_n - p_{n-1})$$

gleichmäßig gegen f konvergiert. Andererseits "differieren" p_n und p_{n-1} um genau eine "Polygonecke", so daß die Differenz nach Wahl der x_{2^m+k} und Definition der φ_n gerade ein Vielfaches von φ_n ist. Mit gewissen reellen oder komplexen a_n , $n = 1, 2, \dots$, gilt also

$$p_n - p_{n-1} = a_n \varphi_n$$

und

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \quad \forall x \in [0, 1]. \quad (2.1.1)$$

Die Koeffizienten a_n ergeben sich nun leicht aus f und können abkürzend als Integral über die zugehörigen Haarfunktionen bezüglich f geschrieben werden. Zunächst sieht man

$$a_1 = f(1) - f(0) = \int_0^1 \chi_1(t) df(t) \quad (2.1.2)$$

und weiter

$$\begin{aligned} a_{2^m+k} &= 2\sqrt{2^m} \left[f\left(\frac{2k-1}{2^{m+1}}\right) - \frac{1}{2} \left(f\left(\frac{2k-2}{2^{m+1}}\right) + f\left(\frac{2k}{2^{m+1}}\right) \right) \right] \\ &= \int_0^1 \chi_{2^m+k}(t) df(t) \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

für $m = 0, 1, \dots$; $k = 1, \dots, 2^m$. Beachte, daß $(2\sqrt{2^m})^{-1}$ gerade die Höhe des von φ_{2^m+k} beschriebenen Dreiecks und der Term in [...] die Höhe des durch

$p_n - p_{n-1}$ beschriebenen Dreiecks ist. (Es ist klar, wie man durch die a_n 's das f wiedergewinnen kann, denn jedes a_n mit $n = 2^m + k \geq 2$ liefert bei schon vorhandenen $f(\frac{k-1}{2^m})$ und $f(\frac{k}{2^m})$ den Wert $f(x_n) = f(\frac{2k-1}{2^{m+1}})$, und $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ liegt dicht in $[0, 1]$.)

Zur Eindeutigkeit: Sei $f(x) = \sum_{n=1}^\infty b_n \varphi_n(x) = 0 \quad \forall x \in [0, 1]$ mit reellen oder komplexen b_n und $b_n \neq 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$, o.B.d.A. $n = 2^m + k$ kleinstmöglich. Dann ist entweder $b_1 \neq 0$ und damit $f(1) = b_1 \neq 0$ ein Widerspruch oder $b_n \neq 0$ für ein $n = 2^m + k$ mit $m \geq 0, k \geq 1$, dann ist aber $f(\frac{2k-1}{2^{m+1}}) = (2\sqrt{2^m})^{-1} b_n$ ein Widerspruch. \square

Es ist klar, daß man den gleichen Satz für $C([0, 1])$ erhält, wenn man zusätzlich $\varphi_0 = \mathbf{1}$ und im obigen Beweis $a_0 = f(0)$ setzt. Wir wollen nun die Menge $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ in den Hölderräumen H_α mit $0 < \alpha < 1$ ansehen, und es liegt nahe, die φ_n 's hierfür zu normieren. Beachte, daß jedes φ_n für $n = 2^m + k \geq 2$ ein Dreieck mit der Höhe $\frac{1}{2\sqrt{2^m}}$ und der halben Basislänge $\frac{1}{2^{m+1}}$ beschreibt. Daher gilt mit der Definition $\chi_1^{(\alpha)} := \chi_1, \varphi_1^{(\alpha)} := \varphi_1$ sowie

$$\chi_{2^m+k}^{(\alpha)} := \frac{2^{(m+1)\alpha}}{2\sqrt{2^m}} \chi_{2^m+k} \quad \text{und} \quad \varphi_{2^m+k}^{(\alpha)} := \frac{2\sqrt{2^m}}{2^{(m+1)\alpha}} \varphi_{2^m+k}.$$

für $m = 0, 1, \dots; k = 1, \dots, 2^m$, die Aussage $L_\alpha(\varphi_n^{(\alpha)}) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Zudem ist Satz 2.1.1 für $\chi_n^{(\alpha)}$ und $\varphi_n^{(\alpha)}$ anstelle von χ_n und φ_n richtig. Formuliert man (2.1.3) für $\chi_n^{(\alpha)}$ und entsprechend (2.1.1) für $\varphi_n^{(\alpha)}$ um, so findet man sofort $\|a_n\|_\infty \leq L_\alpha(f)$ falls $f \in H_\alpha$ und $a_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ im Falle $f \in H_\alpha^0$. Die nun aufkeimende Hoffnung findet ihre Erfüllung in dem

Theorem 2.1.2. *Es sei $0 < \alpha < 1$. Dann gilt:*

- (i) *Der Lipschitzraum $Lip_0([0, 1]^\alpha) = H_\alpha$ ist isomorph zum Folgenraum ℓ^∞ . Der Isomorphismus*

$$T_\alpha : \ell^\infty \rightarrow H_\alpha$$

ist gegeben durch

$$T_\alpha((a_n)) = \sum_{n=1}^\infty a_n \varphi_n^{(\alpha)},$$

wobei die Reihe bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ konvergiert.

$$T_\alpha^{-1} : H_\alpha \rightarrow \ell^\infty$$

ist gegeben durch

$$T_\alpha^{-1}(f) = \left(\int_0^1 \chi_n^{(\alpha)}(t) df(t) \right)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Dabei gilt

$$\frac{2}{3(2^\alpha - 1)(2^{1-\alpha} - 1)} \leq \|T_\alpha\| \leq \frac{2}{(2^\alpha - 1)(2^{1-\alpha} - 1)} \quad \text{und} \quad \|T_\alpha^{-1}\| = 1.$$

(ii) Der kleine Lipschitzraum $\text{lip}_0([0, 1]^\alpha) = H_\alpha^0$ ist isomorph zum Folgenraum c_0 . Der Isomorphismus

$$T_{\alpha,0} : c_0 \rightarrow H_\alpha^0$$

ist gerade die Einschränkung des obigen T_α auf c_0 . Insbesondere bildet die Menge $\{\varphi_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, eine Schauderbasis von H_α^0 . Es gelten für $T_{\alpha,0}$ die gleichen Normabschätzungen wie für T_α .

Beweis. Ist $(a_n) \in \ell^\infty$, so findet man schnell die gleichmäßige Konvergenz von $\sum_{n=1}^\infty a_n \varphi_n^{(\alpha)}$ mit einer geometrischen Reihe wegen $\|\varphi_{2^m+k}^{(\alpha)}\|_\infty = \frac{1}{2^{(m+1)\alpha}}$ und $\text{supp}(\varphi_{2^m+k}) \cap \text{supp}(\varphi_{2^m+k'}) = \emptyset$ für $k \neq k'$ und festes $m \in \mathbb{N}$. Damit ist $f = \sum_{n=1}^\infty a_n \varphi_n^{(\alpha)}$ eine wohldefinierte stetige Funktion. Aber f ist sogar Hölderstetig. Seien $x, y \in [0, 1]$, $x \neq y$, gegeben, dann ist

$$|f(x) - f(y)| \leq \|(a_n)\|_\infty \sum_{m=0}^\infty \sum_{k=1}^{2^m} |\varphi_{2^m+k}^{(\alpha)}(x) - \varphi_{2^m+k}^{(\alpha)}(y)| \quad (2.1.4)$$

einfach. Der Leser genieße die nun folgende virtuose Abschätzung der rechten Seite in (2.1.4) durch zwei geometrische Reihen. Sei dafür $j \in \mathbb{N}_0$ so gewählt, daß

$$\frac{1}{2^{j+1}} < |x - y| \leq \frac{1}{2^j} \quad (2.1.5)$$

gilt. Dann kann man zunächst

$$\sum_{k=1}^{2^m} |\varphi_{2^m+k}^{(\alpha)}(x) - \varphi_{2^m+k}^{(\alpha)}(y)| \leq \begin{cases} 2^{(1-\alpha)(m+1)} |x - y| & \text{für } 0 \leq m < j \\ 2^{1-\alpha} 2^{-m\alpha} & \text{für } m \geq j \end{cases}$$

feststellen. Die für festes m durch $\varphi_{2^m+k}^{(\alpha)}$ beschriebenen Dreiecke “wandern” mit steigendem k (disjunkt) über dem Intervall $[0, 1]$ von links nach rechts. Damit kann man die Summe $\sum_{k=1}^{2^m} \dots$ immer trivial durch die doppelte Höhe $2\|\varphi_{2^m+k}^{(\alpha)}\|_\infty = 2\frac{1}{2^{(m+1)\alpha}}$ der Dreiecke abschätzen. Dies wurde für $m \geq j$ getan. Für $0 \leq m < j$ wurde die größtmögliche Steigung in einem solchen Dreieck abgeschätzt. Mit der halben Basislänge $\frac{1}{2^{(m+1)}}$ und der Höhe $\frac{1}{2^{(m+1)\alpha}}$ beträgt diese $2^{(1-\alpha)(m+1)}$. Liegen x und y nicht im gleichen Dreieck, sondern in zwei benachbarten, so rechnet man leicht nach, daß die Summe der zwei dann zu berechnenden Steigungen auch $2^{(1-\alpha)(m+1)}$ ist. Diese Abschätzungen liefern nun nach einiger Detailarbeit den Beweis der Stetigkeit von T_α , “doch ist dieser Rand hier zu schmal, um ihn zu fassen” (siehe [12, S. 3, II]). Wir aber wollen ihn dennoch bringen.

Man rechnet

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{|x-y|^\alpha} \sum_{k=1}^{2^m} |\varphi_{2^m+k}^{(\alpha)}(x) - \varphi_{2^m+k}^{(\alpha)}(y)| \\
& \leq \sum_{m=0}^{j-1} 2^{(1-\alpha)(m+1)} |x-y|^{1-\alpha} + \sum_{m=j}^{\infty} 2^{1-\alpha} 2^{-m\alpha} |x-y|^{-\alpha} \\
& \stackrel{(2.1.5)}{\leq} 2^{1-\alpha} \left(\sum_{m=0}^{j-1} 2^{(1-\alpha)m} 2^{-j(1-\alpha)} + \sum_{m=j}^{\infty} (2^{-\alpha})^m 2^{(j+1)\alpha} \right) \\
& \stackrel{m-j=i}{\leq} 2^{1-\alpha} \left(\sum_{i=1}^j (2^{(\alpha-1)})^i + 2^\alpha + \sum_{i=0}^{\infty} (2^{-\alpha})^i \right) \\
& \leq 2^{1-\alpha} \left(\frac{2^{\alpha-1}}{1-2^{\alpha-1}} + 2^\alpha + \frac{1}{1-2^{-\alpha}} \right) = \frac{1}{1-2^{\alpha-1}} + \frac{2}{1-2^{-\alpha}} \\
& = \frac{2^{1-\alpha}}{2^{1-\alpha}-1} + \frac{2^{\alpha+1}}{2^\alpha-1} = \frac{2-2^{1-\alpha}+4-2^{1+\alpha}}{(2^{1-\alpha}-1)(2^\alpha-1)} \leq \frac{2}{(2^{1-\alpha}-1)(2^\alpha-1)},
\end{aligned}$$

denn es gilt

$$2^{1-\alpha} - 4 + 2^{1+\alpha} = 2(2^{-\alpha} - 2 + 2^\alpha) = 2 \left(\sqrt{2^{-\alpha}} - \sqrt{2^\alpha} \right)^2 > 0.$$

Nun liefert (2.1.4) die Wohldefiniertheit und die Stetigkeit von T_α mit

$$\|T_\alpha\| \leq \frac{2}{(2^\alpha-1)(2^{1-\alpha}-1)}. \quad (2.1.6)$$

Die Injektivität von T_α folgt aus Satz 2.1.1. Aus (2.1.3) im Beweis zu diesem Satz folgt $\|a_n\|_\infty \leq L_\alpha(f)$ für $f \in H_\alpha$, womit die Surjektivität von T_α und darüberhinaus $\|T_\alpha^{-1}\| \leq 1$ gesichert ist. T_α ist also ein Isomorphismus. Die Darstellung von T_α^{-1} ist nach Satz 2.1.1 auch klar.

Zur Einschränkung von T_α auf c_0 : Hier liefert (2.1.3) für $f \in H_\alpha^0$ wie schon gesehen $a_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, so daß $H_\alpha^0 \subseteq T_\alpha(c_0)$ ist. Andererseits sieht man mit dem Raum d aller abbrechenden Folgen in c_0 die Inklusion $T_\alpha(d) \subseteq H_\alpha^0$, denn Elemente aus d werden unter T_α auf Polygone, also sogar auf Elemente von $H_1 \subseteq H_\alpha^0$ abgebildet. Aus der Stetigkeit von T_α , der Dichtheit von d in c_0 und der Abgeschlossenheit von H_α^0 in H_α folgt damit $T_\alpha(c_0) \subseteq H_\alpha^0$. Insgesamt ist also $T_{\alpha,0} : c_0 \rightarrow H_\alpha^0$, die Einschränkung von T_α auf c_0 , ein Isomorphismus. Da die Einheitsvektoren in c_0 eine Schauderbasis liefern, gilt dies auch für ihre Bilder $\{\varphi_n^{(\alpha)}\}$, also auch für $\{\varphi_n\}$ in H_α^0 . Die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n^{(\alpha)}$ liegt also im Falle $(a_n) \in c_0$ sogar in der Höldernorm $L_\alpha(\cdot)$ vor. (Für $(a_n) = (1, 1, 1, \dots)$ zum Beispiel ist dies sicher nicht so.)

Noch ein Wort zu den Normabschätzungen von unten: Für T_α^{-1} sieht man am Beispiel der kleinen Hölderfunktion $\varphi_1^{(\alpha)} = \varphi_1 : x \mapsto x$ mit $L_\alpha(\varphi_1^{(\alpha)}) = 1$ schnell $\|T_\alpha^{-1}(\varphi_1^{(\alpha)})\|_\infty = \|(1, 0, 0, \dots)\|_\infty = 1$ (und dies gilt analog für alle auf 1 normierten $\varphi_n^{(\alpha)}$), also $\|T_\alpha^{-1}\| = 1$. Die Abschätzung für T_α von unten ist

nicht so einfach, und der Aufwand ihrer Herleitung übersteigt noch den für die Herleitung von (2.1.6) bei weitem. Der Leser sei deshalb um Nachsicht dafür gebeten, daß statt einer Darstellung der Details (die sich in [7] finden) an dieser Stelle nur die Idee aufgezeigt wird, die zum Erfolg führt.

Man wird schnell auf die Vermutung kommen, daß die kleine Hölderfunktion

$$f_N = \sum_{n=1}^{2^{N+1}} \varphi_n^{(\alpha)}$$

für große N in einer Umgebung von 0 “sehr stark” steigt und demzufolge womöglich eine “große” Höldernorm aufweist, obwohl stets $f_N = T_\alpha((a_n))$ mit $\|(a_n)\|_\infty = 1$ gilt. Und dies erweist sich als richtig. Konkret kann man für $x_j := \frac{4}{3} \frac{1}{2^{j+1}}$ mit $j \in \mathbb{N}$ die beileibe nicht offensichtliche Gleichheit (!)

$$\begin{aligned} \frac{f_N(x_j)}{x_j^\alpha} &= \left(\frac{4}{3}\right)^{1-\alpha} \frac{3 - 2^{1-\alpha}}{2} \frac{1}{(2^\alpha - 1)(2^{1-\alpha} - 1)} \\ &\quad - \left[\frac{x_j^{1-\alpha}}{2^{1-\alpha} - 1} + \frac{1}{2^{N\alpha}} \left(\frac{2}{3}\right)^\alpha \frac{x_j^{-\alpha}}{2^\alpha - 1} \right] \end{aligned}$$

nachweisen. Wie bei der Herleitung von (2.1.6) erfolgt dies über verschiedene geometrische Summen, diesmal getrennt für $0 \leq m < j$, $m = j$ und $j < m \leq N$. Nach einigem Hin und Her sieht man auch

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{1-\alpha} \frac{3 - 2^{1-\alpha}}{2} > \frac{2}{3},$$

und nun ist es einfach: Für $\varepsilon > 0$ wähle j so groß, daß

$$\frac{x_j^{1-\alpha}}{2^{1-\alpha} - 1} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

gilt und danach $N = N(j)$ so riesig, daß auch

$$\frac{1}{2^{N\alpha}} \left(\frac{2}{3}\right)^\alpha \frac{x_j^{-\alpha}}{2^\alpha - 1} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Bestand hat. Und damit ist alles gezeigt. □

Man beachte, daß die Normabschätzungen auch für $T_{\alpha,0}$ nachgewiesen wurden. Natürlich ist die zuletzt behandelte Abschätzung der Norm von T_α von unten für das Isomorphie-Resultat nicht notwendig. Da jedoch die untere Schranke, die ihr Minimum für $\alpha = \frac{1}{2}$ annimmt, von unten durch 3 beschränkt bleibt, ist weder T_α noch $T_{\alpha,0}$ ein isometrischer Isomorphismus. Daß es einen solchen auch gar nicht geben kann, werden wir in Abschnitt 2.4 sehen, in dem wir einen Artikel von D. E. Wulbert [60] besprechen. Wulbert hat gezeigt, daß Isomorphismen zwischen den großen Lipschitzräumen $Lip_0(K)$ und ℓ^∞ bzw. zwischen den kleinen Lipschitzräumen $lip_0(K)$ und c_0 nur “sehr selten”, d.h. nur

unter sehr restriktiven Voraussetzungen an den zugrundeliegenden metrischen Raum K , isometrisch sind.

Dennoch liefert unser Theorem viele Fakten über die Hölderräume, die wir in Abschnitt 1.2 zusammengestellt haben, quasi nebenbei, darunter zum Beispiel die Sätze 1.2.1, 1.2.7 und 1.2.9. In völligem Bewußtsein der Tatsache, damit alles andere als mathematische Pionierarbeit zu leisten, könnte man sich die Frage vornehmen, inwieweit die bisherigen Ergebnisse auch auf verallgemeinerte Hölderräume (siehe Definition 1.1.18) übertragbar sind (aber natürlich auch alle weiteren Resultate dieser Arbeit, die sich nur auf die klassischen Hölderräume beziehen). Für die Herleitung von (2.1.6) beispielsweise scheint die Forderung $\omega(\frac{1}{2}) < 1$ nötig zu sein, so daß man allgemeiner an eine Normierungsbedingung $\omega(1) = 1$ denken könnte. Interessant scheinen die verallgemeinerten Hölderräume indes lediglich im Hinblick auf einige Resultate in Abschnitt 3.5 zu werden (siehe die Sätze 3.5.8 und 3.5.9 und was danach noch folgt).

Hier verweilen wir noch ein wenig bei den kleinen Hölderräumen H_α^0 und blicken noch einmal auf Theorem 2.1.2 zurück. Als weitere Folgerung aus Teil (ii) des Theorems erhalten wir nämlich mit dem Darstellungssatz $c'_0 \cong \ell^1$ eine Aussage über den Dualraum von H_α^0 .

Satz 2.1.3. *Jedes beschränkte lineare Funktional ℓ auf $\text{lip}_0([0, 1]^\alpha) = H_\alpha^0$ mit $0 < \alpha < 1$ hat die Gestalt*

$$\ell(f) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^1 \chi_n^{(\alpha)}(t) df(t)$$

mit einem $(b_n) \in \ell^1$. Es gelten die Abschätzungen

$$\|\ell\| \leq \|T_{\alpha,0}^{-1}\| \|(b_n)\|_1 \quad \text{und} \quad \|(b_n)\|_1 \leq \|T_{\alpha,0}\| \|\ell\|,$$

wobei die Konstanten $\|T_{\alpha,0}\|$ und $\|T_{\alpha,0}^{-1}\|$ ($= 1!$) bestmöglich sind (d.h. der zugehörige Isomorphismus von $(H_\alpha^0)'$ auf ℓ^1 hat die Norm $\|T_{\alpha,0}\|$ und seine Umkehrung die Norm 1).

Beweis. Der Isomorphismus

$$T_{\alpha,0} : c_0 \rightarrow H_\alpha^0$$

liefert den dazu adjungierten Isomorphismus (siehe III.5.21 in [55])

$$T'_{\alpha,0} : (H_\alpha^0)' \rightarrow c'_0,$$

mit $(T'_{\alpha,0})^{-1} = (T_{\alpha,0}^{-1})'$, für den man unter Berücksichtigung von $c'_0 \cong \ell^1$

$$T'_{\alpha,0}(\ell) = (b_n) \in \ell^1 \quad \forall \ell \in (H_\alpha^0)'$$

schreiben kann. Aus der Normgleichheit $\|T'_{\alpha,0}\| = \|T_{\alpha,0}\|$ (siehe III.4.2 in [55]) folgt dann $\|(b_n)\|_1 \leq \|T_{\alpha,0}\| \|\ell\|$. Weiter erhält man nach Definition der Adjungierten für jedes $(a_n) = \left(\int_0^1 \chi_n^{(\alpha)}(t) df(t)\right) \in c_0$ mit einem $f = T_{\alpha,0}((a_n))$ aus

$c'_0 \cong \ell^1$ die Darstellung

$$\ell(f) = \ell(T_{\alpha,0}((a_n))) = T'_{\alpha,0}(\ell)((a_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n a_n.$$

Dabei gilt $\sup_{L_\alpha(f) \leq 1} |\ell(f)| \leq \sup_{L_\alpha(f) \leq 1} \|T_{\alpha,0}^{-1}(f)\|_\infty \| (b_n) \|_1 \leq \|T_{\alpha,0}^{-1}\| \| (b_n) \|_1$ bzw. genauer $\ell = (T'_{\alpha,0})^{-1}((b_n)) = (T_{\alpha,0}^{-1})'((b_n))$, wobei wieder die Normgleichheit $\|(T_{\alpha,0}^{-1})'\| = \|T_{\alpha,0}^{-1}\|$ besteht. \square

Dieser Satz mag ein kleiner Vorgeschmack auf unsere Arbeit in Abschnitt 2.4 und in Kapitel 3 sein, wo wir den Dualraum gewisser kleiner Lipschitzräume (mit Blick auf den zweiten Dual!) intensiver untersuchen werden.

Bemerkung 2.1.4. Nach Satz 1.1.6 erhalten wir für $0 < \alpha < 1$ auch die Isomorphismen $Lip([0, 1]^\alpha) \simeq \ell^\infty$ und $lip([0, 1]^\alpha) \simeq c_0$. Man sieht schnell, daß die Beweismethode für den Fall $\alpha = 1$ versagt. Dennoch sind auch die Lipschitzräume $Lip([0, 1])$ und $Lip_0([0, 1]) = H_1$ isomorph zu ℓ^∞ , denn H_1 ist nach Satz 1.2.3 sogar isometrisch isomorph zu $L^\infty([0, 1])$. Der Funktionenraum $L^\infty([0, 1])$ wiederum ist isomorph zum Folgenraum ℓ^∞ . Dies liegt zum einen daran, daß ℓ^∞ isomorph zu einem Unterraum von $L^\infty([0, 1])$ ist (das ist klar), aber auch umgekehrt $L^\infty([0, 1])$ seinerseits isomorph zu einem Unterraum von ℓ^∞ ist (das ist weniger klar, und zur Aufklärung braucht man schon jemanden wie Lindenstrauss, der eine Quotientenabbildung $T : \ell^1 \rightarrow L^1([0, 1])$, diskutiert in [20, § 23.D], gefunden hat, mit welcher dann nach II.5.17 und III.1.10 in [55] kanonisch $L^\infty([0, 1]) \cong \ker(T)^\perp \subseteq (\ell^1)' \cong \ell^\infty$ gilt). Die Unterräume sind jeweils komplementiert, da sowohl $X = \ell^\infty$ als auch $Y = L^\infty([0, 1])$ injektiv ist (siehe S. 105 und S. 111 in [35]). Jetzt braucht man nur noch die einfache Tatsache $X \cong X \oplus_\infty X$ sowie $Y \cong Y \oplus_\infty Y$ und schließt mit einem geeigneten Unterraum $U \subseteq X$ und leicht zu verifizierenden “Rechenregeln”

$$X \simeq U \oplus Y \simeq U \oplus (Y \oplus Y) \simeq (U \oplus Y) \oplus Y \simeq X \oplus Y, \quad (2.1.7)$$

was für Y genauso geht, mithin $X \simeq Y$. Dies ist der Beweis von A. Pełczyński für $L^\infty([0, 1]) \simeq \ell^\infty$, zu finden in [35, S. 54]. Der Beweis liefert unter der Voraussetzung $X \simeq X \oplus X$ und $Y \simeq Y \oplus Y$ (die man nach einem vom W. T. Gowers gefundenen Gegenbeispiel nicht ohne weiteres weglassen darf, siehe [58, S. 10]) eine Art Schröder-Bernstein-Theorem für Banachräume. Der, man möchte sagen “genial einfache”, Gedanke in (2.1.7), ist als *Dekompositionsmethode* von Pełczyński in die Geschichte der Banachraumtheorie eingegangen.

2.2 Lipschitzräume über Kompakta in \mathbb{R}^m

Es ist angesichts des im letzten Abschnitt erhaltenen Isomorphie-Resultats von Ciesielski naheliegend zu fragen, ob $Lip(K) \simeq \ell^\infty$ und $lip(K) \simeq c_0$ neben $K = [0, 1]$, versehen mit einer Höldermetrik, auch für allgemeinere metrische Räume K gilt. Als erstes wird man dabei natürlich an Teilmengen des \mathbb{R}^m ,

$m \in \mathbb{N}$, denken. Genau dies haben R. Bonic, J. Frampton und A. Tromba in [5] im Jahre 1969 getan. Da ihre Überlegungen auch für Banachraumwertige Lipschitzfunktionen gelten, wollen auch wir die Räume $Lip(K^\alpha, X)$ und $lip(K^\alpha, X)$, $0 < \alpha < 1$, von Hölderfunktionen, definiert auf einer kompakten Teilmenge K des euklidischen $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_2)$ mit Werten in einem Banachraum $(X, \|\cdot\|)$ betrachten. Entsprechend sind die Folgenräume $\ell^\infty(\mathbb{N}, X)$ und $c_0(\mathbb{N}, X)$ definiert, es sei denn es handelt sich um die üblichen Räume reell- oder komplexwertiger Folgen. Um nicht in die Verlegenheit zu kommen, endlichdimensionale Lipschitzräume zu erhalten, sollten unsere Mengen K natürlich stets unendliche Mächtigkeit haben. Wie immer im Endlichdimensionalen ist indes die Wahl der Norm (hier $\|\cdot\|_2$) unerheblich. Im übrigen sind die Lipschitzräume, wie vereinbart, mit der Lipschitznorm $\|\cdot\|_L$ aus Definition 1.1.1 versehen.

Mit einer Konstruktion, die stark von der speziellen Struktur, sprich der Endlichdimensionalität, des zugrundegelegten Raums \mathbb{R}^m ausgeht, erhalten Bonic, Frampton und Tromba das folgende bemerkenswerte

Theorem 2.2.1. *Sei $0 < \alpha < 1$, $m \in \mathbb{N}$ und X ein Banachraum. Dann gilt:*

- (i) *Für endliche m -Simplizialkomplexe $K \subseteq \mathbb{R}^m$ ist der große Lipschitzraum $Lip(K^\alpha, X)$ isomorph zum Folgenraum $\ell^\infty(\mathbb{N}, X)$.*
- (ii) *Der kleine Lipschitzraum $lip(K^\alpha, X)$ ist isomorph zu $c_0(\mathbb{N}, X)$ sogar für alle (unendlichen) kompakten Teilmengen K des \mathbb{R}^m .*

Bemerkung 2.2.2. Der Beweis dieses Theorems benötigt einen technischen Vorlauf, dessen Ergebnisse wir uns nicht in allen Details zumuten wollen, denn einige Feinheiten sind für sich genommen wenig erhellend und zur Darstellung der Beweisstruktur auch nicht notwendig. Der zugrundeliegende Beweisgedanke ist indes durchaus einer Betrachtung wert und auch relativ leicht nachvollziehbar. Allerdings soll schon an dieser Stelle zugegeben werden, daß er einen Haken enthält, der relativ hartnäckig zu sein scheint. Hierauf wird in dem 1999 erschienenen Buch “Lipschitz Algebras” [52, 3.4] vom bereits bekannten Nik Weaver hingewiesen. Dieser “improved” in aller Bescheidenheit den nun folgenden Originalbeweis von Bonic, Frampton und Tromba “in some minor ways” (siehe [52, 3.6]), indem er zum einen Kuben anstelle von Simplexen betrachtet und schließlich den entsprechenden Isomorphismus etwas komplizierter definiert. Ob diese Modifikationen unbedingt nötig sind — jedenfalls führen sie zu einem waserdichten Beweis — oder ob die Schwachstelle im anschließend dargestellten Vorgehen “schonender” behoben werden kann, muß hier offen bleiben. Wir werden an der entsprechenden Stelle auf den Knackpunkt, der schon von manch einem übersehen wurde, hinweisen und im Zuge dessen auch etwas auf Weavers verbesserten Ansatz eingehen.

Der Beweis des Theorems wird von Bonic, Frampton und Tromba, und darin besteht die Hauptarbeit, zunächst für das Standardsimplex $T = T^0$, aufgespannt durch eine Orthonormalbasis $\{e_1, \dots, e_m\}$ des \mathbb{R}^m , geführt. Über ein Halbieren seiner Kanten, bzw. über die Mittelpunkte seiner 1-Teilsimplexe, kann man

dieses in 2^m Teilsimplexe (bzw. genauer systematisch in sogenannte “rechts- m -Simplexe”) zerlegen, deren Durchmesser jeweils $\text{diam}(T)/2$ ist. Bezeichnet man diese Zerlegung mit T^1 und die Teilsimplexe mit T_i^1 , $1 \leq i \leq 2^m$, und setzt dieses Verfahren für jedes der T_i^1 fort, so erhält man fortgesetzte Zerlegungen T^n von T mit immer kleiner werdenden Teilsimplexen T_i^n , $1 \leq i \leq 2^{mn}$. Nun sei für $n = 0, 1, \dots$ mit \mathcal{S}^n die Menge aller in T^n auftretenden Kanten I_j^n , $j = 1, \dots, s(n)$, irgendeines T_i^n bezeichnet, mit \mathcal{V}^n entsprechend die Menge aller auftretenden Ecken auf dem “Niveau” n . Und natürlich faßt man zusammen:

$$\mathcal{S} := \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{S}^n \quad \text{und} \quad \mathcal{V} := \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{V}^n.$$

Für $I \in \mathcal{S}$ definiert man noch mI als den Mittelpunkt und aI und bI als die Endpunkte von I und erhält über zwei technische Lemmata das folgende wichtige Teilergebnis.

Lemma 2.2.3. *Es gelte für die Funktion $f : \mathcal{V} \rightarrow X$*

$$\sup_{I \in \mathcal{S}} \frac{\|f(aI) - f(bI)\|}{\|aI - bI\|_2^\alpha} < \infty.$$

Dann existiert eine eindeutige Fortsetzung von f zu einem Element aus dem Lipschitzraum $Lip(T^\alpha, X)$.

Beweisidee. Seien $u, v \in \mathcal{V}$ gegeben. Dann gilt $u, v \in \mathcal{V}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$, und es ist möglich, einen Weg zwischen u und v zu finden, der stückweise entlang der Richtungen der Koordinatenachsen $\{e_1, \dots, e_m\}$ innerhalb von \mathcal{S}^n verläuft, höchstens $2m$ “Ecken” hat und dessen Länge man, unabhängig von n (!), durch $(2m+1)\|u-v\|_2$ abschätzen kann (dies ist das eine technische Lemma). Unter Benutzung der Voraussetzung kann man dann eine Konstante $M > 0$ finden, für die

$$\frac{\|f(u) - f(v)\|}{\|u - v\|_2^\alpha} < M \quad \forall u, v \in \mathcal{V}$$

gilt (dafür benötigt man das andere technische Lemma, welches “Umkehrungen” gewisser Dreiecksungleichungen liefert, z.B. gilt für nichtnegative reelle a, b die Ungleichung $a^\alpha + b^\alpha \leq 2^{1-\alpha}(a+b)^\alpha$). Damit ist f auf \mathcal{V} gleichmäßig stetig, besitzt also eine eindeutige stetige Fortsetzung auf den Abschluß von \mathcal{V} , und der ist gerade T . Diese Fortsetzung hat natürlich die gleiche Lipschitzkonstante (und das gleiche Supremum) wie f und liegt damit in $Lip(T^\alpha, X)$. \square

Jetzt definiert man für $f \in Lip(T^\alpha, X)$ die Folge $T_X(f) = (\eta_j^n)$, indem man setzt:

$$\eta_j^0(f) = f(v_j^0) \quad \text{für} \quad v_j^0 \in \mathcal{V}^0 \tag{2.2.1}$$

und

$$\eta_j^n(f) = \frac{2f(mI_j^n) - f(aI_j^n) - f(bI_j^n)}{2\|mI_j^n - aI_j^n\|_2^\alpha} \quad \text{für} \quad n \geq 1. \tag{2.2.2}$$

Natürlich fällt diese Definition nicht vom Himmel. Ein kurzer Blick auf (2.1.3) (worin man $\chi_{2^{m+k}}$ durch $\chi_{2^{m+k}}^{(\alpha)}$ ersetzt) genügt, um einzusehen, daß es sich hier um den Versuch handelt, den Isomorphismus von Ciesielski auch für $T \subseteq \mathbb{R}^m$ mit $m \geq 2$ zu erhalten. Und es könnte sein (siehe Bemerkung 2.2.9), daß man es sich an dieser Stelle zu einfach gemacht hat und die Definition für $m \geq 2$ “zu schwach” ist, um die Aussage des folgenden Satzes sicherzustellen. Dennoch soll er hier zusammen mit seinem Beweis zur Diskussion gestellt werden.

Satz 2.2.4. *Die Abbildung $T_X : Lip(T^\alpha, X) \rightarrow \ell^\infty(\mathbb{N}, X)$ ist ein Isomorphismus, unter welchem $c_0(\mathbb{N}, X)$ als Bild des kleinen Lipschitzraums $lip(T^\alpha, X)$ auftritt.*

Beweis. Es ist wie bei Ciesielski offensichtlich, daß $T_X : Lip(T^\alpha, X) \rightarrow \ell^\infty(\mathbb{N}, X)$ eine wohldefinierte kontrahierende lineare Abbildung ist. Auch die Injektivität von T_X ist leicht, denn gilt $T_X(f) = 0$, so ist $f = 0$ auf \mathcal{V}^0 und dann sukzessive $f = 0$ auf \mathcal{V}^n für alle n . Aus der Dichtheit von \mathcal{V} in T folgt dann $f = 0$.

Für die Surjektivität muß man sich wie immer mehr anstrengen, und hierfür war auch der technische Aufwand, der zu Lemma 2.2.3 führte, vonnöten. Zu einer gegebenen Folge $(\eta_j^n) \in \ell^\infty(\mathbb{N}, X)$ konstruiert man induktiv eine Folge stückweiser linearer Funktionen (f_n) von T nach X , indem man $f_0(v_j^0) = \eta_j^0$ setzt und f_0 sonst linear auf T erweitert. Dies ist bei Simplexen immer möglich. (Mit Quadern statt Simplexen wäre diese Konstruktion denn auch etwas diffiziler, siehe Bemerkung 2.2.9.) Bei gegebenem f_n definiert man auf \mathcal{V}^n zuerst $f_{n+1} = f_n$ und dann gewissermaßen als Umkehrung von (2.2.2)

$$f_{n+1}(mI_j^n) = \frac{1}{2}(f_n(aI_j^n) + f_n(bI_j^n)) + \eta_j^n \|mI_j^n - aI_j^n\|_2^\alpha,$$

so daß f_{n+1} auf \mathcal{V}^{n+1} definiert ist und auf ganz T durch lineare Fortsetzung auf jedem T_i^{n+1} erweitert werden kann.

Jetzt wird gezeigt, daß die Folge (f_n) gleichmäßig auf T gegen ein (aus diesem Grunde) stetiges f konvergiert. Das gelingt genauso wie bei Ciesielski über eine geometrische Reihe (völlig analog zu den “Dreiecken” $\varphi_{2^{m+k}}^{(\alpha)}$ betrachtet man hier $f_{n+1} - f_n$). Da f_n auf jedem I_j^n linear ist, haben wir zunächst

$$\begin{aligned} 2(f_{n+1} - f_n)(mI_j^n) &= f_n(aI_j^n) + f_n(bI_j^n) + 2\eta_j^n \|mI_j^n - aI_j^n\|_2^\alpha - 2f_n(mI_j^n) \\ &= 2\eta_j^n \|mI_j^n - aI_j^n\|_2^\alpha. \end{aligned}$$

Die Länge eines jeden I_j^n ist beschränkt durch $2^{-n}\sqrt{m}$, so daß

$$\|(f_{n+1} - f_n)(mI_j^n)\| \leq \|(\eta_j^n)\|_\infty \frac{m^{\frac{\alpha}{2}}}{2^{(n+1)\alpha}}$$

folgt und damit wegen $f_{n+1} - f_n = 0$ auf \mathcal{V}^n sogar

$$\|f_{n+1} - f_n\|_\infty = \sup_j \|(f_{n+1} - f_n)(mI_j^n)\| \leq \|(\eta_j^n)\|_\infty \frac{m^{\frac{\alpha}{2}}}{2^{(n+1)\alpha}}.$$

Also gilt $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_{n+1} - f_n\|_{\infty} \leq \infty$, womit aus der Vollständigkeit von X zunächst die Existenz des punktweisen Grenzwerts $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (f_{n+1} - f_n)(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ in X für $x \in T$ folgt und schließlich auch die Stetigkeit von f (als Funktion von T nach X) gesichert ist. Nach Konstruktion erfüllt f die Gleichungen (2.2.1) und (2.2.2), so daß $T_X(f) = (\eta_j^n)$ gilt, wenn $f \in Lip(T^{\alpha}, X)$ nachgewiesen werden kann. Und hier kommt Lemma 2.2.3 zum Zuge. Sei für $n \in \mathbb{N}_0$ zunächst

$$M_n = \sup_{I \in \mathcal{S}^n} \frac{\|f(aI) - f(bI)\|}{\|aI - bI\|_2^{\alpha}}.$$

Für $I \in \mathcal{S}^n$ gilt aber die Ungleichung

$$\begin{aligned} & \frac{\|f(mI) - f(aI)\|}{\|mI - aI\|_2^{\alpha}} \\ & \leq \frac{\|2f(mI) - f(aI) - f(bI)\|}{2\|mI - aI\|_2^{\alpha}} + \frac{1}{2} \frac{\|f(bI) - f(aI)\|}{\|bI - aI\|_2^{\alpha}} \left(\frac{\|bI - aI\|_2}{\|mI - aI\|_2} \right)^{\alpha} \\ & \leq \|(\eta_j^n)\|_{\infty} + 2^{\alpha-1} \frac{\|f(bI) - f(aI)\|}{\|bI - aI\|_2^{\alpha}}. \end{aligned}$$

Nun ist es natürlich alles andere als wahr, daß jedes Element von \mathcal{S}^{n+1} die Form $[aI, mI]$ oder $[mI, bI]$ für ein $I \in \mathcal{S}^n$ hat, aber wäre das der Fall, so könnte man mit dieser Ungleichung nach Bilden des Supremums auf beiden Seiten die Abschätzung

$$M_{n+1} \leq \|(\eta_j^n)\|_{\infty} + 2^{\alpha-1} M_n \quad (2.2.3)$$

gewinnen. Das ist der eingangs schon angekündigte Knackpunkt des Beweises. Wir wollen hier jedoch in Anerkennung der Ideen von Bonic, Frampton und Tromba den Beweisgedanken zu Ende führen, bevor wir in Bemerkung 2.2.9 auf diese Beweislücke gesondert zu sprechen kommen.

Durch Iteration erhalten wir unter Berücksichtigung von $(2^{(n+1)})^{(\alpha-1)} \leq 1$ und $M_0 \leq 2$ aus (2.2.3) nach Definition von $f(v_j^0)$ schließlich

$$\begin{aligned} M_{n+1} & \leq \|(\eta_j^n)\|_{\infty} (1 + 2^{\alpha-1} + \dots + 2^{n(\alpha-1)}) + 2^{(n+1)(\alpha-1)} M_0 \\ & \leq \|(\eta_j^n)\|_{\infty} (1 - 2^{\alpha-1})^{-1} + 2 \|(\eta_j^n)\|_{\infty} \\ & = (2 + (1 - 2^{\alpha-1})^{-1}) \|(\eta_j^n)\|_{\infty}, \end{aligned}$$

d.h. eine Abschätzung unabhängig von n . Damit sind die Voraussetzungen zur Anwendung von Lemma 2.2.3 erfüllt, welches nun $f \in Lip(T^{\alpha}, X)$ und damit die Surjektivität von T_X liefert. Die Stetigkeit von T_X^{-1} folgt aus dem Satz über die offene Abbildung. (Versucht man, über die obige Ungleichung und die beteiligten Lemmata der Vorüberlegungen eine Abschätzung für die Norm von T_X^{-1} zu erhalten, so findet man für $m = 1$ die obere Schranke $\frac{3 \cdot 2^{5-3\alpha} - 2}{(2^{\alpha-1})(2^{1-\alpha}-1)}$, die zumindest im Nenner an schon Dagewesenes erinnert.)

Wieder analog zu Ciesielskis eindimensionalem Fall erkennt man den Isomorphismus zwischen $lip(T^{\alpha}, X)$ und $c_0(\mathbb{N}, X)$. Zunächst bemerkt man, daß nach Definition T_X den Raum $lip(T^{\alpha}, X)$ in $c_0(\mathbb{N}, X)$ abbildet. Des weiteren ist das

Bild $T_X(\text{lip}(T^\alpha, X))$ dicht in $c_0(\mathbb{N}, X)$, denn zu $(\eta_j^n) \in c_0(\mathbb{N}, X)$ mit $\eta_j^n = 0$ für $n \geq n_0$ ist $f_n = f_{n_0}$ für alle $n \geq n_0$, also $T_X^{-1}((\eta_j^n)) = f_{n_0}$ stückweise (genauer: auf jedem $T_i^{n_0}$) linear. Insbesondere erfüllt f_{n_0} auf T sogar eine Lipschitzbedingung bezüglich der euklidischen Metrik $\|\cdot\|_2$ und liegt damit nach Satz 1.1.19 erst recht im Hölderraum $\text{lip}(T^\alpha, X)$. \square

Bevor wir in Bemerkung 2.2.9 etwas intensiver auf die aufgetauchte Beweislücke eingehen werden, wollen wir zunächst — unter der Annahme, daß sich der Beweis retten läßt — noch ein paar nette “Abfallprodukte” der obigen Gedankengänge einsammeln. Zieht man im Falle $X = \mathbb{K}$ (d.h. \mathbb{R} oder \mathbb{C}) die Einheitsvektorbasis von c_0 mittels $T_{\mathbb{K}}$ zurück in den Raum $\text{lip}(T^\alpha, \mathbb{K})$, sieht man mit der letzten Überlegung (vergleiche wieder Ciesielski):

Korollar 2.2.5. *$\text{lip}(T^\alpha, \mathbb{K})$ hat eine unbedingte Basis, die aus stückweise linearen Funktionen besteht.*

Abbildungen mit endlichdimensionalem Bild spielen in der Banachraumtheorie (und gewiß nicht nur dort!) eine besondere Rolle (vgl. II.3.6 in [55]). Da wir Banachraumwertige Lipschitzfunktionen betrachten, können wir auch nach Lipschitzfunktionen mit endlichdimensionalem Bild fragen. So erscheint in diesem Zusammenhang das folgende nebenbei erhaltene Ergebnis recht interessant.

Korollar 2.2.6. *Die Funktionen in $\text{lip}(T^\alpha, X)$ mit endlichdimensionalem Bild liegen dicht in $\text{lip}(T^\alpha, X)$.*

Beweis. Zu $f \in \text{lip}(T^\alpha, X)$ und $(\eta_j^n) = T_X(f) \in c_0(\mathbb{N}, X)$ betrachte einfach die im Beweis zum obigen Satz konstruierte Folge (f_n) stückweise linearer Funktionen (d.h. insbesondere Funktionen mit endlichdimensionalem Bild). $T_X(f_n)$ ist dann eine Nullfolge mit nur endlich vielen nichttrivialen Einträgen, wobei $T_X(f_n) \rightarrow T_X(f)$ in $c_0(\mathbb{N}, X)$ gilt (“Auffüllen weiterer Einträge”), also auch $f_n \rightarrow f$ in $\text{lip}(T^\alpha, X)$. \square

Da nach obigen Überlegungen die betrachtete Folge (f_n) sogar Lipschitz-stetig bezüglich der euklidischen Norm ist, erhält man gleichzeitig eine (dort schon angekündigte) Verallgemeinerung des Satzes 1.2.7 von Musielak und Semadeni (die später noch weiter verallgemeinert wird).

Korollar 2.2.7. *Die Menge $\text{Lip}(T, X)$ liegt dicht in $\text{lip}(T^\alpha, X)$ für $0 < \alpha < 1$.*

Bemerkung 2.2.8. T kann (mittels linearer Transformation) auch als beliebiges m -Simplex gewählt werden, schließlich auch als endlicher Simplizialkomplex. (Hierfür müßte der Beweis nur durch einen zusätzlichen Index für die Einzelsimplexe ergänzt werden.) Durch Triangulation kann man laut Bonic, Frampton und Tromba das Resultat sogar für kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeiten erhalten. Wir werden unten jedoch einen anderen Weg gehen, um die noch ausstehende Behauptung in Theorem 2.2.1 zu beweisen. Durch dieses Resultat werden wir dann in Abschnitt 2.4 mit einem bemerkenswerten Ergebnis von Wulbert Theorem 2.2.1 in seiner schönsten Form erhalten. Der obige Beweis

bricht für α gleich 0 oder 1 übrigens zusammen. Trotzdem liefert $T_{\mathbb{K}}$ auch im Falle $\alpha = 0$ analog zu Satz 2.1.1 eine Schauderbasis von $C(T)$.

Bemerkung 2.2.9. Nun noch ein paar Worte zu der aufgetauchten Lücke im Beweis von Satz 2.2.4. Offenbar wurde von den Verfassern des Beweises — und nicht nur von diesen — die banale Tatsache übersehen, daß ein Element von \mathcal{S}^{n+1} durchaus die Form $[mI_1, mI_2]$ für $I_1, I_2 \in \mathcal{S}^n$ haben kann. Ja es sind gerade die Elemente dieser Form, und das kann man schon bei der ersten Zerlegung eines Dreiecks einsehen, welche die “entscheidenden” neuen Kanten einbringen. Damit wird natürlich die Herleitung einer Ungleichung der Gestalt (2.2.3) erheblich verkompliziert, wenn nicht unmöglich gemacht. Es ist — und diese Frage kann hier nicht beantwortet werden — sogar fraglich, ob mit der vorliegenden Definition von T_X eine solche überhaupt existieren kann. Denn in dieser Definition ist der obige Fehler schon im Keim angelegt, da sich mit dieser der Wert $f_{n+1}(mI_j^n)$ als Umkehrung von (2.2.2) im Beweis von Satz 2.2.4 nur aus “zwei Quellen” (nämlich $f_n(aI_j^n)$ und $f_n(bI_j^n)$) speist. Glücklicherweise profitieren wir hier von dem eigenartigen Phänomen, daß man es in mathematischen Veröffentlichungen viel öfter mit falschen Beweisen denn mit falschen Aussagen zu tun hat! Ein Blick auf den Ansatz von Weaver in Abschnitt 3.4 seines Buches [52] zeigt sogar, daß auch der obige Beweis — es finden sich bei Weaver völlig analoge Abschätzungen — “eigentlich richtig” ist.

Weaver behebt den obigen Mangel, indem er den Würfel $[0, \frac{1}{2}]^m$ im \mathbb{R}^m einer fortgesetzten Halbierungsmethode unterzieht. Im k -ten Schritt hat er es dann mit neu konstruierten Ecken zu tun, deren Koordinaten sich alle als Brüche mit dem Nenner 2^k schreiben lassen. Ist n die Anzahl all derjenigen Koordinaten einer solchen Ecke v , die sich nicht als Bruch mit dem Nenner 2^{k-1} schreiben lassen, so heißen die $M := 2^n$ Punkte z_1, \dots, z_M , die sich aus v durch simultanes Addieren von $\pm 2^{-k}$ zu diesen entsprechenden Koordinaten ergeben, die *Quellen* von v . Diese sind schon Eckpunkte auf einem “niedrigeren Niveau” $\leq k - 1$, so daß man damit in Analogie zu (2.2.2) den Wert eines $\eta : \mathcal{V} \rightarrow X$ durch die Definition

$$\eta(v) = 2^{k\alpha} \left(f(v) - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M f(z_i) \right) \quad (2.2.4)$$

für Ecken auf “höherem Niveau” festlegen kann, wenn für das erste die Definition in (2.2.1) übernommen wird. Und dieser feinsinnige Ansatz, $\eta(v)$ für neue Ecken v als “normalisierter Unterschied zwischen $f(v)$ und dem Durchschnittswert von f an den Quellen von v ” zu definieren, ist solide genug, um eine zu (2.2.3) völlig analoge Ungleichung und damit ein beruhigendes Beweisende zu erhalten.

Nach diesen Absicherungen wollen wir für den Rest der Überlegungen zu Theorem 2.2.1 wieder auf den Originalartikel zurückkommen, ohne zu verschweigen, daß auch Weaver in [52, 3.5], und zwar sehr detailliert, die nun dargestellten Gedankengänge für seinen Fall nachvollzogen hat. Mit dem folgenden Resultat von G. Glaeser aus [13, S. 27–33], welches wir hier allgemeiner (der Beweis ist der gleiche) für Banachraum-wertige Funktionen formulieren, machen Bonic,

Frampton und Tromba nun den Schritt von einem m -Simplex T zu einer beliebigen kompakten Teilmenge K des \mathbb{R}^m . (Vergleiche mit diesem Vorgehen auch die wesentlich einfachere Beobachtung für den großen Lipschitzraum im Fall $\alpha = 1$ und $m = 1$ in Bemerkung 2.3.6.)

Satz 2.2.10. *Sei K eine kompakte Teilmenge des \mathbb{R}^m , T ein K enthaltene m -Simplex und X ein Banachraum. Dann existiert zu jeder kleinen Lipschitzfunktion auf K^α , $0 < \alpha < 1$, mit Werten in X eine (‘gutartige’) Fortsetzung zu einer solchen auf T^α . Genauer: Es gibt eine stetige lineare Injektion*

$$j : \text{lip}(K^\alpha, X) \rightarrow \text{lip}(T^\alpha, X),$$

so daß $j(f)|_K = f$ für jedes $f \in \text{lip}(K^\alpha, X)$ ist.

Damit erhält man jetzt erstaunlich schnell das begehrte Resultat:

Satz 2.2.11. *Für unendliche Kompakta $K \subseteq \mathbb{R}^m$ gilt die Isomorphie*

$$\text{lip}(K^\alpha, \mathbb{K}) \simeq c_0.$$

Beweis. Mit der Restriktionsabbildung $i : \text{lip}(T^\alpha, \mathbb{K}) \rightarrow \text{lip}(K^\alpha, \mathbb{K})$ und der Injektion j aus Satz 2.2.10 ist $j \circ i$ eine Projektion von $\text{lip}(T^\alpha, \mathbb{K})$ auf einen abgeschlossenen unendlichdimensionalen Unterraum von $\text{lip}(T^\alpha, \mathbb{K})$, der isomorph zu $\text{lip}(K^\alpha, \mathbb{K})$ ist. Wegen $\text{lip}(T^\alpha, \mathbb{K}) \simeq c_0$ folgt nun sofort auch $\text{lip}(K^\alpha, \mathbb{K}) \simeq c_0$ aus der Tatsache, daß c_0 prim ist (siehe 2.a.3. in [35]: Pełczyński und seine Dekompositionsmethode!). \square

Bemerkung 2.2.12. An dieser Stelle wollen wir den Ereignissen, insbesondere Korollar 2.4.6 und Kapitel 3, etwas vorgreifen und darauf hinweisen, daß man aus dem Ergebnis von Satz 2.2.11 auch sofort $\text{lip}(K^\alpha, \mathbb{K}) \simeq \ell^\infty$ schließen kann. Dies wollen wir deshalb tun, um sicher zu gehen, daß die Behauptung auf alle Fälle richtig ist, denn es bietet sich angesichts der obigen Argumentation eine Möglichkeit an, sowohl Satz 2.2.10 als auch Satz 2.2.11 analog für den großen Lipschitzraum skalarwertiger Lipschitzfunktionen und ℓ^∞ herzuleiten, die sich bei näherem Hinsehen aber als trugschlüssiger Versuch erweist: Man könnte das Analogon zum Satz von Glaeser in der Anwendung des Fortsetzungssatzes 1.1.20 von McShane sehen (wenn auch für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ die Einbettung nicht normgleich wäre). $\text{Lip}(K^\alpha, \mathbb{K}) \simeq \ell^\infty$ würde dann mit den gleichen Argumenten wie im Beweis zu Satz 2.2.11 aus der Tatsache, daß ℓ^∞ prim ist (vgl. 2.a.7. in [35]), folgen. Der Haken an dieser Argumentation besteht in dem Umstand, daß die Fortsetzung von McShane nun leider im allgemeinen alles andere als eine lineare Fortsetzungsabbildung liefert. Wie schon zum Beweis von Satz 1.1.20 bemerkt und in Bemerkung 1.1.24 dargestellt, verhalten sich damit unsere Fortsetzungen von Lipschitzfunktionen wie Hahn-Banach-Fortsetzungen. Wir werden übrigens in einem anderen Zusammenhang bei der Betrachtung von Dualräumen von kleinen und großen Lipschitzräumen (im Anschluß an Lemma 4.1.4) auf einen Fall stoßen, in der eine (lineare) Hahn-Banach-Fortsetzungsabbildung auftaucht.

Jetzt seien noch ein paar Worte zu dem allgemeinen Ergebnis (ii) des Theorems 2.2.1 für einen beliebigen Zielbanachraum X gesagt. Dieses erhält man durch Verwendung von Tensorprodukten über den folgenden

Satz 2.2.13. *Ist K eine kompakte Teilmenge des \mathbb{R}^m und X ein Banachraum, dann gilt*

$$\text{lip}(K^\alpha, \mathbb{K}) \check{\otimes} X \cong \text{lip}(K^\alpha, X).$$

$X \check{\otimes} Y$ bezeichnet hierbei das Tensorprodukt, das durch Vervollständigung des algebraischen Tensorprodukts $X \otimes Y$ bezüglich der Norm entsteht, die durch die natürliche Injektion von $X \otimes Y$ in $\mathcal{L}(Y', X)$ induziert wird. (Mittels dieser Injektion wird $x \otimes y$ auf $(y' \rightarrow y'(y)x)$ abgebildet.) Wir wollen jedoch an dieser Stelle nicht weiter auf das Hantieren mit Tensorprodukten eingehen. Es sei hier lediglich festgehalten, daß in den Beweis der Isomorphie (nach einer Anwendung des Satzes von Hahn-Banach) der Satz 2.2.10 und das Korollar 2.2.6 Eingang finden.

Schließlich folgt mit den "Rechenregeln" $\text{lip}(K^\alpha, X) \simeq \text{lip}(K^\alpha, \mathbb{K}) \check{\otimes} X$ und $c_0 \check{\otimes} X = c_0(X)$ mit dem Ergebnis $\text{lip}(K^\alpha, \mathbb{K}) \simeq c_0$ der

Satz 2.2.14. *Es ist $\text{lip}(K^\alpha, X) \simeq c_0(X)$ für kompaktes unendliches K in \mathbb{R}^m .*

Wegen $c_0(c_0) \cong c_0$ (einzusehen mit dem ersten Cantorschen Abzählbarkeitsverfahren) hat man als

Korollar 2.2.15. *Ist X isomorph zu c_0 , so auch $\text{lip}(K^\alpha, X)$.*

Bemerkung 2.2.16. Abschließend sei noch die Behauptung von Bonic, Frampton und Tromba wiedergegeben, daß für einen beliebigen kompakten metrischen Raum (K, d) und einen Banachraum X zumindest immer eine Einbettung von $\text{Lip}(K^\alpha, X)$ in $\ell^\infty(\mathbb{N}, X)$ existiert, die $\text{lip}(K^\alpha, X)$ in $c_0(\mathbb{N}, X)$ einbettet. Diese wird folgendermaßen skizziert: Zu jedem $\varepsilon > 0$ kann man eine Folge von Paaren $(x_i, y_i) \in X \times X$, $x_i \neq y_i \forall i \in \mathbb{N}$, wählen, so daß zu jedem Paar $(x, y) \in X \times X$, $x \neq y$, ein $k \in \mathbb{N}$ existiert mit $d(x, x_k) \leq \varepsilon d(x, y)$ und $d(y, y_k) \leq \varepsilon d(x, y)$. Die Abbildung

$$j : f \mapsto \left(\frac{f(x_i) - f(y_i)}{d^\alpha(x_i, y_i)} \right)$$

sei dann für genügend kleines ε die gewünschte Einbettung (modulo Konstanten, die man ja noch in die angegebene Folge einbringen kann). Wie man konkret das ε und die Folge der Paare (x_i, y_i) wählen kann bzw. muß, so daß man das f aus $j(f)$ rekonstruieren kann, d.h. die Abbildung wirklich injektiv wird, bleibt aber unklar. Interessanterweise blieb dies auch J. A. Johnson, zu dessen Arbeiten wir im nächsten Abschnitt kommen werden, schleierhaft. Glücklicherweise konnten seine Zweifel in einer privaten Unterredung mit Professor Frampton ausgeräumt werden. Dieser offenbarte in dem Gespräch einen richtigen Beweis, wofür jener ihm dankte (siehe [27, S. 177]). Das Bestreben, diesen richtigen Beweis auch zu bekommen, mündete in einen anfangs recht vielversprechenden email-Kontakt mit Frampton, der allerdings dann mit dem Hinweis, daß

Tromba schließlich auch noch da sei, im Sande verlief. Tromba seinerseits war offenbar derart indisponiert, daß er erst gar nichts von sich hören ließ. Aus der Behauptung kann man jedenfalls mit Satz 2.a.2. in [35] schließen, daß $\text{lip}(K^\alpha)$ wiederum einen komplementierten Unterraum enthält, der seinerseits isomorph zu c_0 ist. Wir werden einen solchen im folgenden Abschnitt für weitaus allgemeinere metrische Räume K konkret angeben.

2.3 c_0 und ℓ^∞ als Unterräume von Lipschitzräumen

Es wurde bereits in obiger Bemerkung 2.2.12 angedeutet, und wir werden die Argumente dafür im nächsten Abschnitt 2.4 und auch in Kapitel 3 kennenlernen, daß das Isomorphie-Ergebnis von Bonic, Frampton und Tromba für Räume skalarwertiger Lipschitzfunktionen in folgender Allgemeinheit gilt: Für kompakte Teilmengen K endlichdimensionaler Banachräume ist $\text{Lip}(K^\alpha) \simeq \ell^\infty$ und $\text{lip}(K^\alpha) \simeq c_0$. Es ist nur natürlich, nach weiteren Verallgemeinerungen zu fragen, zum Beispiel danach, ob dieses Ergebnis für beliebige kompakte metrische Räume K gilt. Diese Frage ist in der Literatur nach wie vor noch nicht beantwortet. Allerdings hat man ein schwächeres Resultat, nämlich den folgenden Einbettungssatz von J. A. Johnson aus dem Jahre 1972. Dieser gilt jedoch in großer Allgemeinheit; man beachte, wie wenig über den metrischen Raum vorausgesetzt wird.

Theorem 2.3.1. *Sei (K, d) ein metrischer Raum mit $\inf_{x \neq y} d(x, y) = 0$. Dann enthält $\text{Lip}(K)$ einen zu ℓ^∞ isomorphen Unterraum, und $\text{lip}(K^\alpha)$ enthält für $0 < \alpha < 1$ einen zu c_0 isomorphen komplementierten Unterraum.*

Das Theorem ist insofern geradezu perfekt, als es praktisch alle metrischen Räume abdeckt. Diejenigen K nämlich, für welche die Minimalvoraussetzung $\inf_{x \neq y} d(x, y) = 0$ nicht erfüllt ist, produzieren lediglich die “trivialen” Lipschitzräume $\text{Lip}(K) \simeq \text{lip}(K) \simeq \ell^\infty(K)$, wie man schnell sieht.

Der auf den ersten Blick etwas technisch anmutende Beweis von Johnson ist ausgesprochen trickreich. Er involviert für K^α ein Jonglieren mit Metriken d^{β_n} , “nahe bei” d^α , für die aber d^α eine Höldermetrik bleibt (also $\beta_n > \alpha$) und die damit zu Lipschitzfunktionen auf K^α führen.

Es stellt sich heraus, daß man zwei Fälle unterscheiden muß. Im ersten Fall, wir wollen ihn den diskreten Fall nennen (jeder Punkt besitzt eine Umgebung, “die alleine ihm gehört”), hat K lediglich Cauchyfolgen, welche ab einem Grenzdex konstant sind. Wir wollen den Beweis für diesen Fall, der in [26] skizziert ist, durchexerzieren. Der Beweis für den Fall, in dem K einen Häufungspunkt besitzt, ist in [27] detailliert beschrieben. (Man beachte, daß dies alle Fälle sind, da man o.B.d.A. nach Satz 1.1.8 davon ausgehen kann, daß K vollständig ist.) Aufgrund der Tatsache, daß man es im “Alltagsgeschäft” gewohnt ist, metrische Räume mit mindestens einem Häufungspunkt vor sich zu haben, verlangt es der Anstand, auch den Beweis für den zweiten Fall, der als nichtdiskreter

Fall bezeichnet sei, zumindest anzusehen. Dies ist auch gewinnbringend, wenn man den Beweis des diskreten Falls erfolgreich absolviert hat.

Beweis für den diskreten Fall. Unter einer trivialen Folge wollen wir hier eine Folge verstehen, die ab einem Index $n \in \mathbb{N}$ schließlich konstant bleibt. Das Gegenteil sei eine nichttriviale Folge. Wir nehmen also an, daß K nur triviale Cauchyfolgen hat. In diesem Fall enthält jede nichttriviale Folge $(x_n) \subseteq K$ eine Teilfolge (x_{n_k}) mit $d(x_{n_k}, x_{n_{k'}}) \geq \delta$ für $k \neq k'$ und einem geeigneten $\delta > 0$. Sonst gäbe es zu jedem $\varepsilon > 0$ nur endlich viele Folgenglieder von (x_n) , die diese Ungleichung (mit ε statt δ) erfüllen, und (x_n) wäre eine Cauchyfolge, also trivial.

Seien nun gemäß Voraussetzung (x_n) und (y_n) Folgen in K mit $x_n \neq y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $d(x_n, y_n) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Wäre (x_n) trivial, so wäre (y_n) eine nichttriviale Cauchyfolge, also ist (x_n) nichttrivial, und wir nehmen gleich an, daß $d(x_m, x_n) \geq \delta$ für $m \neq n$ und ein $\delta > 0$ gilt. (Man sieht, daß in unserem Fall K nicht kompakt sein kann.) Wir nehmen o.B.d.A. $d(x_n, y_n) \leq \frac{\delta}{2} \leq 1 \forall n \in \mathbb{N}$ an und setzen $r_n = \frac{1}{2}d(x_n, y_n)$ sowie $B_n = \{x : d(x, x_n) \leq r_n\}$ (diese Kugeln dienen uns als Träger gewisser Funktionen). Nun vereinbaren wir noch $d(A, B) = \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\}$ sowie $d(x, B) = d(\{x\}, B)$ und bezeichnen mit \tilde{B} das Komplement von B in K . Es gilt nun die wichtige Ungleichung

$$d(B_m, B_n) \geq \frac{\delta}{2} \quad \text{für } m \neq n \quad (2.3.1)$$

wegen $r_m \leq \frac{\delta}{4}$ und $r_n \leq \frac{\delta}{4}$ sowie $d(x_m, x_n) \geq \delta$ für $m \neq n$.

Da die Funktion $t \mapsto t^\beta$ für $\beta > 1$ nicht subadditiv, d.h. d^β im allgemeinen keine Metrik mehr ist, behandeln wir zunächst den Fall $\alpha < 1$. Es sei (β_n) eine Folge mit $\alpha < \beta_n \leq 1 \forall n \in \mathbb{N}$ und $\beta_n \rightarrow \alpha$ für $n \rightarrow \infty$, so daß

$$r_n^{\beta_n - \alpha} \geq \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad d^{\beta_n - \alpha}(x_n, \tilde{B}_n) \geq \frac{1}{2} \quad (2.3.2)$$

gilt. Definiere nun mit $f_n : x \mapsto d^{\beta_n}(x, \tilde{B}_n) \forall n \in \mathbb{N}$ und mit $a = (a_n) \in \ell^\infty$

$$T(a) := f_a := \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n.$$

Dies ist, da die Kugeln B_n paarweise disjunkt sind, eine wohldefinierte Funktion mit dem Träger $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, die $|f_a(x)| \leq |a_n|d^{\beta_n}(x, \tilde{B}_n) \leq |a_n|r_n \leq \|a\|_\infty$ für alle $x \in B_n$, also $\|f_a\|_\infty \leq \|a\|_\infty$ erfüllt. Um $\sup_{x \neq y} \frac{|f_a(x) - f_a(y)|}{d^\alpha(x, y)} \leq \infty$ und damit $f_a \in Lip(K^\alpha)$, zu zeigen, müssen wir drei Fälle unterscheiden.

1. Fall: $x \in B_m$ und $y \in B_n$ mit $m \neq n$ und $\beta_m < \beta_n$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{|f_a(x) - f_a(y)|}{d^\alpha(x, y)} &\leq \frac{|a_m|d^{\beta_m}(x, \tilde{B}_m) + |a_n|d^{\beta_n}(y, \tilde{B}_n)}{d^\alpha(x, y)} \\ &\stackrel{(2.3.1)}{\leq} \|a\|_\infty \frac{r_m^{\beta_m} + r_n^{\beta_n}}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^\alpha} \leq 2 \left(\frac{\delta}{4}\right)^{\beta_m} \left(\frac{\delta}{2}\right)^{-\alpha} \|a\|_\infty \leq 2^{1-\alpha} \|a\|_\infty. \end{aligned}$$

2. Fall: $x, y \in B_n$. Damit haben wir

$$\begin{aligned} \frac{|f_a(x) - f_a(y)|}{d^\alpha(x, y)} &= \frac{|a_n| |d^{\beta_n}(x, \tilde{B}_n) - d^{\beta_n}(y, \tilde{B}_n)|}{d^\alpha(x, y)} \\ &\leq \|a\|_\infty \frac{d^{\beta_n}(x, y)}{d^\alpha(x, y)} \leq \|a\|_\infty (2r_n)^{\beta_n - \alpha} \leq \|a\|_\infty. \end{aligned}$$

3. Fall: $x \in B_n$ und $y \notin \bigcup_{m=1}^\infty B_m$. Hier kann man wegen $d^{\beta_n}(y, \tilde{B}_n) = 0$ wie im zweiten Fall abschätzen:

$$\frac{|f_a(x) - f_a(y)|}{d^\alpha(x, y)} = \frac{|a_n| |d^{\beta_n}(x, \tilde{B}_n)|}{d^\alpha(x, y)} \leq \|a\|_\infty \frac{d^{\beta_n}(x, y)}{d^\alpha(x, y)} \leq \|a\|_\infty.$$

Andererseits gilt nach Definition von r_n und B_n sowie nach Wahl der β_n mit (2.3.2) die Abschätzung

$$\begin{aligned} L_\alpha(f_a) &\geq \frac{|f_a(x_n) - f_a(y_n)|}{d^\alpha(x_n, y_n)} = \frac{|a_n| |d^{\beta_n}(x_n, \tilde{B}_n)|}{d^\alpha(x_n, y_n)} \\ &\geq \frac{|a_n| r_n^{\beta_n}}{(2r_n)^\alpha} = \frac{|a_n|}{2^\alpha} r_n^{\beta_n - \alpha} \geq \frac{|a_n|}{2^{1+\alpha}} \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Insgesamt erhalten wir damit

$$2^{-1-\alpha} \|a\|_\infty \leq \|T(a)\|_L \leq 2^{1-\alpha} \|a\|_\infty, \quad (2.3.3)$$

womit $T : \ell^\infty \rightarrow T(\ell^\infty) \subseteq Lip(K^\alpha)$ ein Isomorphismus ist.

Jetzt zeigen wir $T(c_0) \subseteq lip(K^\alpha)$. Sei hierfür $a = (a_n) \in c_0$ mit o.B.d.A. $\|a\|_\infty \leq 1$ und ein $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so daß $|a_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \geq N$ ist. Wähle weiter ein $\delta' \in (0, 1)$ mit $(\delta')^{\beta_n - \alpha} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ für $1 \leq n < N$. Für $d^\alpha(x, y) \leq (\delta')^\alpha$ folgt dann $\frac{|f_a(x) - f_a(y)|}{d^\alpha(x, y)} \leq \varepsilon$. Wieder unterscheiden wir die drei Fälle.

1. Fall: $x \in B_m$ und $y \in B_n$ mit $m < N \leq n$. Damit greift die Abschätzung

$$\begin{aligned} \frac{|f_a(x) - f_a(y)|}{d^\alpha(x, y)} &\leq \frac{|a_m| d^{\beta_m}(x, y) + |a_n| d^{\beta_n}(y, x)}{d^\alpha(x, y)} \\ &\leq |a_m| d^{\beta_m - \alpha}(x, y) + |a_n| d^{\beta_n - \alpha}(x, y) \leq 1 \cdot \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot 1 \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Für $m < n \leq N$ oder $N \leq m < n$ schätzt man entsprechend ab.

2. Fall: $x, y \in B_n$. Hier rechnet man wie im obigen zweiten Fall

$$\frac{|f_a(x) - f_a(y)|}{d^\alpha(x, y)} \leq |a_n| d^{\beta_n - \alpha}(x, y) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

sowohl für $n < N$ als auch für $n \geq N$.

3. Fall: $x \in B_n, y \notin \bigcup_{m=1}^\infty B_m$. Mit diesen Vorgaben schätzt man wieder genauso wie im zweiten Fall ab.

Bei dem Versuch, aus einem f_a die Folge $a \in \ell^\infty$ wiederzugewinnen, stößt man auf die folgende Projektion P in $Lip(K^\alpha)$ mit $P(Lip(K^\alpha)) = T(\ell^\infty)$, definiert durch

$$P(f) := \sum_{n=1}^{\infty} b_n f_n \quad \text{mit} \quad b_n := \frac{f(x_n) - f(y_n)}{f_n(x_n)}. \quad (2.3.4)$$

Ist $\|f\|_L \leq 1$, so gilt unter Berücksichtigung von (2.3.2)

$$\begin{aligned} |f(x_n) - f(y_n)| &\leq d^\alpha(x_n, y_n) = (2r_n)^\alpha \leq 2^\alpha d^\alpha(x_n, \tilde{B}_n) \\ &\leq 2^{1+\alpha} d^{\beta_n}(x_n, \tilde{B}_n) = 2^{1+\alpha} f_n(x_n). \end{aligned}$$

Man hat also $\|(b_n)\|_\infty \leq 2^{1+\alpha}$, woraus mit (2.3.3) und (b_n) anstelle von a die Abschätzung $\|P\| \leq 4$ folgt.

Gilt bereits $f = f_a$ für ein $a = (a_n) \in \ell^\infty$, so erhält man $b_n = \frac{a_n f_n(x_n) - 0}{f_n(x_n)} = a_n$, also $P(f_a) = f_a$, so daß $P^2 = P$ und $P(Lip(K^\alpha)) = T(\ell^\infty)$ gilt.

Es gilt schließlich $P(lip(K^\alpha)) = T(c_0)$, und um dieses einzusehen, reicht es wegen $T(c_0) \subseteq lip(K^\alpha)$ nach dem gerade Gezeigten $P(lip(K^\alpha)) \subseteq T(c_0)$ festzustellen. Sei also $f \in lip(K^\alpha)$ gegeben und $(b_n) \in \ell^\infty$ gemäß (2.3.4) berechnet. Eingedenk der gerade hergeleiteten Ungleichung $d^\alpha(x_n, y_n) \leq 2^{1+\alpha} f_n(x_n)$ erhalten wir

$$b_n = \frac{f(x_n) - f(y_n)}{f_n(x_n)} \leq 2^{1+\alpha} \frac{f(x_n) - f(y_n)}{d^\alpha(x_n, y_n)} \rightarrow 0$$

für $n \rightarrow \infty$, also $(b_n) \in c_0$. Und damit ist für $\alpha < 1$ alles gezeigt.

Um zu zeigen, daß auch $Lip(K)$ eine Kopie von ℓ^∞ enthält, verwenden wir den obigen Beweis mit der Modifikation $\beta_n > \alpha = 1$, wobei wir für ein beliebiges $\beta > 1$ alle $\beta_n \leq \beta$ wählen können. Man erhält nach kurzer Rechnung die Ungleichung

$$|x^\beta - y^\beta| \leq \beta |x - y| \quad \forall x, y \in [0, 1], \quad (2.3.5)$$

für alle $\beta > 1$, und diese ersetzt im zweiten und dritten Fall die umgekehrte Dreiecksungleichung für d^{β_n} , so daß wir dort die Abschätzungen $\frac{|f_a(x) - f_a(y)|}{d^\alpha(x, y)} \leq \beta \|a\|_\infty$ erhalten (man beachte, daß $d(x_n, \tilde{B}_n) \leq 1$ für alle n gewählt wurde). Im ersten Fall muß man jetzt $\beta_m > \beta_n$ wählen. Alles weitere gilt völlig analog. \square

Bei genauem Hinsehen fällt auf, daß man im Falle $\alpha = 1$ die Einbettung von ℓ^∞ in $Lip(K)$ "fast isometrisch" wählen kann, d.h. den Banach-Mazur-Abstand von ℓ^∞ und $T(\ell^\infty)$ beliebig nahe an die 1 heranbekommt. Man wählt dafür am Anfang des Beweises o.B.d.A. $d(x_n, y_n) \leq \frac{\delta}{4} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ und setzt für $0 < \lambda < 1$ dann $r_n = \lambda d(x_n, y_n)$. Damit gelten nach wie vor die wichtigen Tatsachen $d(B_m, B_n) \geq \frac{\delta}{2}$ für $m \neq n$ und $d(y_n, \tilde{B}_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Im ersten Fall erhält man $\frac{|f_a(x) - f_a(y)|}{d(x, y)} \leq \lambda \|a\|_\infty$, insgesamt also $\|f_a\|_L \leq \beta \|a\|_\infty$. Für die Abschätzung von unten muß man die β_n so wählen, daß sogar $r_n^{\beta_n - \alpha} \geq \lambda$ und $d^{\beta_n - \alpha}(x_n, \tilde{B}_n) \geq \lambda$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Dann erhält man $L_\alpha(f_a) \geq \lambda^{1+\alpha} \|a\|_\infty$. Für die Projektion ergibt sich damit $\|P\| \leq \beta \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{1+\alpha}$. Da die Metrik d beliebig war, gelten die gerade gemachten Aussagen für alle $Lip(K)$ im diskreten Fall.

Dies darf allerdings nicht darüber hinweg täuschen, daß im nichtdiskreten Fall der gleiche Schluß mit der benutzen Beweistechnik nicht gezogen werden kann.

Man beachte, daß trotz (oder gerade wegen) der Benutzung von Ungleichung (2.3.5) unser Beweis der Einbettung $c_0 \hookrightarrow \text{lip}(K)$ am zweiten Fall scheitert. Dies entspricht der Beobachtung aus Kapitel 1 (siehe Bemerkung 1.1.14), daß $\text{lip}(K)$ eindimensional ist, wenn K zum Beispiel ein Intervall in \mathbb{R} ist. Der Beweis geht allerdings durch, wenn man den zweiten Fall ausschließen kann. Dies ist bei gewissen “verkrümelten” metrischen Räumen möglich, z.B. wenn im diskreten Fall für unsere Folgen (x_n) und (y_n) ein $\lambda \in (0, 1)$ unabhängig von n existiert, so daß mit $r_n = \lambda d(x_n, y_n)$ stets $B_n = \{x_n\}$ gilt. Wenn man in “stark verkrümelten” Fällen λ beliebig nahe bei 1 wählen darf, so kann man auch hier die Güte der Einbettung, sprich den Banach-Mazur-Abstand von c_0 und $T(c_0) \subseteq \text{lip}(K)$, sowie die Norm der Projektion beliebig nahe an die 1 bringen. In diesem Zusammenhang ist der Hinweis angebracht, daß wir im nächsten Abschnitt das Vergnügen haben werden, die Frage nach der isometrischen Isomorphie zwischen c_0 und $\text{lip}_0(K)$ genauer zu studieren. Unter natürlichen Voraussetzungen werden wir dabei zu ganz klassischen “verkrümelten Räumen” geführt, nämlich zu nirgends dichten Teilmengen der reellen Achse vom Lebesgue-Maß 0.

Der Beweis des nichtdiskreten Falls erfordert noch einige weitere technische Feinheiten, die uns aber, nachdem wir den diskreten Fall hinter uns gebracht haben, keine große Angst mehr einflößen müssen. Wir haben nämlich das Glück, daß sich die grundlegenden obigen Beweisgedanken auf den nichtdiskreten Fall übertragen lassen. Wie im diskreten Fall werden Kugeln $B_n \subseteq K$ definiert, die als Träger der Funktionen f_a dienen, welche für $a \in \ell^\infty$ genauso wie im obigen Beweis definiert werden. Auch die Projektion P kann völlig analog erklärt werden. Lediglich die Abschätzungen im Fall 1 brechen beide Male zusammen, da nur dort die Lage der Kugeln zueinander und damit die wichtige Eigenschaft (2.3.1), die im nichtdiskreten Fall natürlich nicht aufrechterhalten werden kann, eine Rolle spielt. Johnson löst dieses Problem, indem er die Folge der Kugeln so geschickt “auf den Häufungspunkt zu” konstruiert, daß diese nicht nur immer kleiner werden, was sie sowieso müssen, sondern darüber hinaus noch jeweils einen “relativen Sicherheitsabstand” voneinander haben. Es bezeichne $B(x, r)$ die abgeschlossene Kugel um x mit dem Radius r , das Innere von $B(x, r)$ sei mit $\text{int } B(x, r)$ bezeichnet.

Beweisskizze für den nichtdiskreten Fall. Der metrische Raum K besitze einen Häufungspunkt x_0 . Wähle $x_1 \in K$ mit $0 < d(x_1, x_0) \leq \frac{1}{2}$ und setze damit zunächst $r_1 = \frac{1}{2} d(x_0, x_1)$ und $B_1 = B(x_1, r_1)$ (wie im obigen Beweis) sowie $p_1 = d(x_0, B_1)$. Definiere bei gegebenem x_n induktiv x_{n+1} mit der Eigenschaft $0 < d(x_{n+1}, x_0) < \frac{1}{6} p_n$, wenn r_n, B_n und p_n wie für $n = 1$ definiert sind. Man verifiziert nun nacheinander für alle $n \in \mathbb{N}$ die Tatsachen

$$r_n \leq p_n, \quad p_{n+1} < \frac{1}{6} p_n, \quad B_{n+1} \subseteq \text{int } B(x_0, \frac{1}{2} p_n)$$

und

$$d(B_m, B_n) \geq \frac{1}{2} p_n \quad \text{für } m > n \tag{2.3.6}$$

sowie

$$d(x, \tilde{B}_n) \leq 3p_n \quad \text{für alle } x \in K. \quad (2.3.7)$$

Mit den letzten beiden Ungleichungen erhält man schließlich leicht die entscheidende Abschätzung (endlich einmal mit einer schönen oberen Schranke!)

$$\frac{d(x, \tilde{B}_m) + d(y, \tilde{B}_n)}{d(B_m, B_n)} < 7 \quad \text{für } x \in B_m, y \in B_n \text{ und } m \neq n. \quad (2.3.8)$$

Wieder ergibt sich nach Konstruktion $d(x, \tilde{B}_n) \leq 1$ für alle $x \in K$ (siehe (2.3.7)) und $n \in \mathbb{N}$, und man sieht, daß nur noch die beiden “ersten Fälle” abzuhandeln sind, wenn man sonst alle weiteren Definitionen aus dem obigen Beweis übernimmt.

Um die Beschränktheit von $\|T\|$ von oben zu zeigen, rechnen wir für $\|a\|_\infty \leq 1$, $x \in B_m$ und $y \in B_n$

$$\begin{aligned} \frac{|f_a(x) - f_a(y)|}{d^\alpha(x, y)} &\leq \frac{d^{\beta_m}(x, \tilde{B}_m) + d^{\beta_n}(y, \tilde{B}_n)}{d^\alpha(x, y)} \leq \frac{d^\alpha(x, \tilde{B}_m) + d^\alpha(y, \tilde{B}_n)}{d^\alpha(x, y)} \cdot \frac{2}{2} \\ &\leq 2 \left(\frac{d(x, \tilde{B}_m) + d(y, \tilde{B}_n)}{2d(B_m, B_n)} \right)^\alpha < 7, \end{aligned}$$

wobei die vorletzte Abschätzung aus der Konkavität der Funktion $t \mapsto t^\alpha$ folgt. Man beachte, daß hier der Fall $\alpha = 1$ auch abgedeckt ist.

Der erste Fall für den Nachweis von $T(c_0) \subseteq \text{lip}(K)$ ist gegenüber dem obigen Beweis nur durch das Einführen eines $\delta'' > 0$ zu ergänzen, für welches $m > N$ und $n > N$ aus $d(B_m, B_n) \leq \delta''$ im Falle $m \neq n$ folgen soll (ein solches δ'' existiert wegen (2.3.6)). Sei nun $d^\alpha(x, y) \leq (\min(\delta', \delta''))^\alpha$, dann folgt für $x \in B_m$ und $y \in B_n$ mit $m \neq n$ nach Wahl von δ'' die Tatsache $m, n \geq N$ und damit

$$\begin{aligned} \frac{|f_a(x) - f_a(y)|}{d^\alpha(x, y)} &\leq (|a_m| + |a_n|) \frac{d^{\beta_m}(x, \tilde{B}_m) + d^{\beta_n}(y, \tilde{B}_n)}{d^\alpha(x, y)} \\ &\leq \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \right) \cdot 7 = 7\varepsilon, \end{aligned}$$

wie gerade schon gesehen.

Jetzt bleibt nur noch festzuhalten: Alles weitere geht völlig analog. \square

Eine “fast-isometrische” Einbettung von ℓ^∞ in $\text{Lip}(K)$ läßt sich, wie schon angedeutet, im nichtdiskreten Fall mit dieser Beweistechnik nicht finden. Der Versuch, $r_n = \lambda d(x_n, x_0)$ für ein λ knapp unterhalb der 1 zu setzen, rächt sich spätestens in Abschätzung (2.3.8), wo sich dann eine weitaus schlechtere obere Schranke als 7 ergibt. Allerdings gibt es, und hier sei wieder auf Abschnitt 2.4 verwiesen, nichtdiskrete Fälle, in denen $\text{Lip}_0(K) \cong \ell^\infty$ gilt. Der hier konstruierte Unterraum $T(\ell^\infty)$ von $\text{Lip}(K)$ wird im allgemeinen nach der vorliegenden Konstruktion “sehr klein” ausfallen. Dasselbe gilt für $T(c_0)$. Was die Einbettbarkeit von c_0 in $\text{lip}(K)$ angeht, gelten qualitativ die gleichen Aussagen wie im diskreten Fall: Es geht, wenn die Punkte x_n “gleichmäßig isoliert” gewählt werden können.

Bemerkung 2.3.2. Man weiß natürlich von vornherein, daß es (für $0 < \alpha \leq 1$) eine Projektion von $Lip(K^\alpha)$ auf $T(\ell^\infty)$ gibt, da jede isomorphe Kopie von ℓ^∞ in einem Banachraum automatisch in diesem komplementiert ist. Letzteres ist gerade die Injektivität von ℓ^∞ (siehe 2.f.2. in [35]), denn dieser Raum ist sogar ein \mathcal{P}_1 -Raum, d.h. es existiert eine Projektion $P : X \rightarrow \ell^\infty$ mit $\|P\| = 1$, wenn ℓ^∞ Unterraum eines Banachraums X ist (siehe zum Beweis S. 2 in [34] sowie III.5.22 a) in [55]). Wir werden in Kapitel 3 (Satz 3.1.9) sehen, daß $lip(K^\alpha)$ separabel ist, wenn K (prä)kompakt ist. Johnson zeigt in [27] sogar die Umkehrung. Im Falle der Separabilität von $lip(K^\alpha)$ ist die Existenz einer Projektion von $lip(K^\alpha)$ auf $T(c_0)$ auch schon im vorhinein gesichert, denn nach einem Satz von Sobczyk (siehe 2.f.5. in [35]) gibt es eine Projektion $P : X \rightarrow c_0$ mit $\|P\| \leq 2$, wenn c_0 Unterraum eines separablen Banachraums X ist (vergleiche dazu III.5.22 b) in [55]). Das Theorem von Johnson gilt indes für beliebige metrische Räume.

Unter den Voraussetzungen des Theorems erhalten wir zwei Korollare, wovon eines eine Aussage über die Lage von $lip(K^\alpha)$ in $Lip(K^\alpha)$ macht und das andere angesichts von Satz 1.1.22 einen Unterschied zwischen $lip(K^\alpha)$ und $Lip(K^\alpha)$ aufzeigt.

Korollar 2.3.3. *Sei $0 < \alpha < 1$ und K wie in Theorem 2.3.1. Dann ist $lip(K^\alpha)$ nicht isomorph zu einem Dualraum.*

Beweis. Nach Lindenstrauss [34, S. 16] ist ein Banachraum X komplementiert in seinem Bidual, wenn er komplementiert in einem Dualraum Y' ist (wobei die Umkehrung auch gilt). Dies liegt daran, daß die Adjungierte $(i_Y)'$ der natürlichen Einbettung $i_Y : Y \rightarrow Y''$ eine (sogar normerhaltende) Projektion von Y''' auf Y' liefert, letztlich also auch eine Projektion von X'' auf X (vergleiche den detaillierten Beweis von 3.2.23 in [40]). Im Falle $X = c_0$ und $Y' \simeq lip(K^\alpha)$ wäre also c_0 komplementiert in $c_0'' \cong \ell^\infty$ — ein Widerspruch. \square

Korollar 2.3.4. *Sei $0 < \alpha < 1$ und K wie in Theorem 2.3.1. Dann ist $lip(K^\alpha)$ nicht komplementiert in $Lip(K^\alpha)$.*

Beweis. Angenommen, es gäbe eine Projektion $\tilde{P} : Lip(K^\alpha) \rightarrow lip(K^\alpha)$, so wäre mit der Projektion $P : Lip(K^\alpha) \rightarrow T(\ell^\infty)$ aus dem Beweis des Theorems die Einschränkung von $\tilde{P}P : Lip(K^\alpha) \rightarrow T(c_0) \subseteq lip(K^\alpha)$ auf $T(\ell^\infty)$ eine Projektion von $T(\ell^\infty)$ auf $T(c_0)$ — Widerspruch. \square

Wir notieren noch eine wesentliche Verallgemeinerung von Satz 1.2.1 (siehe auch Bemerkung 1.2.2).

Korollar 2.3.5. *$Lip(K)$ enthält eine isomorphe Kopie von ℓ^∞ und ist daher inseparabel, es sei denn der metrische Raum K ist endlich und damit $Lip(K)$ endlichdimensional.*

Bemerkung 2.3.6. Wie bereits zu Beginn dieses Abschnitts angedeutet wurde, gibt es bis heute noch einige offene Fragen hinsichtlich der Klassifikation

von Lipschitzräumen in Isomorphietypen. Eine der wichtigsten lautet sicher: Ist für kompakte metrische Räume K und $0 < \alpha < 1$ stets $\text{lip}(K^\alpha) \simeq c_0$ und $\text{Lip}(K^\alpha) \simeq \ell^\infty$? Um dies zu zeigen, reicht es, die Isomorphie für den kleinen Hölderraum nachzuweisen, denn wir dürfen uns jetzt schon auf die bemerkenswerte Aussage $\text{lip}(K^\alpha)'' \cong \text{Lip}(K^\alpha)$ (für kompakte K) freuen, die wir in Kapitel 3 ausführlich diskutieren werden. Man weiß allerdings noch nicht einmal, ob $\text{lip}(K^\alpha)$ eine Schauderbasis besitzt. Für nichtkompaktes K ist dies, und auch $\text{lip}(K^\alpha) \simeq c_0$, nie richtig, denn in diesem Fall ist $\text{lip}(K^\alpha)$, wie oben (siehe Korollar 2.3.4) schon bemerkt und in Satz 3.1.9 notiert, noch nicht einmal separabel. Könnte man die Injektivität von $\text{Lip}(K^\alpha)$ zeigen, so hätte man gemäß Johnson [27] auch die Isomorphie $\text{Lip}(K^\alpha) \simeq \ell^\infty$.

Für den Fall $\alpha = 1$ können wir bisher lediglich $\text{Lip}([0, 1]) \simeq \ell^\infty$ nach Pełczyński (siehe Bemerkung 2.1.4) als “positives” Ergebnis festhalten. Dieses gilt allerdings (mit dem Vorgehen wie in Satz 1.2.3) für jedes kompakte Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ und nach einer Beobachtung von Johnson damit auch für jedes nichtendliche Kompaktum $K \subseteq \mathbb{R}$. Ist dieses nämlich in einem kompakten Intervall I enthalten, kann man jedes f linear und normgleich in jeder Komponente von $I \setminus K$ zu einem Element $j(f) \in \text{Lip}(I)$ fortsetzen (siehe auch Satz 1.1.20). j ist damit ein Isomorphismus von $\text{Lip}(K)$ auf $j(\text{Lip}(K)) \subseteq \text{Lip}(I) \cong \ell^\infty$ und $j \circ i$ (wenn $i : \text{Lip}(I) \rightarrow \text{Lip}(K)$ die Restriktionsabbildung ist) eine (normerhaltende) Projektion von $\text{Lip}(I)$ auf $j(\text{Lip}(K))$. Es ist somit $\text{Lip}(K)$ (isometrisch) isomorph zu einem komplementierten Unterraum von ℓ^∞ . Hieraus folgt aber sofort $\text{Lip}(K) \simeq \ell^\infty$, denn ℓ^∞ ist prim (nach Theorem 2.a.7. in [35], für dessen Beweis einmal mehr die Dekompositionsmethode von Pełczyński zur Anwendung kommt). Dieser Beweisgedanke ist uns natürlich aus Abschnitt 2.2 (vergleiche mit dem Beweis des Satzes 2.2.11 und dem mißglückten Versuch in Bemerkung 2.2.12 — hier ist j linear!) bereits bestens vertraut.

Leider ist der Versuch, dieses Ergebnis auch nur “eine Dimension höher zu heben”, zum Scheitern verurteilt, denn der Fall $\alpha = 1$ ist auch für die großen Lipschitzräume (und nicht nur, wie schon in Bemerkung 1.1.14 gesehen, für die kleinen) ein besonderer. So findet man zum Beispiel in einem Artikel von E. Mayer-Wolf [38] aus dem Jahre 1981 die Bemerkung, Y. Benyamini (sein Doktorvater) und P. Wojtaszczyk hätten beobachtet, daß aus einer Arbeit von S. V. Kislyakov [30] die Tatsache $\text{Lip}(I^2) \not\simeq \ell^\infty$ folgt, wenn I^2 das Einheitsquadrat im euklidischen \mathbb{R}^2 ist. Ein etwas greifbareres, aber “unendlichdimensionales”, Beispiel findet sich wieder bei Johnson in [28], der für den bekannten (kompakten) Hilbertwürfel K in ℓ^2 (mit der von dort geerbten Metrik) die Nicht-Injektivität von $\text{Lip}(K)$ zeigt. In der gleichen Arbeit wird sogar ein Lipschitzraum $\text{Lip}(K)$, der die Approximationseigenschaft nicht besitzt, angegeben. Leider ist K zu diesem Zweck recht unhandlich, wiewohl für den Beweisgedanken nach Lindenstrauß “kanonisch” einfach als die Einheitskugel des berühmt-berüchtigten von Per Enflo gefundenen Raums ohne Approximationseigenschaft gewählt. Für kompakte K kennt man bislang keinen großen Lipschitzraum ohne die Approximationseigenschaft. Insgesamt scheinen die obigen Beispiele und die bisher zusammengestellten Ergebnisse nahezulegen, daß die

Klasse der Lipschitzräume eine relativ große ist, wohingegen die Hölderräume offenbar leichter zu handhaben sind.

2.4 Isometrische Darstellung von Lipschitzräumen

Im Unterschied zu den bisherigen Ergebnissen soll nun die Frage untersucht werden, wann gewisse Lipschitzräume *isometrisch isomorph* zu den Folgenräumen ℓ^∞ bzw. c_0 sind. Die einzige Quelle hierzu scheint die Arbeit von Daniel E. Wulbert [60] aus dem Jahre 1972 zu sein. Dieser betrachtet reellwertige Funktionen auf einem kompakten metrischen Raum (K, d) , die dort eine Lipschitzbedingung bezüglich d^α erfüllen, wobei er allgemein $\alpha > 0$ zuläßt. Inwieweit dies sinnvoll ist, wenn d^α keine Metrik mehr ist, soll hier nicht weiter diskutiert werden, jedenfalls liegen in einem solchen Fall keine Lipschitzfunktionen in der üblichen Definition (siehe Abschnitt 1.1) mehr vor und in gewissen Fällen (vergleiche Bemerkung 1.1.14) überhaupt keine kleinen Lipschitzfunktionen mehr. Natürlich ist für jedes $\alpha > 1$ mit der Höldermetrik $d' = d^{\frac{1}{\alpha}}$ auch $(d')^\alpha$ wieder eine Metrik, und man kann sich bei einer gegebenen Metrik d fragen, ab welchem $\alpha \geq 1$ kleine Lipschitzfunktionen bezüglich d^α schließlich konstant sein müssen. Zu solchen Fragestellungen sei auf die Artikel von J. D. Stein [46] und A. G. O'Farrell [11] verwiesen (Letzterer hat in Kapitel 1 schon Eingang gefunden, siehe Satz 1.1.16).

Dennoch wollen wir die Sätze von Wulbert in der gleichen Allgemeinheit wiedergeben, in welcher er sie formuliert hat. Für die Hauptaussagen indes ist ohnehin $\alpha \leq 1$ vorausgesetzt. Wulbert betrachtet die mit der Lipschitznorm $L_\alpha(\cdot)$ halbnormierten Räume $Lip(K^\alpha)$ und $lip(K^\alpha)$, die analog wie in Kapitel 1 (vergleiche die Definitionen 1.1.1 und 1.1.18) definiert sind (auch wenn d^α keine Metrik mehr ist). Genauso wie in der Herleitung von Satz 1.1.6 wird dann der Unterraum N der konstanten Funktionen herausfaktoriert und

$$H(K^\alpha) = Lip(K^\alpha)/N \quad \text{sowie} \quad \Lambda(K^\alpha) = lip(K^\alpha)/N$$

definiert. Diese Räume sind auch für $\alpha > 1$ Banachräume, und es gilt Satz 1.1.6 gleichermaßen. Wir werden in der konkreten Beweisarbeit die Elemente von $H(K^\alpha)$ meist als Funktionen im pseudonormierten Raum $Lip(K^\alpha)$ (d.h. modulo Konstanten) auffassen. Diese können bei uns sowohl reell- als auch komplexwertig sein.

Um einen ersten Eindruck von Wulberts Leistung zu bekommen und damit auch die Motivation, seine Gedankengänge nachzuvollziehen, wollen wir an dieser Stelle gleich sein beeindruckendes Hauptergebnis vorstellen.

Theorem 2.4.1. *Für $0 < \alpha \leq 1$ und einen kompakten metrischen Raum K betrachte die folgenden drei Eigenschaften:*

- (i) $\Lambda(K^\alpha)$ ist isometrisch isomorph zu c_0 und trennt die Punkte von K .

- (ii) Es existiert ein isometrischer Isomorphismus von ℓ^∞ auf $H(K^\alpha)$, der c_0 auf $\Lambda(K^\alpha)$ abbildet, und $\Lambda(K^\alpha)$ trennt die Punkte von K .
- (iii) $\alpha = 1$ und K ist isometrisch zu einer nirgends dichten unendlichen Teilmenge der reellen Achse.

Dann gelten die Implikationen $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$ und darüberhinaus $(iii) \Rightarrow (i)$, wenn in (iii) zusätzlich K als Lebesgue-Nullmenge angenommen wird.

Dieses Theorem hat es in sich, und es sei schon an dieser Stelle darauf hingewiesen: Wir werden es nicht ganz verstehen. Die Implikation $(i) \Rightarrow (ii)$ wird in einem Punkt mysteriös bleiben. Die intensive Auseinandersetzung mit der Beweislücke, auf die wir an der geeigneten Stelle natürlich heftig eingehen werden (und zwar im Anschluß an den Beweis zu Satz 2.4.3), führte schließlich zu dem Bestreben, ein Gegenbeispiel zu finden. Im Zuge dessen tauchte jedoch statt eines Gegenbeispiels ein Fehler im Beweis eines anderen zu diesem Theorem gehörigen Satzes auf (woraufhin die Suche nach dem Gegenbeispiel aufgegeben wurde). Der Beweis dieses Satzes konnte korrigiert werden, was allerdings auch eine Korrektur der Aussage des Satzes nach sich zog (siehe die Bemerkungen 2.4.8 und 3.5.6). Deshalb kommt obiges Theorem nicht mehr, wie von Wulbert gewünscht, als die schöne Äquivalenzaussage $(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii)$ daher und bleibt nach wie vor in einem entscheidenden Beweisschritt unklar. Da ist es erst einmal beruhigend zu wissen, daß der Beweis dieses Theorems häppchenweise durchgeführt wird. Wir werden auf mehrere Zwischenergebnisse stoßen, von denen einige Allgemeineres liefern und zudem auch für sich genommen schon von Interesse sind, d.h. es lohnt sich auf alle Fälle weiterzulesen!

Besonders auffällig an dem Theorem ist sicher die Information, daß isometrische Isomorphismen zwischen den betrachteten Lipschitzräumen und den entsprechenden Folgenräumen "praktisch nie" vorliegen. Warum dies so ist, können wir erst nach einiger aufwendiger Vorbereitung einsehen. Weiter sticht die Zusatzvoraussetzung der Punktentrennung von $\Lambda(K^\alpha)$ ins Auge. Der Grund hierfür liegt in der Notwendigkeit, die Menge der Extrempunkte $\text{ext } B_{\Lambda(K^\alpha)'}$ der Einheitskugel von $\Lambda(K^\alpha)'$ genau zu kennen. (Dies ist, wenn es um isometrische Isomorphismen geht, "oft" der Fall. Zum Beispiel liefert ein isometrischer Isomorphismus $T : X \rightarrow Y$ mit seiner Adjungierten T' und $T'(\text{ext } B_{Y'}) = \text{ext } B_{X'}$ stets eine Bijektion zwischen den Extrempunkten der beteiligten Einheitskugeln in den Dualräumen; vergleiche hierzu Lemma 2.4.13.) Als zentral auf dem Weg dahin werden sich die im folgenden definierten Funktionale $\xi(x, y)$ auf $\Lambda(K^\alpha)$ und deren Fortsetzungen $\bar{\xi}(x, y)$ auf $H(K^\alpha)$ herausstellen.

Definition 2.4.2. Mit $x, y \in K$, $x \neq y$, ist das Funktional $\bar{\xi}(x, y) \in H(K^\alpha)'$ durch

$$\bar{\xi}(x, y)(f) = \frac{f(x) - f(y)}{d(x, y)^\alpha} \quad \forall f \in H(K^\alpha)$$

erklärt. Seine Einschränkung auf $\Lambda(K^\alpha)$ sei mit $\xi(x, y)$ bezeichnet. Die Funktionale $\bar{\xi}(x, y)$ seien in der Menge $\bar{E}' \subseteq H(K^\alpha)'$ und ihre Einschränkungen $\xi(x, y)$

in $E' \subseteq \Lambda(K^\alpha)'$ zusammengefaßt. Weiter setzen wir

$$E'_{\mathbb{K}} = \{\beta \xi(x, y) : \beta \in S_{\mathbb{K}}, \xi(x, y) \in E'\},$$

wobei $S_{\mathbb{K}}$ die Einheitskugel in $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} bezeichnet.

Mit der Voraussetzung der Punktentrennung ist keines der $\bar{\xi}(x, y)$ im Annihilator von $\Lambda(K^\alpha)$. Des weiteren erweist sich E' als reichhaltig genug, um für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ alle Extrempunkte der Einheitskugel $B_{\Lambda(K^\alpha)'}$ zu enthalten (es gilt sogar noch mehr, siehe Lemma 2.4.4). Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ benötigen wir hierfür $E'_{\mathbb{C}}$, wohingegen $E'_{\mathbb{R}} = E'$ wegen $-\xi(x, y) = \xi(y, x)$ gilt. Wir werden zudem im Beweis des nächsten Satzes 2.4.3 sehen, daß die Funktionale $\bar{\xi}(x, y)$ auf natürliche Weise Anlaß zu einem "Ersatz" für die Punktauswertungsfunktionale geben, die es ja auf $\Lambda(K^\alpha)$ bzw. $H(K^\alpha)$ nicht gibt, denn dort sind die Funktionen nur bis auf eine additive Konstante bestimmt. (Die Menge \bar{E}' beinhaltet also in gewissem Sinne die einfachsten Funktionale, die man sich auf $\Lambda(K^\alpha)$ oder $H(K^\alpha)$ vorstellen kann.)

Der nächste Satz liefert — mit dem schon angekündigten lückenhaften Beweis — insbesondere die Implikation (i) \Rightarrow (ii) im obigen Theorem. Wir werden jedoch sehen, daß er noch mehr bringt, und er ist von Wulbert in voller Allgemeinheit ohne Einschränkung an $\alpha > 0$ formuliert.

Satz 2.4.3. *Für einen kompakten metrischen Raum K und ein $\alpha > 0$ sei $\Lambda(K^\alpha)$ isomorph zu c_0 und trenne die Punkte von K . Dann gibt es einen isometrischen Isomorphismus von $H(K^\alpha)$ auf $\Lambda(K^\alpha)''$, der $\Lambda(K^\alpha)$ auf seine natürliche Einbettung in $\Lambda(K^\alpha)''$ abbildet.*

Wir fangen beim folgenden Lemma an, das zur "Entlastung" des Beweises diesem vorgeschaltet werden soll. Es betrifft die Reichhaltigkeit der oben definierten Mengen E' bzw. $\bar{E}'_{\mathbb{K}}$, und wir werden nachher sehen, daß zu seinem Beweis alleine die Kompaktheit von K ausreichen würde. Im folgenden sei $\text{co } A$ wie üblich die konvexe Hülle von A , die Norm in $\Lambda(K^\alpha)'$ sei mit $\|\cdot\|'$ und die Norm in $\Lambda(K^\alpha)''$ mit $\|\cdot\|''$ bezeichnet.

Lemma 2.4.4. *Unter den Voraussetzungen von Satz 2.4.3 gilt*

$$\text{ext } B_{\Lambda(K^\alpha)'} \subseteq E'_{\mathbb{K}}$$

und darüberhinaus

$$B_{\Lambda(K^\alpha)'} \subseteq \overline{\text{co } E'_{\mathbb{K}}}^{\|\cdot\|'}.$$

Der Beweis besteht aus einer Abfolge von Argumenten, die für Köpfer sicherlich zum Standardrüstzeug zählen und daher bisweilen gar nicht mehr eigens genannt werden.

Beweis. Zunächst beobachtet man, daß jede Funktion in $\Lambda(K^\alpha)$ ihre Norm an einem Punkt von $E' \subseteq \Lambda(K^\alpha)'$ annimmt. An dieser Stelle benutzt man

neben der *lip*-Bedingung die Kompaktheit von K . Versieht man E' mit der w^* -Topologie, schließt man damit, daß $\Lambda(K^\alpha)$ isometrisch isomorph zu einem Unterraum von $C_0(E')$ ist. Dies geschieht kanonisch (vergleiche den Beweis zu VIII.3.13 in [55]) mittels der Abbildung $j : f \mapsto j(f)$ mit $j(f)(\xi(x, y)) = \xi(x, y)(f)$, mit welcher $\|j(f)\|_\infty = \sup_{\xi(x, y) \in E'} |\xi(x, y)(f)| = L_\alpha(f)$ gilt.

Um nachzuweisen, daß $j(f)$ für alle $f \in \Lambda(K^\alpha)$ tatsächlich in $C_0(E')$ liegt, muß man zu jedem $\varepsilon > 0$ eine w^* -kompakte Teilmenge $E'_f \subseteq E'$ finden, mit der $|\xi(x, y)(f)| < \varepsilon$ für alle $\xi(x, y) \notin E'_f$ gilt. Sei also $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann finden wir ein $\delta > 0$, so daß $\frac{|f(x) - f(y)|}{d^\alpha(x, y)} < \varepsilon$ aus $d^\alpha(x, y) < \delta$ folgt, und betrachten die Menge

$$E'_f = \{\xi(x, y) : d(x, y) \geq \delta^{\frac{1}{\alpha}}\},$$

mit welcher dann $|\xi(x, y)(f)| < \varepsilon$ für $\xi(x, y) \notin E'_f$ gilt. Daß E'_f tatsächlich w^* -kompakt ist, sieht man durch Betrachtung der auf $\tilde{K} = K^2 \setminus \text{diag}(K^2)$ offensichtlich stetigen Abbildung $(x, y) \mapsto \frac{f(x) - f(y)}{d^\alpha(x, y)}$ ein. Diese liefert die w^* -Stetigkeit der durch $(x, y) \mapsto \xi(x, y)$ definierten Abbildung $\Xi : \tilde{K} \rightarrow \Lambda(K^\alpha)'$. Aus der Kompaktheit von $\{(x, y) : d(x, y) \geq \delta^{\frac{1}{\alpha}}\}$ folgt nun die w^* -Kompaktheit von $E'_f = \Xi(\{(x, y) : d(x, y) \geq \delta^{\frac{1}{\alpha}}\})$.

Mit dem Ergebnis, daß $\Lambda(K^\alpha)$ isometrisch in $C_0(E')$ einbettet, kann man nun

$$\text{ext } B_{\Lambda(K^\alpha)'} \subseteq E'_{\mathbb{K}} \quad (2.4.1)$$

schließen. Auch dies ist Standard. Zunächst kann man mit der obigen Abbildung Ξ leicht einsehen, daß E' lokalkompakt ist, denn ist mit gewissen $f_i \in \Lambda(K^\alpha)$, $i = 1, \dots, n$, und einem $\varepsilon > 0$ eine w^* -Umgebung

$$U(\xi(x, y)) = \{\xi(\tilde{x}, \tilde{y}) : |\xi(x, y)(f_i) - \xi(\tilde{x}, \tilde{y})(f_i)| \leq \varepsilon \ \forall f_i, i = 1, \dots, n\}$$

eines Punktes $\xi(x, y) \in E'$ gegeben, so findet man ein $\delta > 0$, so daß mit der kompakten Umgebung (δ sei hierfür klein genug gewählt)

$$V(x, y) = \{(\tilde{x}, \tilde{y}) : (d(x, \tilde{x}) \leq \delta \wedge d(y, \tilde{y}) \leq \delta) \Rightarrow |\xi(x, y)(f_i) - \xi(\tilde{x}, \tilde{y})(f_i)| \leq \varepsilon \ \forall f_i, i = 1, \dots, n\}$$

von $(x, y) \in \tilde{K}$ die Relation $\Xi(V(x, y)) \subseteq U(\xi(x, y))$ gilt. Jetzt kann man den Rieszschen Darstellungssatz (II.2.5 und S. 89 in [55]) auf $C_0(E')$ anwenden und erhält (siehe Beispiel (f) auf S. 350 in [55])

$$\text{ext } B_{C_0(E')'} = \{\beta \delta_{\xi(x, y)} : |\beta| = 1\},$$

wobei für jedes $j(f) \in C_0(E')$ mit einem $f \in \Lambda(K^\alpha)$ die Gleichheit

$$\beta \delta_{\xi(x, y)}(j(f)) = \beta j(f)(\xi(x, y)) = \beta \xi(x, y)(f)$$

folgt. Da ein Element von $\text{ext } B_{j(\Lambda(K^\alpha)')}$ stets die Einschränkung eines Elements von $\text{ext } B_{C_0(E')}$ auf $j(\Lambda(K^\alpha))$ ist (dies ist eine Anwendung von Hahn-Banach und Krein-Milman, siehe VIII.6.28 in [55]), erhalten wir damit schließlich die Relation (2.4.1).

Weil $\Lambda(K^\alpha)' \simeq c_0' \cong \ell^1$ ein separabler Dualraum ist, folgt mit (2.4.1) jetzt aus dem Satz von Bessaga-Pełczyński (siehe 23.C. in [20]), daß sich jedes Funktional in der Einheitskugel von $\Lambda(K^\alpha)'$ im Norm-Abschluß der konvexen Hülle von $E'_{\mathbb{K}}$ befindet. \square

Man sieht schnell, daß zum Beweis des Lemmas nur die Kompaktheit von K und die Separabilität des Dualraums $\Lambda(K^\alpha)'$ benötigt wurde. Anwenden werden wir dieses Lemma im Beweis von Satz 2.4.3 und zum Nachweis der Implikation (ii) \Rightarrow (iii) des Theorems 2.4.1, und dort ist die Isomorphie von $\Lambda(K^\alpha)$ zu c_0 vorausgesetzt, also auch die Separabilität von $\Lambda(K^\alpha)'$. Interessanterweise ist es aber gar nicht nötig, diese Zusatzvoraussetzung an $\Lambda(K^\alpha)'$ zu stellen, da sie bereits von alleine erfüllt ist. Wir werden nämlich in Abschnitt 3.1 zeigen (und die Überlegungen dort gehen für beliebiges $\alpha > 0$ durch), daß schon aus der Kompaktheit von K die Separabilität von $\text{lip}(K)'$ folgt (siehe Satz 3.1.9). Mit Satz 1.1.6 erhalten wir damit auch die Separabilität von $\Lambda(K^\alpha)'$.

Es wurde oben bereits angedeutet, daß man mit den $\xi(x, y)$ die Punktauswertungsfunctionale, die es ja auf $\Lambda(K^\alpha)$ gar nicht gibt, simulieren kann. Statt einer Punktauswertung wird man mit einer Verankerung in einem Punkt $x_0 \in K$ das "Differenzenfunktional" $f \mapsto f(x) - f(x_0)$ an der Stelle x betrachten. Genau dies wird im folgenden getan, und dabei tritt eine Abbildung I in Erscheinung, die wir in völlig analoger Form und mit den entsprechenden Eigenschaften bereits in Bemerkung 1.1.23 kennengelernt haben (deshalb benutzen wir hier die gleichen Bezeichnungen) und mit der man aus Elementen von $\Lambda(K^\alpha)''$ Funktionen auf K machen kann. Die Beziehung von I mit den Funktionalen $\xi(x, y)$ bzw. $\bar{\xi}(x, y)$ in (2.4.2) zeigt nun, wo man mit diesen Funktionen landet.

Beweis von Satz 2.4.3. Mit einem beliebigen Punkt $x_0 \in K$ definiere die Abbildung

$$I : \Lambda(K^\alpha)'' \rightarrow H(K^\alpha)$$

$$I(F)(x) = d^\alpha(x, x_0)F(\xi(x, x_0)).$$

Ist $F = i_{\Lambda(K^\alpha)}(f)$ für eine Funktion $f \in \Lambda(K^\alpha)$, so gilt offensichtlich $I(F)(x) = d^\alpha(x, x_0)\xi(x, x_0)(f) = f(x) - f(x_0)$, d.h. modulo Konstanten $I(F) = f$. Dies liefert später die Aussage des Satzes über die natürliche Einbettung. Wendet man $F \in \Lambda(K^\alpha)''$ auf die offensichtliche Gleichung

$$d^\alpha(x, x_0)\xi(x, x_0) - d^\alpha(y, x_0)\xi(y, x_0) - d^\alpha(x, y)\xi(x, y) = 0$$

an, so ergibt sich

$$\bar{\xi}(x, y)(I(F)) = F(\xi(x, y)) \quad \forall \xi(x, y) \in E'. \quad (2.4.2)$$

Wegen $\|\xi(x, y)\|' \leq 1$ folgt damit $I(F) \in H(K^\alpha)$ und $L_\alpha(I(F)) \leq \|F\|''$. Hier gilt aber sogar Gleichheit, d.h. I ist isometrisch.

Gezeigt wird hierfür, daß die Informationen durch die $\xi(x, y)$ schon ausreichen, um die Norm $\|F\|''$ zu bestimmen, und an dieser Stelle fließt das obige Lemma

ein. Dieses liefert nämlich mit (2.4.2) die Normgleichheit

$$\|F\|'' = \sup_{\xi \in \overline{c_0} E'_\mathbb{K}} |F(\xi)| = \sup_{\xi \in E'_\mathbb{K}} |F(\xi)| = \sup_{\xi \in E'} |F(\xi)| = \sup_{\bar{\xi} \in \bar{E}'} |\bar{\xi}(I(F))| = L_\alpha(I(F)).$$

Zum Beweis der Surjektivität von I wird eine Inverse angegeben:

Hierfür benutzt man nun, daß es einen Isomorphismus $T : \Lambda(K^\alpha) \rightarrow c_0$ gibt, und wendet einmal mehr das obige Lemma 2.4.4 an, diesmal konkret auf das auf 1 normierte Element $\frac{e_i \circ T}{\|e_i \circ T\|'} \in S_{\Lambda(K^\alpha)'}$, wobei mit e_i das Funktional auf c_0 , welches die i -te Koordinate auswertet, bezeichnet sei. Man findet also Elemente $\beta_{p,q}^i \xi_{p,q}^i \in E'_{\mathbb{K}}$ und $\lambda_{p,q}^i > 0$ mit $\sum_{p=1}^{n_{i,q}} \lambda_{p,q}^i = 1$, so daß in der Norm-Topologie von $\Lambda(K^\alpha)'$

$$\lim_q \sum_{p=1}^{n_{i,q}} \beta_{p,q}^i \lambda_{p,q}^i \xi_{p,q}^i = \frac{e_i \circ T}{\|e_i \circ T\|'} \quad (2.4.3)$$

gilt. Sind zu den Funktionalen $\xi_{p,q}^i$ die Punkte $x_{p,q}^i$ und $y_{p,q}^i$ in K assoziiert und betrachtet man deren Fortsetzungen $\bar{\xi}_{p,q}^i \in H(K^\alpha)'$, so hat man für jedes $f \in H(K^\alpha)$ die Abschätzung

$$\left| \sum_{p=1}^{n_{i,q}} \beta_{p,q}^i \lambda_{p,q}^i \frac{f(x_{p,q}^i) - f(y_{p,q}^i)}{d^\alpha(x_{p,q}^i, y_{p,q}^i)} \right| \leq L_\alpha(f),$$

d.h. für jedes $i \in \mathbb{N}$ ist das Netz der Funktionale

$$\varphi_{i,q} = \sum_{p=1}^{n_{i,q}} \beta_{p,q}^i \lambda_{p,q}^i \bar{\xi}_{p,q}^i \quad (2.4.4)$$

in der w^* -kompakten Einheitskugel $B_{H(K^\alpha)'}$, so daß ein Teilnetz $(\varphi_{i,q'})$ davon (dieses muß ja, obwohl $(\varphi_{i,q})_{q \in \mathbb{N}}$ "nur" eine Folge ist, keine Teilfolge sein, siehe S. 438 f in [55]) im w^* -Sinne gegen ein Funktional $b_i \in B_{H(K^\alpha)'}$ konvergiert. Nun ist für jedes $f \in H(K^\alpha)$ die Folge $(b_i(f)) \in \ell^\infty$ mit $\|(b_i(f))\|_\infty \leq L_\alpha(f)$ wegen $b_i \in B_{H(K^\alpha)'}$ $\forall i \in \mathbb{N}$. Mit dem (adjungierten) Isomorphismus

$$T'' : \Lambda(K^\alpha)'' \rightarrow \ell^\infty \cong c_0''$$

existiert zu jedem $f \in H(K^\alpha)$ damit ein eindeutig bestimmtes Element $J(f) \in \Lambda(K^\alpha)''$ mit $T''(J(f)) = (b_j(f) \|e_j \circ T\|')_{j \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$ (wegen $\|e_j \circ T\|' \leq \|T\|$). Wir haben also eine Abbildung

$$J : H(K^\alpha) \rightarrow \Lambda(K^\alpha)''$$

vorliegen, für welche man bei Anwendung von $T''(J(f))$ auf ein Koordinatenauswertungsfunktional $e_i \in c_0' \cong \ell^1$ auf die folgende Gleichung stößt:

$$J(f)(e_i \circ T) = J(f)(T' e_i) = T''(J(f))(e_i) = (b_j(f) \|e_j \circ T\|') (e_i) = b_i(f) \|e_i \circ T\|'.$$

Nun ist ein Funktional auf ℓ^1 durch seine Werte auf den e_i für alle $i \in \mathbb{N}$ eindeutig bestimmt, so daß damit auch J durch

$$J(f) \left(\frac{e_i \circ T}{\|e_i \circ T\|'} \right) = b_i(f) \quad \forall i \in \mathbb{N} \quad (2.4.5)$$

für jedes $f \in H(K^\alpha)$ eindeutig bestimmt ist.

Jetzt beweisen wir $J \circ I = Id$ auf $\Lambda(K^\alpha)''$, und nach dem gerade Gezeigten reicht hierfür der Nachweis, daß für jedes $i \in \mathbb{N}$ die Aussage

$$F \left(\frac{e_i \circ T}{\|e_i \circ T\|} \right) = b_i(I(F)) \quad \forall F \in \Lambda(K^\alpha)''$$

richtig ist. Da für alle $i \in \mathbb{N}$ aber $b_i = w^*$ - $\lim_{q'} \varphi_{i,q'}$ gilt, folgt für alle $I(F) \in H(K^\alpha)$ in \mathbb{K} die Gleichheit

$$b_i(I(F)) = \lim_{q'} \sum_{p=1}^{n_{i,q'}} \lambda_{p,q'}^i \beta_{p,q'}^i \bar{\xi}_{p,q'}^i(I(F)).$$

Wegen (2.4.2), der Linearität und der Stetigkeit von $F : \Lambda(K^\alpha)' \rightarrow \mathbb{K}$ ist dies nach Satz B.2.3 in [55] (“Netzstetigkeit”) gleich

$$F \left(\lim_{q'} \sum_{p=1}^{n_{i,q'}} \lambda_{p,q'}^i \beta_{p,q'}^i \bar{\xi}_{p,q'}^i \right),$$

und letzteres ist (der Grenzwert liegt jetzt in der Norm $\|\cdot\|'$ auf $\Lambda(K^\alpha)'$ vor) mit (2.4.3) wie gewünscht

$$F \left(\frac{e_i \circ T}{\|e_i \circ T\|'} \right).$$

□

An dieser Stelle endet der Beweis von Wulbert und jagt den Leser, der nicht genau hingesehen hat, ins Bockshorn. Gezeigt wurde nämlich mit $J \circ I = Id$ nicht die Surjektivität, sondern einmal mehr die Injektivität von I . Nun ist mit J als Linksinverser von I zwar der einzig mögliche Kandidat für die Inverse von I gefunden, der Beweis für die Injektivität von J steht aber noch aus. Aufgrund der Tatsache, daß J durch (2.4.5) für jedes $f \in H(K^\alpha)$ eindeutig bestimmt ist, weiß man, was noch zu zeigen ist, nämlich die Implikation

$$(b_i(f) = 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}) \implies f = 0. \quad (2.4.6)$$

Wulbert selbst ließ auf Nachfrage hierzu lediglich folgendes wissen: “It has been quite a long time since I thought about that topic, and I have forgotten the details of the arguments used there.” So darf also noch darüber spekuliert werden, ob er es nun wußte oder nicht. Bis zur Klärung dieser Frage jedoch bleibt man wohl oder übel auf eigene Untersuchungen angewiesen. Wegen $b_i|_{\Lambda(K^\alpha)} = \frac{e_i \circ T}{\|e_i \circ T\|'}$ ist die Implikation (2.4.6) jedenfalls für alle $f \in \Lambda(K^\alpha)$ richtig. Die Aufgabe besteht also darin, sie von $\Lambda(K^\alpha)$ nach $H(K^\alpha)$ “hochzuheben”, und hierfür wird es notwendig sein, im Raum $\Lambda(K^\alpha)$ genügend viele Elemente zu haben, die “aussagekräftig” genug sind, um (2.4.6) auch für alle großen Lipschitzfunktionen auf K^α zu gewährleisten. Die Voraussetzung $\Lambda(K^\alpha) \simeq c_0$ alleine reicht dafür nicht, wie schon ein Blick auf den noch ausstehenden Satz 2.4.7 und dessen Beweis suggeriert: Hängt man an C noch ein Intervall $[b, c]$ und betrachtet

$\tilde{C} := C \cup [b, c]$, so entstehen dadurch “praktisch” keine neuen kleinen Lipschitzfunktionen ($\Lambda(C^\alpha) \cong \Lambda(\tilde{C}^\alpha)$!), wohl aber neue große Lipschitzfunktionen. In Kapitel 3 wird deutlich werden (siehe Theorem 3.5.3 und Bemerkung 3.5.6), daß hier die Punktentrennung von $\Lambda(K^\alpha)$ unbedingt einfließen muß. Diese sichert ja zumindest (mit Satz 1.1.3) nach dem Satz von Stone-Weierstraß, daß $\Lambda(K^\alpha)$ bezüglich der Supremumsnorm dicht im Raum der stetigen Funktionen $C(K)/N$ (faktoriert nach den konstanten Funktionen) und damit natürlich (bezüglich dieser Norm) auch dicht in $H(K^\alpha)$ liegt. Hierbei sei die Supremumsnorm auf natürliche Weise durch

$$\|f\|_\infty := \sup_{x,y \in K} |f(x) - f(y)| \quad \forall f \in C(K)/N$$

definiert, wodurch man sofort die Abschätzung

$$\|f\|_\infty \leq L_\alpha(f) \operatorname{diam}(K) \quad \forall f \in H(K^\alpha)$$

erhält.

Wir wollen nun, da uns zunächst nichts anderes übrig bleibt, den Beweis von Satz 2.4.3 am Beispiel des einfachen von Ciesielski (siehe Abschnitt 2.1: Satz 2.1.1 und Theorem 2.1.2) betrachteten Isomorphismus $T : \Lambda([0, 1]^\alpha) \cong H_\alpha^0 \rightarrow c_0$ durchgehen. Bezeichnen wir mit $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ die kanonische Einheitsvektorbasis im Folgenraum c_0 , so erhält man in der Menge $\{T^{-1}c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gerade die Schauderbasis $\{\varphi_n^{(\alpha)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ in H_α^0 , die ja auch eine Schauderbasis in $C_0([0, 1])$ bezüglich der Supremumsnorm ist. Man hat also

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) T^{-1}c_n \quad \forall f \in H([0, 1]^\alpha) \quad (2.4.7)$$

in der $\|\cdot\|_\infty$ -Norm mit gewissen $a_n(f)$, von deren gleichmäßiger Beschränktheit wir ja schon wissen. Wichtiger aber ist die Art ihrer Berechnung, gegeben in (2.1.3) (bzw. (2.1.2)) als einfache Konvexkombination von nur zwei $\bar{\xi}(u, v) \in H([0, 1]^\alpha)'$, nämlich als $\frac{1}{2}(\bar{\xi}(x_n, y_n) + \bar{\xi}(x_n, z_n))$ mit gewissen x_n, y_n und z_n (wobei $x_n = \frac{1}{2}(y_n + z_n)$ ist), angewandt auf f . Beachte nun, daß man aufgrund der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) T^{-1}c_n$ im Raum $\Lambda([0, 1]^\alpha)$ für jedes $i \in \mathbb{N}$ die einfache Gleichheit

$$e_i \circ T(f) = e_i \circ T \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) T^{-1}c_n \right) = a_i(f) \quad \forall f \in \Lambda([0, 1]^\alpha)$$

ermittelt. Im Hinblick auf (2.4.3) bzw. (2.4.4) und die gerade gemachte Beobachtung ist damit jedes $\varphi_{i,q}$ für festes $i \in \mathbb{N}$ konstant als die einfache Summe $\frac{1}{2}(\bar{\xi}(x_i, y_i) + \bar{\xi}(x_i, z_i))$ wählbar, womit dann auch b_i diese Gestalt hat — man beachte hierfür noch die Tatsache $e_i \circ T(\varphi_i^{(\alpha)}) = 1$ mit $L_\alpha(\varphi_i^{(\alpha)}) = 1 \quad \forall i \in \mathbb{N}$, also $\|e_i \circ T\|' = 1 \quad \forall i \in \mathbb{N}$, da hier $\|T\| = 1$ gilt. Damit sind aber die $b_i \quad \forall i \in \mathbb{N}$

sogar stetig bezüglich der Supremumsnorm, und man erhält mit (2.4.7) einfach

$$\begin{aligned} b_i(f) &= b_i \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) T^{-1} c_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) b_i(T^{-1} c_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) \frac{e_i \circ T}{\|e_i \circ T\|'} (T^{-1} c_n) = \frac{a_i(f)}{\|e_i \circ T\|'} = a_i(f), \end{aligned}$$

woraus mit (2.4.6) sofort die Injektivität von J folgt.

Wir bemerken noch, daß diese Überlegungen genauso für den in Abschnitt 2.2 besprochenen von Bonic, Frampton und Tromba definierten Isomorphismus im Fall von m -Simplexen $K \subseteq \mathbb{R}^m$ durchführbar sind. Da jedoch dieser Isomorphismus (siehe Bemerkung 2.2.2) vielleicht gar keiner ist, beruhigt es zu wissen, daß auch Weavers Ansatz (siehe Bemerkung 2.2.9) mit obiger Methode behandelbar ist, wenn dabei auch die $\varphi_{i,q}$ gemäß (2.2.4) Konvexkombinationen (gewisser Elemente in $\overline{E'}$) von größerem Kaliber sein können.

Hier sind wir mit unserer Weisheit, den Satz 2.4.3 mit Wulberts Ansatz “beweisimmanent” herzuleiten, schon am Ende. Es sei jedoch darauf hingewiesen, daß sich das gesamte Kapitel 3 ausschließlich um die Aussage dieses Satzes dreht, allerdings mit Vorgehensweisen, die sich von der hier behandelten stark unterscheiden — wiewohl natürlich die gleiche Abbildung I betrachtet wird. Im Vorgriff insbesondere auf Abschnitt 3.5 (siehe Theorem 3.5.3 und Bemerkung 3.5.6) sei an dieser Stelle die folgende Eigenschaft (S) eines kompakten metrischen Raums K (mit einem Basispunkt x_0) genannt:

Es gibt eine Konstante $c > 1$, so daß für jede endliche Menge $\{x_j\}_{j=1}^n \subseteq K$ und jede Funktion $h \in H(K^\alpha)$ eine Funktion $g \in \Lambda(K^\alpha)$ existiert mit

$$h(x_j) - h(x_0) = g(x_j) - g(x_0) \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

und $L_\alpha(g) \leq c \cdot L_\alpha(h)$.

Es ist klar, daß die Eigenschaft (S) insbesondere die Punktstrennung von $\Lambda(K^\alpha)$ nach sich zieht. Und in Kapitel 3 wird ausführlich begründet, daß diese Eigenschaft für die Aussage von Satz 2.4.3 genau die richtige ist, denn sie stellt sich als äquivalent zu jener heraus (vergleiche Theorem 3.5.3, insbesondere den Beweis von (v) \Rightarrow (iv), und Bemerkung 3.5.6). Für Hölderräume $\Lambda(K^\alpha)$, d.h. für $0 < \alpha < 1$, ist sie sogar von vornherein erfüllt (vergleiche Lemma 3.2.6 und Korollar 3.3.1).

Mit diesen Informationen stellt sich jetzt natürlich die Frage, ob denn tatsächlich aus den Voraussetzungen $\Lambda(K^\alpha) \simeq c_0$ und der Punktstrennung von $\Lambda(K^\alpha)$ auf die Eigenschaft (S) des metrischen Raumes geschlossen werden kann. Die Suche nach einem Gegenbeispiel in dieser Sache führte nicht zum Erfolg, dafür aber auf Bemerkung 2.4.8. Weiter verlangt es einen natürlich danach, mit der Eigenschaft (S) und Wulberts Beweisansatz direkt auf die Injektivität von J zu schließen, sprich (2.4.6) aus (S) herzuleiten. Alle der nicht wenigen Versuche, dies zu tun, sind gescheitert. So müssen diese Fragen hier leider offen bleiben.

Beruhigend ist jedenfalls bis zur (möglicherweise noch lange ausbleibenden) Klärung dieser Fragen, daß mit der sogenannten “gleichmäßigen Punktentrennung” (S) anstelle der gewöhnlichen Punktentrennung alle Behauptungen dieses Abschnitts richtig sind.

Mit einer anderen Lesart kann man das Ergebnis des Wulbertschen Beweises von Satz 2.4.3 auch so fassen: Im Zusammenhang mit der Konstruktion der Abbildung J wurde mittels

$$\begin{aligned} T'' \circ J &: H(K^\alpha) \rightarrow \ell^\infty \\ T''(J(f)) &= (b_i(f) \| e_i \circ T \|')_{i \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

die gegebene Abbildung $T : \Lambda(K^\alpha) \rightarrow c_0$ von $\Lambda(K^\alpha)$ auf $H(K^\alpha)$ fortgesetzt. Dies liegt daran, daß für alle $i \in \mathbb{N}$ das Funktional $b_i \in H(K^\alpha)'$ als eine Fortsetzung von $\frac{e_i \circ T}{\|e_i \circ T\|} \in \Lambda(K^\alpha)'$ gefunden wurde, so daß für $f \in \Lambda(K^\alpha)$ die Gleichheit

$$(b_i(f) \| e_i \circ T \|')_{i \in \mathbb{N}} = (e_i \circ T(f))_{i \in \mathbb{N}}$$

gilt, deren rechte Seite nur die ausführliche Schreibweise für $T(f)$ ist. Anders ausgedrückt liefert diese Gleichheit zusammen mit (2.4.5) die Tatsache $J|_{\Lambda(K^\alpha)} = i_{\Lambda(K^\alpha)}$, was wir natürlich schon seit der Definition der Abbildung I wissen, deren Inverse — zumindest auf $I(\Lambda(K^\alpha)'') \supseteq \Lambda(K^\alpha)$ — ja gerade J ist. Mit der Anwendung der Aussage

$$T'' \circ i_{\Lambda(K^\alpha)} = i_{c_0} \circ T$$

aus III.4.3 in [55] erhält man damit einen (zweiten) Beweis von

Korollar 2.4.5. *Ist*

$$T : \Lambda(K^\alpha) \rightarrow c_0$$

ein (isometrischer) Isomorphismus, dann folgt mit der obigen Isometrie

$$J : H(K^\alpha) \rightarrow \Lambda(K^\alpha)'',$$

daß

$$T'' \circ J : H(K^\alpha) \rightarrow \ell^\infty$$

ein (isometrischer) Isomorphismus ist, welcher T fortsetzt, also $\Lambda(K^\alpha)$ auf c_0 abbildet.

Nach allem, was passiert ist, haben wir dieses Korollar wohlweislich unter der Annahme formuliert, daß die Abbildung J tatsächlich injektiv ist. Wie in den obigen Ausführungen angedeutet und dort im Spezialfall auch bewiesen, ist dies aber immer gesichert, wenn Hölderräume vorliegen, und damit läßt sich Satz 2.4.3 auch unabhängig von der (nach wie vor wackeligen) Implikation (i) \Rightarrow (ii) des Theorems 2.4.1 auf folgende Weise mit Leben füllen.

Korollar 2.4.6. *Sei $0 < \alpha < 1$ und $K \subseteq \mathbb{R}^m$ kompakt. Dann gilt:*

- (i) $H(K^\alpha)$ ist auf natürliche Weise isometrisch isomorph zum zweiten Dual von $\Lambda(K^\alpha)$.
- (ii) Es gibt einen Isomorphismus von $H(K^\alpha)$ auf ℓ^∞ , der $\Lambda(K^\alpha)$ auf c_0 abbildet.

Da aufgrund des Theorems 2.2.1 von Bonic, Frampton und Tromba und mit Satz 1.1.6 die Voraussetzung des Satzes 2.4.3 (im Falle von Hölderräumen!) erfüllt ist, haben wir mit (i) zum ersten Mal den schon einige Male beschworenen Isomorphismus, der Inhalt des nächsten Kapitels sein wird, für gewisse Lipschitzräume konkret vorliegen. Auf natürliche Weise bedeutet natürlich: im Sinne von Satz 2.4.3. Mit dem zweiten Ergebnis (ii) (aus dem gerade formulierten Korollar 2.4.5) haben wir zusätzlich eine schöne Verallgemeinerung des Theorems 2.2.1 von Bonic, Frampton und Tromba bewiesen.

Als nächstes wird nun unter starken Voraussetzungen ein konkreter isometrischer Isomorphismus zwischen ℓ^∞ und einem $H(K^\alpha)$ konstruiert und damit die in Theorem 2.4.1 behauptete Implikation (iii) \Rightarrow (i) unter der Zusatzvoraussetzung, daß K eine Lebesgue-Nullmenge ist, gezeigt. Stellt man sich K als die Cantormenge \tilde{C} in $[0, 1]$ zusammen mit den offenen Intervallen (a_k, b_k) , $k \in \mathbb{N}$, vor, aus deren Vereinigung das Komplement $[0, 1] \setminus \tilde{C}$ besteht, so kann man jede Lipschitzfunktion f auf \tilde{C} durch die Kenntnis ihrer Steigungen zwischen a_k und b_k für alle $k \in \mathbb{N}$ (beginnend bei $f(0)$ durch "Hochhangeln" und Nutzen der Dichtheit der a_k und b_k in \tilde{C}) bis auf eine additive Konstante rekonstruieren. Andererseits kann man durch Vorgabe solcher Steigungen, die natürlich beschränkt sein müssen, eine Lipschitzfunktion konstruieren. Diese Idee liegt dem Beweis des folgenden Satzes zugrunde.

Satz 2.4.7. Sei $C \subseteq \mathbb{R}$ eine unendliche kompakte nirgends dichte Lebesgue-Nullmenge und $\alpha \geq 1$. Dann trennt $\Lambda(C^\alpha)$ die Punkte von C , und es existiert ein isometrischer Isomorphismus von ℓ^∞ auf $H(C^\alpha)$, der c_0 auf $\Lambda(C^\alpha)$ abbildet.

Beweis. Ist I das kleinste C umfassende Intervall, so kann man die Menge $\{I_k\}_{k=1}^\infty$ aller Zusammenhangskomponenten (nämlich offener Intervalle (a_k, b_k)) des Komplements $I \setminus C$ betrachten. Das sind unendlich viele, da C unendlich ist, und C besteht gerade aus dem Abschluß der Endpunkte all dieser Intervalle. Die Folge der I_k sei (der Einfachheit halber) so indiziert, daß ihre Intervalllängen mit steigendem Index höchstens kleiner werden. Nun definiert man die lineare Abbildung

$$T : \ell^\infty \rightarrow H(C^\alpha)$$

für $x \in C$ durch

$$(T(c_k))(x) = \sum_{x \geq b_k} c_k (b_k - a_k)^\alpha.$$

Mit $I = [a, b]$ gilt dann $T(c_k)(a) = 0$, d.h. mit a als Basispunkt hat man $T(c_k) \in Lip_0(C^\alpha) \cong H(C^\alpha)$. Die Wohldefiniertheit von T und $\|T\| \leq 1$ folgt, da wegen $\alpha \geq 1$ (also der Konvexität der Funktion $t \mapsto t^\alpha$) die "Dreiecksungleichung

umgekehrt" gilt. Für $x, y \in C, x < y$, erhält man

$$|(T(c_k))(x) - (T(c_k))(y)| \leq \sum_{I_k \subseteq [x, y]} |c_k| (b_k - a_k)^\alpha \leq \|c_k\|_\infty |x - y|^\alpha.$$

Andererseits sieht man die Inverse von T , indem man für alle $f \in H(C^\alpha)$

$$(T^{-1}(f))_k = \frac{f(b_k) - f(a_k)}{(b_k - a_k)^\alpha}$$

berechnet. Fast unbemerkt benutzt man hier die absolute Stetigkeit von $f \in H(C^\alpha) \subseteq H(C^1)$ (die für $\alpha < 1$ im allgemeinen nicht mehr gilt, siehe Bemerkung 4.2.19). Für $c_k = \frac{f(b_k) - f(a_k)}{(b_k - a_k)^\alpha} \forall k \in \mathbb{N}$ folgt nämlich nur $(T(c_k))(x) = \sum_{x \geq b_k} (f(b_k) - f(a_k))$, und gezeigt werden muß, daß diese Reihe den Grenzwert $f(x) - f(a) = f(x)$ hat (daß sich gewissermaßen $f(b_k)$ und $f(a_{k'})$ für "aufeinanderfolgende" b_k und $a_{k'}$ wie in einer Teleskopsumme "wegheben"). Wähle also zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so, daß aus

$$\sum_{j=1}^n |x_j - y_j| \leq \delta \quad \text{stets} \quad \sum_{j=1}^n |f(x_j) - f(y_j)| \leq \varepsilon$$

für beliebige $x_j, y_j \in C$ und $n \in \mathbb{N}$ folgt. Da $C \cap [a, x]$ eine (kompakte) Nullmenge ist, kann man nun in $[a, x]$ endlich viele (aufeinanderfolgende) Intervalle $\tilde{I}_{k'} = (\tilde{a}_{k'}, \tilde{b}_{k'}) \in \{I_k\}_{k=1}^\infty, k' = 1, \dots, n'$, finden mit $\sum_{k'=1}^{n'-1} (\tilde{a}_{k'+1} - \tilde{b}_{k'}) \leq \delta$. (Es ist $\bigcup_{b_k \leq x} I_k$ gerade das Komplement der Nullmenge $C \cap [a, x]$ in $[a, x]$!) Hieraus folgt also $\sum_{k'=1}^{n'-1} |f(\tilde{a}_{k'+1}) - f(\tilde{b}_{k'})| \leq \varepsilon$ und damit

$$\left| (f(x) - f(a)) - \sum_{k'=1}^{n'} (f(\tilde{b}_{k'}) - f(\tilde{a}_{k'})) \right| = \left| f(x) - f(\tilde{b}_{n'}) + \left(\sum_{k'=1}^{n'-1} f(\tilde{a}_{k'+1}) - f(\tilde{b}_{k'}) \right) + f(\tilde{a}_1) - f(a) \right| \leq 2\varepsilon,$$

wenn man $|x - \tilde{b}_{n'}|$ und $|\tilde{a}_1 - a|$ genügend klein wählt. Für alle Teilmengen $M \subseteq \{I_k\}_{b_k \leq x}$ mit $\tilde{I}_{k'} \in M \forall k' = 1, \dots, n'$ gelten dann die Abschätzungen erst recht, und man schließt $T(c_k) = f$.

Da in $H(C^\alpha)$ für $\alpha \geq 1$ "globale" Steigungen immer durch "lokale" Steigungen abgeschätzt werden können (siehe Bemerkung 4.2.19), gilt

$$L_\alpha(f) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{|f(b_k) - f(a_k)|}{(b_k - a_k)^\alpha} \quad \forall f \in H(C^\alpha).$$

Hiermit sieht man sofort, daß auch $\|T^{-1}\| \leq 1$ gilt und daher T ein isometrischer Isomorphismus ist.

Darüber hinaus gilt $T(c_0) = \Lambda(C^\alpha)$: Um " \supseteq " einzusehen, nehme man die Existenz eines $f \in \Lambda(C^\alpha)$ mit $T^{-1}(f) = (c_k) \notin c_0$ an. In diesem Fall gäbe es eine Teilfolge (c_{k_n}) mit $\inf |c_{k_n}| = \varepsilon > 0$, womit aber f nach Definition von T^{-1}

die *lip*-Bedingung nicht erfüllt. Für den Beweis von " \subseteq " betrachte ein Element (c_k) im Teilraum d aller Folgen in c_0 , in denen fast alle Einträge 0 sind. Dann ist $T(c_k)$ konstant in einer δ -Umgebung eines jeden Häufungspunktes von C und steigt nur zwischen endlich vielen a_k und b_k , folglich $T(c_k) \in \Lambda(C^\alpha)$. Da d dicht in c_0 liegt und T stetig ist, folgt nun auch " \subseteq ".

Schließlich liegt zwischen zwei Punkten in C immer ein I_k für ein $k \in \mathbb{N}$. Die Funktionen f_z auf C , definiert durch

$$f_z(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < z, \\ 1 & \text{für } x > z. \end{cases}$$

sind dann für alle $z \in I \setminus C$ (modulo Konstanten) in $\Lambda(C^\alpha)$ und trennen die Punkte von C . \square

Bemerkung 2.4.8. Satz 2.4.7 wurde von Wulbert ohne die Zusatzvoraussetzung, daß K eine Nullmenge ist, formuliert und auch mit einer Skizze des gerade durchgeführten Beweises begründet (natürlich unter Aussparung der Passage, in welcher $TT^{-1}(f) = f$ mit der absoluten Stetigkeit von f und der Nullmengen-Eigenschaft von C gezeigt wird; $T^{-1}T(c_k) = (c_k)$ ist ja klar). Der Beweis ist aber falsch ohne diese Voraussetzung, genauer gesagt ist die im Beweis angegebene Abbildung T im Falle $\alpha = 1$ (und alles andere ist ja nicht sehr interessant) tatsächlich genau dann ein Isomorphismus, wenn C eine Nullmenge ist. Man nehme als Beispiel einfach die $H(C^1)$ -Funktion $f : x \mapsto x$. Ist C keine Nullmenge, dann gilt (mit den Bezeichnungen des obigen Beweises) für das Komplement $\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ von C in $[a, b]$ offenbar

$$\mu \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(I_k) = \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) < b - a,$$

also $\sum_{x=b \geq b_k} (f(b_k) - f(a_k)) < f(b) - f(a)$, sprich

$$T \left(\left(\frac{f(b_k) - f(a_k)}{b_k - a_k} \right)_{k \in \mathbb{N}} \right) \neq f.$$

Man kann also eine $H(C^1)$ -Funktion über die Steigungen mittels T im allgemeinen nicht rekonstruieren. Schlimmer noch: Da obiges f auf jedem I_k die Steigung 1 hat, kommt nach Definition von T höchstens die konstante Folge $(1, 1, 1, \dots)$ als Urbild von f in Frage — und das kommt ja gerade nicht in Frage: T ist also nicht surjektiv.

Eine ganz andere Geschichte ist die Entstehung dieses Gegenbeispiels. Ursprünglich sollte nämlich daraus ein Gegenbeispiel zu Satz 2.4.3 und zur dort behaupteten Injektivität von J werden. Zu diesem Zweck sollte eine Menge C gefunden werden, auf der $\Lambda(C^\alpha)$ zwar die Punkte trennt (zum Beispiel wenn $C \subseteq \mathbb{R}$ nirgends dicht ist), dies aber "nicht besonders gut", wofür C wiederum eine gewisse "Größe", also zum Beispiel ein großes Maß, haben sollte, was bei nirgends dichten Mengen ja durchaus möglich ist (vergleiche S. 23 f, S. 35 und S. 200 in [3]). Was eine nicht besonders gute Punktentrennung sein soll, und wieso man im

Hinblick auf ein Gegenbeispiel zu Satz 2.4.3 überhaupt nach einer solchen Menge Ausschau hält, wurde oben bereits in der Diskussion seines Beweises und dessen Lücke mit der Eigenschaft (S) angedeutet. Begründet wird das Ganze in Kapitel 3, insbesondere in Bemerkung 3.5.6. Dort wird auch klar, wieso die Aussage von Satz 2.4.7 für nirgends dichte Mengen von positivem Maß *immer* falsch ist. Insbesondere fallen damit auch alle verfügbaren Kandidaten (außer den in Korollar 2.4.6 und Satz 2.4.7 gegebenen sind bisher keine bekannt) für ein Gegenbeispiel zu Satz 2.4.3 aus.

Jetzt wollen wir im Hinblick auf die Implikation (ii) \Rightarrow (iii) des Theorems 2.4.1 die Frage in Angriff nehmen, wie denn ein punkt-trennender (!) Raum $\Lambda(K^\alpha)$ für $0 < \alpha \leq 1$ aussehen muß, um überhaupt isometrisch isomorph zu c_0 sein zu können, d.h. umgekehrt, wie man einem solchen kleinen Lipschitzraum unter Umständen sofort ansehen kann, daß er nicht isometrisch isomorph zu c_0 ist. Dies unternimmt man nicht direkt, sondern über den schon gesehenen Zwischenschritt, denn nach Satz 2.4.3 ist eine notwendige Bedingung sicher, daß es einen isometrischen Isomorphismus T von ℓ^∞ auf $H(K^\alpha)$ gibt, der c_0 auf $\Lambda(K^\alpha)$ abbildet. Es wird sich herausstellen, daß auch dies nur möglich ist, wenn $\alpha = 1$ ist. Um letzteres einzusehen, braucht man allerdings zunächst Informationen darüber, was im Falle $\alpha = 1$ noch passieren kann — und das ist nicht viel! Demjenigen jedoch, der, mit einem Auge auf das Ergebnis schielend, vermutet, daß der Weg dahin steinig wird, muß (leider) recht gegeben werden. Wir werden daher dort, wo er uns durch allzu karges Terrain führt, einige Abkürzungen nehmen. Beginnen wollen wir damit gleich bei den beiden ersten technischen Schritten.

Im ersten Schritt konstruiert man sich ausgehend von der Metrik d des Raumes K eine Familie von Funktionen in der Einheitssphäre von $H(K^1)$, die ihre Norm in genau einem Punkt $(x, y) \in K \times K$ annehmen. Diese Funktionen benutzt man dann im zweiten Schritt zum Beweis eines Lemmas, dem die folgende Definition vorgeschaltet ist.

Definition 2.4.9. Für $0 \neq t \in B_{X'}$ mit $X \in \{\Lambda(K^1), H(K^1)\}$ sei durch

$$\text{face } t = \{h \neq 0 \text{ in } B_{X'} : \text{es gibt ein } k \in B_{X'} \text{ und ein } \lambda \in (0, 1], \text{ so daß } \lambda h + (1 - \lambda)k = t\}.$$

die von t erzeugte Seite in $B_{X'}$ definiert.

Diese Definition ist natürlich maßgeschneidert, um

$$\text{face } t = \{t\} \iff t \in \text{ext } B_{X'}$$

zu erhalten.

Wir werden für die weiteren Überlegungen ausgiebig mit den Elementen der in 2.4.2 definierten Menge $\overline{E}'_{\mathbb{K}}$ von Funktionalen $\beta\bar{\xi}(x, y)$ auf $H(K^\alpha)$ und deren Einschränkungen auf $\Lambda(K^\alpha)$ zu arbeiten haben. Es sei an dieser Stelle darauf

hingewiesen, daß Wulbert selbst in seinem Artikel nicht zwischen den Funktionalen $\xi(x, y) \in \Lambda(K^\alpha)'$ und $\bar{\xi}(x, y) \in H(K^\alpha)'$ unterscheidet. Dieses Vorgehen ist aber im Verlauf des Beweises von Satz 2.4.3 und auch im Zusammenhang mit den noch folgenden Gedankengängen mindestens verwirrend. Gerechtfertigt im Hinblick auf die Benutzung von Lemma 2.4.11 unten ist es aufgrund von

Lemma 2.4.10. *Unter der Voraussetzung der Punktentrennung von $\Lambda(K^\alpha)$ gilt*

$$\tilde{\beta}\bar{\xi}(u, v) \in \text{face } \beta\bar{\xi}(x, y) \iff \tilde{\beta}\xi(u, v) \in \text{face } \beta\xi(x, y).$$

Beweis. Mit der Punktentrennung von $\Lambda(K^\alpha)$ ist $\bar{\xi}(u, v)|_{\Lambda(K^\alpha)} = \xi(u, v) \neq 0$. \square

Nun lautet das oben bereits angekündigte

Lemma 2.4.11. *Für Funktionale aus $\bar{E}'_{\mathbb{K}}$ gelten die folgenden Implikationen.*

(i) *Wenn $\tilde{\beta}\bar{\xi}(u, v) \in \text{face } \beta\bar{\xi}(x, y)$ mit gewissen $\tilde{\beta}, \beta \in S_{\mathbb{K}}$ erfüllt ist, so gilt die Gleichung*

$$d(x, y) = d(x, u) + d(u, v) + d(v, y).$$

(ii) *Umgekehrt kann man für alle $\beta \in S_{\mathbb{K}}$ aus dieser Gleichung $\beta\bar{\xi}(u, v) \in \text{face } \beta\bar{\xi}(x, y)$ schließen.*

Die beiden Aussagen gelten analog für die Funktionale aus $E'_{\mathbb{K}}$.

Beweisgedanke. Für die erste Implikation beweist man die Kontraposition, d.h. man nimmt an, daß eine echte Dreiecksungleichung gilt, und zeigt unter Verwendung von speziellen im ersten Schritt konstruierten Funktionen in $H(K^\alpha)$, daß damit $\tilde{\beta}\bar{\xi}(u, v)$ nicht in $\text{face } \beta\bar{\xi}(x, y)$ sein kann.

Die zweite Implikation wird durch konkrete Angabe eines $k \in B_{H(K^1)'}$ und eines $\lambda \in (0, 1]$, welche sich aus der “Dreiecksungleichung” ergeben, gezeigt. Hierfür verifiziert man einfach die (noch mit β zu multiplizierende) Gleichung

$$\bar{\xi}(x, y) = \frac{d(x, u)}{d(x, y)}\bar{\xi}(x, u) + \frac{d(u, v)}{d(x, y)}\bar{\xi}(u, v) + \left(1 - \frac{d(x, u) + d(u, v)}{d(x, y)}\right)\bar{\xi}(v, y).$$

\square

Nun definiert man noch die “Linie” $L(x, y)$ zwischen zwei Punkten $x, y \in K$ und greift sich dann die (im Sinne dieser Definition “exponierten”) Elemente aus $E'_{\mathbb{K}}$ heraus, “zwischen denen sich (siehe nächstes Lemma) keine weiteren Elemente aus $E'_{\mathbb{K}}$ befinden”.

Definition 2.4.12. *Zu zwei verschiedenen Punkten $x, y \in K$ sei die Linie $L(x, y)$ durch*

$$L(x, y) = \{z \in K : d(x, z) + d(z, y) = d(x, y)\}$$

und damit auch die Mengen

$$\overline{E} = \{\beta\bar{\xi}(x, y) \in \overline{E}'_{\mathbb{K}} : L(x, y) = \{x, y\}\}$$

sowie

$$E = \{\beta\xi(x, y) \in E'_{\mathbb{K}} : L(x, y) = \{x, y\}\}$$

erklärt.

Wie schon angekündigt gehen wir bei den nun anstehenden Überlegungen und Lemmata stets von folgendem aus:

Annahme: Es sei $\Lambda(K^1)$ punktetrennend und es existiere ein isometrischer Isomorphismus $T : \ell^\infty \rightarrow H(K^1)$, dessen Einschränkung T_r gerade c_0 auf $\Lambda(K^1)$ abbildet.

Unter dieser Voraussetzung erhalten wir mit der soeben definierten Menge $E \subseteq \Lambda(K^1)'$ das bemerkenswerte

Lemma 2.4.13.

$$\text{ext } B_{\Lambda(K^1)'} = E.$$

Beweis. “ \subseteq ”: Lemma 2.4.4 liefert zunächst

$$\text{ext } B_{\Lambda(K^1)'} \subseteq E'_{\mathbb{K}},$$

und nun wird im Licht des obigen Lemmas 2.4.11 (Teil (ii)) klar, daß diese Teilmengenrelation sogar für E anstelle von $E'_{\mathbb{K}}$ gilt, da für $\beta\xi(x, y) \in E'_{\mathbb{K}} \setminus E$ ein $z \in L(x, y) \setminus \{x, y\}$ existiert, für das $d(x, z) + d(z, y) = d(x, y)$ und damit $\beta\xi(x, z) \in \text{face } \beta\xi(x, y)$ ist, so daß $\beta\xi(x, y) \notin \text{ext } B_{\Lambda(K^1)'}$ folgt.

“ \supseteq ”: Hierfür betrachtet man das Bild von $\beta\bar{\xi}(x, y) \in \overline{E} \subseteq H(K^1)'$ unter dem adjungierten isometrischen Isomorphismus

$$T' : H(K^1)' \rightarrow (\ell^\infty)'$$

und benutzt jetzt die Identifikation von ℓ^∞ mit dem Raum $C(\beta\mathbb{N})$ der stetigen Funktionen auf der Stone-Čech-Kompaktifizierung $\beta\mathbb{N}$ von \mathbb{N} , versehen mit der diskreten Metrik. (Siehe zu diesem Thema S. 113 f in [9] und S. 113 f in [20]; das ist kein Druckfehler!) $T'(\beta\bar{\xi}(x, y))$ kann dann mit dem Rieszschen Darstellungssatz (vgl. II.2.5 in [55]) als reguläres Borelmaß auf $\beta\mathbb{N}$ aufgefaßt werden. Man unterscheidet zwei Fälle:

1. $T'(\beta\bar{\xi}(x, y))$ hat einen Träger, der die homöomorphe Einbettung von \mathbb{N} in $\beta\mathbb{N}$, nämlich gerade die Menge $\alpha\mathbb{N}$ aller Koordinatenauswertungsfunktionale e_i auf ℓ^∞ für $i \in \mathbb{N}$ nichtleer schneidet. Damit setzt sich $T'(\beta\bar{\xi}(x, y))$ aber als Summe zweier Maße $\lambda(\alpha\delta_i)$ und $(1 - \lambda)\mu$ mit $0 < \lambda \leq 1$ und $|\alpha| = 1$ zusammen, wobei δ_i ein Punktmaß ist, welches auf ein Element von $C(\beta\mathbb{N})$ gerade wie e_i auf das entsprechende Element von ℓ^∞ wirkt, und letzteres ist die Fortsetzung des entsprechenden Auswertungsfunktional auf c_0 . (Man beachte, daß die Hahn-Banach-Fortsetzung eines Funktional von c_0 auf ℓ^∞ eindeutig ist, zum Beispiel

weil c_0 ein M -Ideal in ℓ^∞ ist; siehe Satz 4.1.2 und die Bemerkungen im Anschluß an Lemma 4.1.4). Nun ist bekannt (siehe Beispiel (f) auf S. 350 in [55]), daß $\alpha\delta_i \in \text{ext } B_{C(\beta\mathbb{N})}'$ ist, womit nach Anwendung des isometrischen Isomorphismus $(T')^{-1}$ (der die gerade gefundenen Verhältnisse von ℓ^∞ bzw. c_0 auf die Situation in $H(K^1)$ bzw. $\Lambda(K^1)$ übersetzt) die Gleichung

$$\beta\bar{\xi}(x, y) = \lambda(T')^{-1}(\alpha\delta_i) + (1 - \lambda)(T')^{-1}(\mu)$$

entsteht. Darin ist $(T')^{-1}(\alpha\delta_i) = \alpha\bar{t}$ mit einem Extrempunkt \bar{t} von $B_{H(K^1)'}$, der die Fortsetzung eines Extrempunktes von $B_{\Lambda(K^1)'}$, also gemäß Ergebnis “ \subseteq ” gleich einem $\tilde{\beta}\bar{\xi}(u, v) \in \bar{E}'$ ist. Es existiert also ein $\beta'\xi(u, v) \in \text{ext } B_{\Lambda(K^1)'}$, welches in face $\beta\xi(x, y)$ enthalten ist. Dies impliziert aber mit Lemma 2.4.11 (Teil (i)) wegen $L(x, y) = \{x, y\}$, daß $x = u$, $y = v$, $\beta' = \beta$ und $\beta\xi(x, y) = \beta'\xi(u, v) \in \text{ext } B_{\Lambda(K^1)'}$ ist.

2. Der Träger von $T'(\beta\bar{\xi}(x, y))$ ist enthalten in $\beta\mathbb{N} \setminus \alpha\mathbb{N}$. Die Einbettung von c_0 in $C(\beta\mathbb{N})$ ist aber gerade die Menge derjenigen stetigen Funktionen auf $\beta\mathbb{N}$, die auf $\beta\mathbb{N} \setminus \alpha\mathbb{N}$ verschwinden, so daß hieraus

$$T'(\beta\bar{\xi}(x, y))(c_k) = 0 \quad \forall (c_k) \in c_0$$

und damit

$$\beta\bar{\xi}(x, y)T(c_k) = 0 \quad \forall (c_k) \in c_0$$

folgt. Dies führt jedoch wegen $T(c_0) = \Lambda(K^1)$ auf

$$\beta\bar{\xi}(x, y)(f) = 0 \quad \forall f \in \Lambda(K^1),$$

d.h. auf die Aussage $\beta\bar{\xi}(x, y) \in \Lambda(K^1)^\perp$, die aber der Punktetrennung von $\Lambda(K^1)$ widerspricht. \square

Definition 2.4.14. Eine Teilmenge $N \subseteq K$ wird *in Linie* genannt, wenn für jede dreielementige Menge $L \subseteq N$ Punkte $x, y \in L$ existieren mit $L \subseteq L(x, y)$.

Nun betrachtet man alle Punktepaare in K , “zwischen denen” sich kein weiterer Punkt von K befindet (in dem Sinne, daß $L(x, y) = \{x, y\}$ gilt), und erhält ein Ergebnis, das erst im Lichte des darauffolgenden seine volle Wucht entfaltet. Der Abschluß einer Menge $A \in K$ sei hier mit $\text{cl } A$ bezeichnet.

Lemma 2.4.15. *Die Menge*

$$N = \text{cl} \{x \in K : \text{es gibt ein } y \in K \text{ mit } \xi(x, y) \in E\}$$

ist in Linie.

Beweis. Es seien x, y, u, v paarweise verschiedene Punkte von K mit $L(x, y) = \{x, y\}$ und $L(u, v) = \{u, v\}$, d.h. $\xi(x, y), \xi(x, u) \in E$. Dann ist nach dem gerade bewiesenen Lemma 2.4.13 mit der Einschränkung

$$T'_r : \Lambda(K^1)' \rightarrow c'_0 \cong \ell^1$$

des isometrischen Isomorphismus $T' : H(K^1)' \rightarrow (\ell^\infty)'$ das Bild $T'_r(\xi(x, y)) = \beta e_i$ mit $|\beta| = 1$ und einem Koordinatenauswertungsfunktional e_i auf c_0 für ein $i \in \mathbb{N}$. Dies liegt daran, daß die Extrempunkte der Einheitskugel von ℓ^1 gerade die Menge $\{\beta e_i\}$ aller mit einem Vorfaktor vom Betrag 1 versehenen Einheitsvektoren e_i sind und $E = \text{ext } B_{\Lambda(K^1)'}$ durch die Isometrie T'_r auf diese abgebildet wird. Es folgt mit dem (eingeschränkten) isometrischen Isomorphismus $T_r : c_0 \rightarrow \Lambda(K^1)$ die Existenz eines $f \in B_{\Lambda(K^1)}$ (konkret $f = \beta^{-1} T_r c_i$ mit dem i -ten Einheitsvektor c_i in c_0), so daß

$$\xi(x, y)(f) = 1 \quad \text{und} \quad h(f) = 0 \quad \forall h \in E \setminus \{\beta \xi(x, y)\}_{|\beta|=1}$$

gilt. Speziell hat man $f(u) = f(v)$ und $f(x) \neq f(y)$ und o.B.d.A. $f(u) \neq f(x)$ (sonst gilt $f(u) \neq f(y)$, und man kann die Rollen von x und y durch Betrachtung von $\xi(y, x) = -\xi(x, y)$ vertauschen). Es sind dann $\xi(x, u)$ und $\xi(x, v)$ Funktionale mit $\xi(x, u)(f) \neq 0$ und $\xi(x, v)(f) \neq 0$. In $\ell^1 \cong \Lambda(K^1)'$ entsprechen diese Funktionale Vektoren mit nichttrivialen Einträgen in der i -ten Stelle, genauer $T'_r(\xi(x, u)) = \lambda' \beta' e_i + (1 - \lambda') \mu_u$ und $T'_r(\xi(x, v)) = \lambda'' \beta'' e_i + (1 - \lambda'') \mu_v$ mit $0 < \lambda', \lambda'' \leq 1$, $|\beta'| = |\beta''| = 1$ und $\mu_u, \mu_v \in S_{\ell^1}$. Es folgt nach Anwendung von $(T'_r)^{-1}$ auf diese Gleichungen zusammen mit $T'_r(\xi(x, y)) = \beta e_i$, daß $\beta' \xi(x, y)$ in $\text{face } \beta \xi(x, u)$ und $\beta'' \xi(x, y)$ in $\text{face } \beta \xi(x, v)$ liegt. Die gleiche Argumentation führt auf $\beta_1 \xi(u, v) \in \text{face } \beta \xi(x, v)$ und $\beta_2 \xi(u, v) \in \text{face } \beta \xi(y, v)$ mit geeigneten β_1 und β_2 (oder ähnliches mit der Vertauschung $\xi(v, u) = -\xi(u, v)$). Mehrmalige Anwendung von Lemma 2.4.11 liefert jetzt die Tatsache, daß die vierpunktige Menge $\{x, y, u, v\}$ in Linie ist.

Sind w, z weitere Punkte aus K mit $L(w, z) = \{w, z\}$ bzw. $\xi(w, z) \in E$, so führt die obige Argumentation durch Betrachtung aller Fälle schließlich auf das Ergebnis, daß $\{x, y, u, v, w, z\}$ in Linie ist. Mit einer Indizierung der Elemente der Form $\xi(x, y)$ von E (dies ist eine abzählbare Menge, da es nur abzählbar viele Auswertungsfunktionale e_i aus c'_0 gibt) kann man nun eine Induktion durchführen (oder auch nicht; wir entscheiden uns für letzteres) und schließlich durch Übergang auf den Abschluß (die "Dreiecksgleichung" überträgt sich auf die Häufungspunkte) insgesamt nachweisen, daß N in Linie ist. \square

Lemma 2.4.16. $K = N$.

Beweis. Angenommen, es gibt ein $z \in K \setminus N$, dann existiert aufgrund der Stetigkeit von $d(\cdot, z)$ auf N und der Kompaktheit von N ein $w \in N$ mit

$$d(w, z) = \min_{y \in N} d(y, z) > 0.$$

Betrachte nun die Funktion f auf K , definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} d(x, z) - d(w, z) & \text{im Falle } d(x, z) \leq d(w, z) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(Aus Funktionen dieser Bauart werden übrigens die Funktionen, die im Beweis von Lemma 2.4.11 zum Zuge kommen, konstruiert.) f ist in $B_{H(K^1)}$ und liefert bei Anwendung des Funktional $\xi(w, z)$ seine Norm $L(f) = 1$. Da f auf N

verschwindet, verschwindet es bei Anwendung aller Funktionale aus \overline{E} . Nach Lemma 2.4.13 verschwindet $T(f)$ damit bei Anwendung aller (von c_0 auf ℓ^∞ fortgesetzten) Koordinatenauswertungsfunktionale. Mithin ist $T'(\bar{\xi}(w, z))$ ein Funktional in $(\ell^\infty)'$, d.h. mit $(\ell^\infty)' \cong C(\beta\mathbb{N})$ ein Maß auf $\beta\mathbb{N}$, dessen Träger die Einbettung $\alpha\mathbb{N}$ von \mathbb{N} in $\beta\mathbb{N}$ nicht schneidet. Im gegenteiligen Fall wäre (vergleiche 1. im Beweis zu Lemma 2.4.13) für ein Koordinatenauswertungsfunktional $e_i \in (\ell^\infty)'$ mit einem $\lambda \in (0, 1]$ und $|\alpha| = 1$ nämlich $\bar{\xi}(w, z) = \lambda\alpha e_i + (1 - \lambda)\mu$ mit $\|\mu\| = 1$ und $|\bar{\xi}(w, z)(f)| = |(1 - \lambda)\mu(f)| < 1$. Wie unter 2. im Beweis zu Lemma 2.4.13 schließt man damit $\bar{\xi}(w, z) \in \Lambda(K^1)^\perp$ im Widerspruch zur Punktentrennung von $\Lambda(K^1)$. \square

Jetzt wird klar, welche große Einschränkung es für einen punkttrennenden metrischen Raum K bedeutet, wenn ein isometrischer Isomorphismus zwischen c_0 und $\Lambda(K^1)$ existiert:

Lemma 2.4.17. *K ist isometrisch zu einer Teilmenge M der reellen Achse.*

Beweis. Da K nach den letzten beiden Lemmata in Linie ist, folgt mit der Kompaktheit von K die Existenz zweier $x_0, y_0 \in K$, so daß $L(x_0, y_0) = K$ ist. Ordne nun mit der Metrik d auf K jedem $x \in K$ die reelle Zahl $h(x) = d(x, x_0)$ zu. Dann ist, aufgrund der Wahl von x_0 und da K in Linie ist, die Abbildung h isometrisch. \square

Es folgt also aus diesem Lemma $\Lambda(K^1) \cong \Lambda(M^1)$ sowie $H(K^1) \cong H(M^1)$. Und mit der Annahme, daß $\Lambda(K^1)$ die Punkte von K trennt, erhält man nun eine noch stärkere Bedingung an $M \cong K$.

Lemma 2.4.18. *M ist nirgends dicht.*

Beweis. Sonst läge ein Intervall I im Inneren von M (man beachte, daß M abgeschlossen ist), und jedes $f \in \text{lip}_0(M^1) \cong \Lambda(M^1)$ wäre aufgrund der *lip*-Bedingung auf I differenzierbar mit Ableitung 0, d.h. dort konstant. Damit aber wäre $\Lambda(M^1)$ auf $I \cap M$ nicht punkttrennend. \square

Zum Schluß werden, wie schon angekündigt, die Ergebnisse für $\alpha = 1$ herangezogen, um zu zeigen, daß überhaupt nur dieser Fall eintreten kann.

Lemma 2.4.19. *Es existiere für ein α mit $0 < \alpha \leq 1$ ein isometrischer Isomorphismus von ℓ^∞ auf $H(K^\alpha)$, der c_0 auf $\Lambda(K^\alpha)$ abbildet. Dann ist $\alpha = 1$.*

Beweis. Ist $\alpha < 1$, so ist mit d auch d^α eine Metrik auf K und $H(K^\alpha, d)$ ist (isometrisch isomorph zu) $H(K^1, d^\alpha)$. Damit ist nach den obigen Ergebnissen (K, d^α) isometrisch zu einer Teilmenge $(M, |\cdot|)$ der reellen Achse. Da d eine Metrik auf K ist, muß dann aber auch $|\cdot|^\frac{1}{\alpha}$ eine Metrik auf M sein. Die Funktion $x \mapsto x^\frac{1}{\alpha}$ auf \mathbb{R}_0^+ ist aber streng konvex, d.h. die Dreiecksungleichung gilt gerade umgekehrt. Mithin ist $|\cdot|^\frac{1}{\alpha}$ für mindestens dreielementiges K keine Metrik. Widerspruch. \square

Nach mühsamer Arbeit haben wir nun auch die Implikation (ii) \Rightarrow (iii) des Wulbertschen Theorems 2.4.1 eingesehen. Das Ergebnis mag dürftig erscheinen, sagt aber einiges über die “Eigenständigkeit” der Lipschitzräume $\Lambda(K^\alpha)$ und $H(K^\alpha)$ aus. Auch wenn diese (siehe Abschnitte 2.1 und 2.2) zumindest in endlichdimensionalen Fällen — und vielleicht ja auch in allgemeineren — bis auf Isomorphie mit den Folgenräumen c_0 und ℓ^∞ zusammenhängen, dürfen sie, was die isometrische Repräsentation angeht, bis auf wenige Ausnahmen nicht mit diesen “über einen Kamm geschert” werden — und das ist auch “gut” so, denn sonst hätten wir ja nur die Trivialität unseres Betrachtungsgegenstands nachgewiesen.

Trotz der Allgemeinheit des Theorems 2.4.1 fällt auf, daß insbesondere die Argumentation für den Beweis der Implikation (ii) \Rightarrow (iii) steht und fällt mit der Zusatzvoraussetzung der Punktentrennung von $\Lambda(K^\alpha)$. Diese sichert im Hinblick auf den Satz von Stone-Weierstraß ja zumindest eine gewisse Reichhaltigkeit dieses kleinen Lipschitzraums. Andererseits scheint diese Voraussetzung recht natürlich zu sein, denn man könnte sich ja den Anteil von K , auf dem die Elemente von $\Lambda(K^\alpha)$ “nichts tun”, wegfaktoriert denken. Dies wurde von Weaver in [49] getan. Um nach dieser “Behandlung” des metrischen Raums K den ursprünglichen kleinen Lipschitzraum (bis auf isometrische Isomorphie) wieder zu erhalten, muß man jedoch den entsprechenden Quotientenraum von K mit einer neuen Metrik versehen.

Wir werden im nun folgenden Kapitel erleben, daß ein Vergleich zwischen den Folgenräumen c_0 und ℓ^∞ und den Lipschitzräumen nach einem anderen Aspekt auf natürliche Weise zu einer stärkeren gleichmäßigen Art der Punktentrennung kleiner Lipschitzfunktionen führt. Mit dieser erscheint dann — wie schon angekündigt — auch Satz 2.4.3, dessen Aussage wir alleine aus dieser neuen Bedingung an $\Lambda(K^\alpha)$ erhalten werden, in einem neuen helleren Licht. Verfolgen wird uns dabei wieder die Abbildung I , deren Surjektivität uns ja im Beweis zu Satz 2.4.3 einiges Kopfzerbrechen bereitete. Dies wird auch im nächsten Kapitel — dort aber ohne Beweislücke! — so bleiben.

Kapitel 3

Die Dualität $\text{lip}(K)'' = \text{Lip}(K)$

3.1 Der Ausgangspunkt von de Leeuw

Es ist in Kapitel 2 deutlich geworden, daß man den kleinen Lipschitzraum mit dem Folgenraum c_0 in Verbindung bringen kann, wohingegen der große Lipschitzraum einiges mit dem Folgenraum ℓ^∞ zu tun hat. So liegt zum Beispiel nach Theorem 2.2.1 und Korollar 2.4.6 (ii) für Kompakta K aus endlichdimensionalen Räumen und $0 < \alpha < 1$ bis auf Isomorphie $\text{lip}(K^\alpha)$ in $\text{Lip}(K^\alpha)$ wie der Folgenraum c_0 in ℓ^∞ . Wenn man nun bedenkt, daß ℓ^∞ der zweite Dualraum von c_0 ist, so könnte man die Frage stellen, ob ähnliches auch auf der "Lipschitzraumebene" gilt. Diese Frage ist höchst berechtigt, denn wir wissen ja bereits für kompakte $K \subseteq \mathbb{R}^m$ seit Korollar 2.4.6 (i), daß $\Lambda(K^\alpha)'' \cong H(K^\alpha)$ richtig ist. Wir werden in diesem Kapitel sehen, daß $\text{lip}(K)'' \cong \text{Lip}(K)$ für sehr allgemeine Kompakta K stimmt, und wir werden am Ende dieses Kapitels die Kompakta, für die diese Dualität gilt, sogar charakterisieren. Dies steht im Gegensatz zu Kapitel 2, wo einige Fragen nach der Isomorphie zwischen Lipschitzräumen auf Kompakta und den Folgenräumen c_0 und ℓ^∞ offen bleiben mußten.

Wir wollen bei den Anfangsgründen zu diesem Thema starten, und diese finden sich, wie schon einige Male erwähnt, in einem Artikel von K. de Leeuw [33] aus dem Jahre 1961. Es sollte darauf hingewiesen werden, daß natürlich auch D. E. Wulbert, von dem Satz 2.4.3 stammt, Kenntnis von de Leeuws Arbeit hatte. Wulbert mußte darüber hinaus das Theorem 2.2.1 von Bonic, Frampton and Tromba bemühen, um sein Korollar 2.4.6 (i) zu folgern. De Leeuw hingegen, zumindest seinem Literaturverzeichnis in [33] nach zu urteilen, nahm noch nicht einmal von dem kurz vorher erschienenen Isomorphieresultat von Ciesielski [7] Notiz, welches er für seine Beweisidee freilich auch nicht benötigt.

De Leeuw betrachtet, ähnlich wie Ciesielski, recht einfache Lipschitzräume, nämlich für $0 < \alpha < 1$ die Räume $\text{Lip}\alpha$ aller Hölder-stetigen Funktionen zum Exponenten α auf \mathbb{R} mit Periode 1 und die zugehörigen kleinen Hölderräume $\text{lip}\alpha$, jeweils versehen mit der Norm

$$\|f\|_{L_\alpha} = \max(\|f\|_\infty, L_\alpha(f))$$

aus Definition 1.1.2 bzw. Definition 1.1.18. Mit unseren bisher benutzten Begriffen sieht man schnell ein, daß $Lip\alpha \cong Lip(S_{\mathbb{C}}^{\alpha})$ gilt, wenn $S_{\mathbb{C}}$ die Einheitsosphäre in \mathbb{C} mit der durch die Bogenlänge $d(e^{2\pi i\varphi}, e^{2\pi i\psi}) := \min(\varphi - \psi, 1 - (\varphi - \psi))$ zwischen $e^{2\pi i\varphi}$ und $e^{2\pi i\psi}$, $0 \leq \psi \leq \varphi < 1$, gegebenen Metrik d ist.

Wieso de Leeuw ausgerechnet periodische Funktionen betrachtet, wird in Abschnitt 3.2 deutlich werden. Dort sehen wir seinen Beweis zur Surjektivität und Normerhaltung des von ihm definierten isometrischen Isomorphismus zwischen $(lip\alpha)''$ und $Lip\alpha$, in welchem er auf Ergebnisse aus der Theorie über Fourierreihen zurückgreift. Der Nachweis der Injektivität und der Kontraktivität dieser Abbildung hängt indes nicht von der speziellen Gestalt der von de Leeuw betrachteten Räume ab und kann völlig allgemein geführt werden. Diese Tatsache hat sich zum Beispiel T. M. Jenkins in seiner wunderbaren und vielfach zitierten Doktorarbeit [24] zunutze gemacht, in der er die Ergebnisse aus dem Artikel von de Leeuw stark verallgemeinert. Wir wollen daher an dieser Stelle den grundlegenden Ansatz von de Leeuw in einer so weit als möglich generalisierten Form darstellen und die weiteren noch offenen Fragen, die von unterschiedlichen Autoren auf verschiedensten Wegen angegangen wurden, in den folgenden Abschnitten beantworten.

Wir beginnen mit der Definition einer uns mittlerweile bereits wohlbekannteren Abbildung (vergleiche Bemerkung 1.1.23 und den Beweis des Satzes 2.4.3).

Definition 3.1.1. Sei (K, d) ein kompakter metrischer Raum und δ_x , $x \in K$, das Punktauswertungsfunktional auf $lip(K)$ an der Stelle x . Definiere nun die Abbildung

$$I : lip(K)'' \rightarrow Lip(K)$$

für $F \in lip(K)''$ durch

$$I(F)(x) = F(\delta_x) \quad \forall x \in K.$$

Zur Untersuchung dieser Abbildung (bzw. zur nachträglichen Rechtfertigung der Definition) benötigen wir das folgende Lemma, dessen einfacher Beweis als Zweizeiler im Beweis von Satz 1.1.22 bereits enthalten ist. Von nun an sei mit $\|\cdot\|'$ die Norm in $lip(K)'$ und mit $\|\cdot\|''$ die Norm in $lip(K)''$ bezeichnet.

Lemma 3.1.2. *Es gelten für alle $x, y \in K$ die Abschätzungen*

$$\|\delta_x\|' \leq 1 \quad \text{und} \quad \|\delta_x - \delta_y\|' \leq d(x, y).$$

Dies liefert mit einem weiteren Blick auf den Beweis von Satz 1.1.22 und die Bemerkung 1.1.23 das

Lemma 3.1.3. *Die in Definition 3.1.1 angegebene Abbildung I ist wohldefiniert, linear und kontraktiv und bildet die natürliche Einbettung von $lip(K)$ in $lip(K)''$ wieder auf $lip(K)$ ab.*

Wir nähern uns nun dem zweiten Dualraum von $lip(K)$, indem wir zunächst versuchen, den Dualraum $lip(K)'$ etwas in den Griff zu bekommen. Nun kennt man

ja Dualräume gewisser Räume von stetigen Funktionen nach dem Rieszschen Darstellungssatz (siehe Theorem II.2.5 und S. 89 in [55]) sehr genau. De Leeuws weiteres Vorgehen basiert auf der Idee, sich dieses Wissen zunutze zu machen, und zu diesem Zweck hat er seinen Einbettungssatz formuliert, den wir in Kapitel 1 (Satz 1.1.10) bereits kennengelernt haben. Dieser besagt, daß mit dem lokalkompakten Raum $\hat{K} = K \cup (K^2 \setminus \text{diag}(K^2))$ die durch $\Phi f(x) = f(x)$ und $\Phi f(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{d(x, y)}$ definierte Abbildung $\Phi : Lip(K) \rightarrow C^b(\hat{K})$ den kleinen Lipschitzraum isometrisch isomorph auf einen Unterraum $\Phi(lip(K))$ in $C_0(\hat{K})$ abbildet. Der Dualraum von $C_0(\hat{K})$ ist nach Riesz der Raum $(M(\hat{K}), \|\cdot\|_V)$ aller regulären Borelmaße auf \hat{K} , versehen mit der Variationsnorm $\|\cdot\|_V$. Damit erhalten wir das gewünschte

Lemma 3.1.4. *Es sei φ ein Funktional auf $lip(K)$. Dann existiert ein Maß $\mu \in M(\hat{K})$ mit $\|\mu\|_V = \|\varphi\|'$, so daß*

$$\varphi(f) = \int_K f(x) d\mu(x) + \int_{K^2 \setminus \text{diag}(K^2)} \frac{f(x) - f(y)}{d(x, y)} d\mu(x, y)$$

für alle $f \in lip(K)$ gilt.

Beweis. Nach dem oben zitierten Satz 1.1.10 gibt das Funktional $\varphi \in lip(K)'$ Anlaß zu einem normgleichen Funktional $\tilde{\varphi}$ auf $\Phi(lip(K))$. $\tilde{\varphi}$ kann nach dem Satz von Hahn-Banach unter Erhaltung seiner Norm zu einem Funktional auf ganz $C_0(\hat{K})$ fortgesetzt werden, welches nach dem Rieszschen Darstellungssatz einem Maß $\mu \in M(\hat{K})$ entspricht. Mit diesem Maß gilt also $\|\mu\|_V = \|\varphi\|'$ und

$$\varphi(f) = \int_{\hat{K}} \Phi(f) d\mu \quad \forall f \in lip(K),$$

und nichts anderes wurde behauptet. □

Da zur Beschreibung der Funktionale auf $C(K)$ die Maße auf K ausreichen, besteht natürlich die Wunsch, die Aussage des obigen Lemmas noch dahingehend zu verbessern, daß man Funktionalen auf $lip(K)$ alleine durch Maße auf K beikommen kann. Die nächsten beiden Lemmata zeigen, daß dieser Wunsch mehr als in Erfüllung geht.

Definition 3.1.5. Es wird mit $lip(K)'_m$ die Menge all derjenigen Elemente $\varphi \in lip(K)'$ bezeichnet, für die

$$\varphi(f) = \int_K f d\nu \quad \forall f \in lip(K) \tag{3.1.1}$$

mit einem Maß $\nu \in M(K)$ gilt. Weiter wird durch $lip(K)'_p$ der Teilraum aller Funktionale aus $lip(K)'_m$ bezeichnet, für die (3.1.1) sogar mit einem Maß ν mit endlichem Träger gilt.

$lip(K)'_p$ ist also der von den Punktauswertungsfunktionalen $\{\delta_x\}_{x \in K}$ aufgespannte Unterraum von $lip(K)'$.

Lemma 3.1.6. $\text{lip}(K)'_m$ liegt dicht in $\text{lip}(K)'$.

Beweis. Sei ein Funktional $\varphi \in \text{lip}(K)$ mit einem zugehörigen Maß $\mu \in M(\hat{K})$ gemäß Lemma 3.1.4 gegeben. Die Einschränkungen von μ auf K bzw. auf $K^2 \setminus \text{diag}(K^2)$ seien mit μ' bzw. mit μ'' bezeichnet. Weiter seien für $n \in \mathbb{N}$ die aufsteigende Mengenfolge

$$A_n = \{(x, y) \in K^2 : d(x, y) \geq 1/n\}$$

und die (zu dieser in $K^2 \setminus \text{diag}(K^2)$ komplementäre) absteigende Mengenfolge

$$Z_n = \{(x, y) \in K^2 : 0 < d(x, y) < 1/n\}$$

erklärt. Definiere nun für $n \in \mathbb{N}$ das Funktional $\varphi_n \in \text{lip}(K)'$ durch

$$\varphi_n(f) = \int_K f(x) d\mu'(x) + \int_{A_n} \frac{f(x) - f(y)}{d(x, y)} d\mu''(x, y) \quad \forall f \in \text{lip}(K).$$

Es gilt dann

$$|\varphi_n(f)| \leq \|f\|_\infty (\|\mu'\|_V + 2n\|\mu''\|_V),$$

was bedeutet, daß φ_n mit Hahn-Banach zu einem Funktional auf $C(K)$ fortgesetzt werden kann, so daß mit einem Maß $\mu_n \in M(K)$ sogar

$$\varphi_n(f) = \int_K f(x) d\mu_n(x) \quad \forall f \in \text{lip}(K)$$

und folglich $\varphi_n \in \text{lip}(K)'_m$ gilt. Weiter hat man für $f \in \text{lip}(K)$ mit $\|f\|_L \leq 1$

$$|(\varphi - \varphi_n)(f)| = \left| \int_{Z_n} \frac{f(x) - f(y)}{d(x, y)} d\mu''(x, y) \right| \leq |\mu''|(Z_n).$$

Aus $Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq \dots$ und der Stetigkeit des Maßes μ'' folgt schließlich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\mu''|(Z_n) = |\mu''| \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} Z_n \right) = |\mu''|(\emptyset) = 0,$$

also $\|\varphi - \varphi_n\|' \rightarrow 0$, womit die Aussage des Lemmas bewiesen ist. \square

Als ob Lemma 3.1.6 nicht schon genug wäre, hat man auch noch die folgende Verschärfung seiner Aussage. Diese bildet nun das Fundament, auf dem wir die Beweise zur Injektivität und später vor allem zur Surjektivität unserer in Definition 3.1.1 erklärten Abbildung I aufbauen können.

Satz 3.1.7. $\text{lip}(K)'_p$ liegt dicht in $\text{lip}(K)'$.

Man beachte in den nachfolgenden Gedanken die Ästhetik im Zusammenspiel des Satzes von Arzelà-Ascoli und des Satzes von Krein-Milman!

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, weiter ein Maß $\nu \in M(K)$ und $\varphi \in \text{lip}(K)'$ durch (3.1.1) definiert. Setze $\varepsilon' := \frac{\varepsilon}{4\|\nu\|_V}$. Nach Lemma 3.1.6 reicht es zu zeigen, daß φ in der Norm von $\text{lip}(K)'$ durch Elemente aus $\text{lip}(K)'_p$ angenähert werden kann. Betrachte hierzu die Einheitskugel $B_{\text{lip}(K)}$, welche in $C(K)$ eine beschränkte und offensichtlich gleichgradig stetige Funktionenmenge ist. Nach dem Satz von Arzelà-Ascoli ist sie also präkompakt, so daß eine endliche Menge $N \subseteq B_{\text{lip}(K)}$ existiert, für die, wenn $B(\tilde{f}, \varepsilon') := \{g \in C(K) : \|g - \tilde{f}\|_\infty \leq \varepsilon'\}$ gesetzt wird, $\bigcup_{\tilde{f} \in N} B(\tilde{f}, \varepsilon') \supseteq B_{\text{lip}(K)}$ gilt. Die Tatsache, daß (vgl. S. 350 Beispiel (f) in [55]) die Extrempunkte der Einheitskugel $B_{M(K)}$ bis auf Faktoren vom Betrag 1 aus den Punktmaßen bestehen, liefert nun zusammen mit dem Satz von Krein-Milman (vgl. VIII.4.4 in [55]) die Aussage, daß diejenige Teilmenge der um $\|\nu\|_V$ gestreckten Einheitskugel

$$\|\nu\|_V B_{M(K)} = \{\eta \in M(K) : \|\eta\|_V \leq \|\nu\|_V\},$$

welche aus Maßen mit endlichem Träger besteht, bezüglich der w^* -Topologie dicht in $\|\nu\|_V B_{M(K)}$ liegt. Es existiert also ein Maß η mit endlichem Träger auf K und $\|\eta\|_V \leq \|\nu\|_V$, so daß

$$\left| \int_K \tilde{f} d\nu - \int_K \tilde{f} d\eta \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall \tilde{f} \in N$$

gilt. Hieraus folgt nun für alle $f \in B_{\text{lip}(K)}$

$$\left| \int_K f d\nu - \int_K f d\eta \right| \leq \varepsilon,$$

denn zu einem $f \in B_{\text{lip}(K)}$ findet man ein $\tilde{f} \in N$ mit $\|f - \tilde{f}\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{4\|\nu\|_V}$, also

$$\begin{aligned} \left| \int_K f d\nu - \int_K f d\eta \right| &\leq \left| \int_K (f - \tilde{f}) d\nu \right| + \left| \int_K \tilde{f} d\nu - \int_K \tilde{f} d\eta \right| + \left| \int_K (\tilde{f} - f) d\eta \right| \\ &\leq \|f - \tilde{f}\|_\infty \|\nu\|_V + \frac{\varepsilon}{2} + \|f - \tilde{f}\|_\infty \|\nu\|_V \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit erfüllt das durch

$$\psi(f) = \int_K f d\eta \quad \forall f \in \text{lip}(K)$$

definierte Funktional $\psi \in \text{lip}(K)'_p$ die Abschätzung $\|\varphi - \psi\|' \leq \varepsilon$. \square

Da wir die Abbildung I in Definition 3.1.1 über die Punktauswertungsfunktionale definiert haben, erhalten wir als Abfallprodukt von Satz 3.1.7 jetzt das begehrte

Korollar 3.1.8. *Die gemäß Definition 3.1.1 gegebene Abbildung I ist injektiv.*

Beweis. Der Kern der Abbildung I ist trivial, denn ist $I(F) = 0$ für ein $F \in \text{lip}(K)''$, dann gilt $F(\delta_x) = 0 \quad \forall x \in K$, so daß F nach Satz 3.1.7 auf der in $\text{lip}(K)'$ dichten Menge $\text{lip}(K)'_p$ mit dem Nullfunktional übereinstimmt und aufgrund seiner Stetigkeit eben dieses ist. \square

Das “Wulbertsche Analogon” zu Satz 3.1.7 ist Lemma 2.4.4, welches Wulbert für den Beweis seines Satzes 2.4.3 benötigt. Auch dort hat man die Aussage, daß eine gewisse Menge leicht handhabbarer Funktionale (konkret der von den Funktionalen $\xi(x, y)$ aufgespannte Teilraum), über die man die Abbildung I definiert hat, dicht im Dualraum des kleinen Lipschitzraums $\Lambda(K^\alpha)$ liegt. Natürlich sind die Funktionale $\xi(x, y)$ gegenüber den Punktauswertungsfunktionalen etwas “aussagekräftiger”, so daß Wulbert mit Lemma 2.4.4 bereits die Normerhaltung seiner Abbildung I nachweisen kann, wozu wir mit unserem Satz 3.1.7 noch nicht in der Lage zu sein scheinen (siehe jedoch den Beweis zu Theorem 3.3.2). Andererseits benötigt Wulbert als Voraussetzung in Lemma 2.4.4 die Separabilität von $\Lambda(K^\alpha)'$, die wir mit Satz 3.1.7 “geschenkt” bekommen.

Satz 3.1.9. *Für kompaktes K ist $\text{lip}(K)'$ und damit $\text{lip}(K)$ separabel.*

Beweis. Die Separabilität von $\text{lip}(K)$ folgt ganz allgemein (mit Satz III.1.12 in [55]) aus der von $\text{lip}(K)'$. Da $\|\delta_x - \delta_y\|' \leq d(x, y) \quad \forall x, y \in K$ nach Lemma 3.1.2 gilt und K aufgrund seiner Kompaktheit separabel ist, ist auch die Menge $\{\delta_x\}_{x \in K}$ der Punktauswertungsfunktionale in $\text{lip}(K)'$ separabel. Hieraus folgt mit Satz 3.1.7 die Separabilität von $\text{lip}(K)$. \square

Wie in Bemerkung 2.3.2 schon erwähnt, zeigt J. A. Johnson in [27], daß im Falle $0 < \alpha < 1$ aus der Separabilität von $\text{lip}(K^\alpha)$ wieder die Präkompaktheit von K folgt. Dafür weist Johnson (unter Verwendung der kleinen Hölderfunktionen $x \mapsto d(x, x_0)$, $x_0 \in K$, auf K) nach, daß für nicht präkompaktes K die Einheitskugel in $\text{lip}(K^\alpha)'$ nicht w^* -metrisierbar ist, und hieraus kann man (siehe VIII.6.15 (e) in [55]) die Nicht-Separabilität von $\text{lip}(K^\alpha)$ schließen.

Man beachte, daß alle in diesem Abschnitt gemachten Aussagen, einschließlich Satz 3.1.7 und Korollar 3.1.8 nur die Kompaktheit von K erfordern und sonst keine weiteren Anforderungen an den metrischen Raum stellen. Dies wird sich in den folgenden Abschnitten, in denen wir die Surjektivität und die Normerhaltung von I nachweisen wollen, ändern. Und dies muß sich auch ändern, denn im Falle $K = [0, 1]$ zum Beispiel ist ja (siehe Bemerkung 1.1.14) $\text{lip}(K)$ und damit auch $\text{lip}(K)''$ eindimensional, und viel weiter kann dieser Raum von einer isometrischen Isomorphie mit $\text{Lip}([0, 1]) \simeq L^\infty([0, 1])$ (siehe die Sätze 1.1.6 und 1.2.3) wohl kaum entfernt sein! Man kann sich jedoch solch krasser Gegenbeispiele entledigen (und nicht nur solcher!), wenn man dafür Sorge trägt, daß der metrische Raum angenehm genug gestaltet ist, um eine gewisse gleichmäßige Annäherung von großen Lipschitzfunktionen durch kleine zu erlauben.

3.2 Der isometrische Isomorphismus durch Approximationsansätze

Es geht in diesem Abschnitt darum, unter gewissen Einschränkungen an K zu zeigen, daß die in Definition 3.1.1 erklärte Abbildung $I : \text{lip}(K)'' \rightarrow \text{Lip}(K)$ tatsächlich surjektiv und isometrisch, also ein isometrischer Isomorphismus ist.

Grundlage dafür ist wieder das Vorgehen von de Leeuw in [33], dessen Essenz später von Jenkins in [24] im Hinblick auf eine wesentliche Verallgemeinerung herausgearbeitet wurde.

De Leeuw ließ sich in seinem Ansatz offenbar durch einen kurz vorher erschienenen Artikel von H. Mirkil [41] inspirieren, in dem bewiesen wird, daß für jedes $\alpha \in (0, 1)$ die trigonometrischen Polynome dicht im kleinen Lipschitzraum $lip\ \alpha$ liegen. Zur Erinnerung (siehe S. 83): $Lip\ \alpha$ ist der Raum aller Hölder-stetigen Funktionen zum Exponenten α mit Periode 1 auf \mathbb{R} , und $lip\ \alpha$ ist der zugehörige kleine Hölderraum.

Bemerkung 3.2.1. Eigentlich beweist Mirkil etwas anderes, und sein lehrreiches Ergebnis ist an dieser Stelle zumindest einer Erwähnung wert. Mirkil betrachtet Banachräume X von 2π -periodischen Funktionen auf \mathbb{R} (d.h. auf $\mathbb{R} \bmod 2\pi$), welche translationsinvariant sind, d.h. welche mit f auch das um x nach links verschobene $T_x(f)$, definiert durch $T_x(f)(y) = f(x + y) \ \forall y \in \mathbb{R}$ (eventuell bis auf eine Nullmenge), enthalten. Weiter soll die Verschiebung die Norm einer Funktion nicht beeinflussen, womit man in $\{T_x\}_{x \in \mathbb{R}}$ eine Gruppe von Isometrien auf X vorliegen hat. Jetzt kann man natürlicherweise nach derjenigen Teilmenge $\mathcal{T}(X)$ von Funktionen $f \in X$ fragen, für welche die Abbildung $x \mapsto T_x(f)$ stetig ist. Anders ausgedrückt (vgl. 1.1 in [57]) fragt man nach dem größten invarianten Teilraum $\mathcal{T}(X)$ von X , auf dem die Gruppe $\{T_x\}_{x \in \mathbb{R}}$ stark stetig ist.

Hier einige nette Ergebnisse (wir definieren die Funktionen aus X auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ und wissen, was gemeint ist): Ist X der Raum aller Funktionen von beschränkter Variation auf $[0, 2\pi]$ mit der Gesamtvariation als Norm, so ist $\mathcal{T}(X)$ gerade der Teilraum aller absolut stetigen Funktionen. Startet man bei $X = L^\infty([0, 2\pi])$, so landet man bei $\mathcal{T}(X) = C([0, 2\pi])$, weiter ist $\mathcal{T}(L^p([0, 2\pi])) = L^p([0, 2\pi])$ für $1 < p < \infty$ und $\mathcal{T}(M([0, 2\pi])) = L^1([0, 2\pi])$, wenn mit $M([0, 2\pi])$ der Raum aller regulären Maße auf $[0, 2\pi]$ bezeichnet ist. Für den "normalen" Lipschitzraum $Lip([0, 2\pi])$ erhält man nach kurzer Rechnung $\mathcal{T}(Lip([0, 2\pi])) = C^1([0, 2\pi])$, und schließlich mit $0 < \alpha < 1$ für die Hölderfunktionen — wie sollte es auch anders sein — $\mathcal{T}(Lip([0, 2\pi]^\alpha)) = lip([0, 2\pi]^\alpha)$. Dieses Ergebnis beweist nun Mirkil (übrigens in stark generalisierter Form) mit Hilfe des folgenden grundlegenden Satzes: Bezeichnet P die Menge aller trigonometrischen Polynome auf $[0, 2\pi]$, so ist für jeden translationsinvarianten Banachraum X (mit vernünftigen Zusatzbedingungen, die für die Hölderräume erfüllt sind) der Teilraum $\mathcal{T}(X)$ gerade der Abschluß von $P \cap X$ in X . Und damit haben wir das Resultat, an welchem de Leeuw sich erfreute.

Natürlich (oder zum Glück!) benötigen wir den Satz von Mirkil in unserer nun folgenden Argumentation nicht wirklich. Für uns reicht die Erkenntnis, daß trigonometrische Polynome kleine Hölderfunktionen sind, und dies liegt im wesentlichen an den Sätzen 1.2.3 und 1.1.19, denn trigonometrische Polynome sind stetig differenzierbar und damit sogar Lipschitzfunktionen zum Exponenten $\alpha = 1$. (Man beachte, daß wir für $0 < \alpha < 1$ in Abschnitt 1.2, Korollar 1.2.18, die Dichtheit der C^∞ -Funktionen in H_α^0 , also ein Analogon zum Dicht-

heitsergebnis von Mirkil, bewiesen haben.) De Leeuws Idee, die Surjektivität von I zu zeigen, besteht nun darin, ein vorgegebenes $h \in Lip\alpha$ durch die n -ten Partialsummen g_n , $n \in \mathbb{N}$, seiner Fourierreihe anzunähern, genauer durch das n -te Cesàro-Mittel dieser Summen. Da diese in $lip\alpha$ liegen, kann man nach Definition von I (siehe 3.1.1) $F_n = i_{lip\alpha}(g_n) \in (lip\alpha)''$ mit $I(F_n) = g_n$ finden, und wegen $g_n \xrightarrow{\text{glm.}} h$ besteht die Hoffnung, aus den F_n ein $F \in (lip\alpha)''$ zu konstruieren, für welches dann $I(F) = h$ gilt. Hierfür erweist sich Satz 3.1.7 einmal mehr als hilfreich. Weiter wird durch die Theorie der Fourierreihen die Normerhaltung von I gleich mitgeliefert.

Theorem 3.2.2. *Die Abbildung $I : (lip\alpha)'' \rightarrow Lip\alpha$ gemäß Definition 3.1.1 ist ein isometrischer Isomorphismus.*

Beweis. Es bleibt nach Lemma 3.1.3 nur zu zeigen, daß I surjektiv und nicht echt kontraktiv ist. (Die Injektivität folgt daraus, so daß Korollar 3.1.8 hier gar nicht nötig ist.) Sei also $h \in Lip\alpha$ gegeben. Wir betrachten das n -te Cesàro-Mittel bzw. die n -te $(C, 1)$ -Partialsumme $\sigma_n(h)$ der Fourierreihe von h und verweisen hierzu auf die Standardliteratur [61, Kapitel III], speziell auf die Seiten 74–76, und als Verstärkung noch auf [55, S. 129–134], dort insbesondere auf S. 133/134. Es sei an dieser Stelle vor der Verwirrung gewarnt, die de Leeuw durch die Angabe der zwar richtigen Literatur aber der falschen Transformation stiftet (abgesehen von der absolut üblichen Verwirrung über die von Fejér gesetzten Akzente). Richtig lautet der von $[-\pi, \pi]$ auf $[0, 1]$ transformierte Fejér-Kern (siehe S. 88/89 in [61])

$$K_n : K_n(t) = \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sin(n+1)(\pi t - \frac{\pi}{2})}{\sin(\pi t - \frac{\pi}{2})} \right)^2, \quad t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

Mit diesem gilt dann für die Faltung $K_n * h$

$$K_n * h(x) = \int_0^1 h(x+t)K_n(t)dt = \sigma_n(h)(x),$$

also nach dem Satz von Fejér

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_n * h(x) = h(x) \tag{3.2.1}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ (und dies sogar gleichmäßig, was für unsere Argumentation jedoch keine Rolle spielt). Die beiden wichtigen Eigenschaften der Fejér-Kerne, nämlich ihre Nicht-Negativität und die Tatsache

$$\int_0^1 K_n(t)dt = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

liefern einerseits

$$|K_n * h(x)| \leq \int_0^1 |h(x+t)||K_n(t)|dt \leq \|h\|_\infty \int_0^1 K_n(t)dt \leq \|h\|_\infty$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und andererseits

$$\frac{|K_n * h(x) - K_n * h(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq \int_0^1 \frac{|h(x+t) - h(y+t)|}{|x - y|^\alpha} |K_n(t)| dt \leq L_\alpha(h)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$, also insgesamt

$$\|K_n * h\|_{L_\alpha} \leq \|h\|_{L_\alpha} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.2.2)$$

Da $K_n * h$ ein trigonometrisches Polynom ist, liegt es in $\text{lip } \alpha$, und es existiert mit der kanonischen Einbettung $i_{\text{lip } \alpha} : \text{lip } \alpha \rightarrow (\text{lip } \alpha)''$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Funktional $F_n = i_{\text{lip } \alpha}(K_n * h)$ mit

$$F_n(\varphi) = \varphi(K_n * h) \quad \forall \varphi \in (\text{lip } \alpha)'.$$

Aus (3.2.2) und der Tatsache, daß $i_{\text{lip } \alpha}$ isometrisch ist, folgt die gleichmäßige Beschränktheit der F_n :

$$\|F_n\|'' = \|K_n * h\|_{L_\alpha} \leq \|h\|_{L_\alpha} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.2.3)$$

Jetzt definieren wir

$$F(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(\varphi) \quad (3.2.4)$$

für alle $\varphi \in (\text{lip } \alpha)'$, für die dieser Grenzwert existiert. Es folgt aus (3.2.1) und der Definition der F_n die Existenz dieses Grenzwerts

$$F(\delta_x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(\delta_x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_x(K_n * h) = \lim_{n \rightarrow \infty} K_n * h(x) = h(x) \quad (3.2.5)$$

für alle Punktauswertungsfunktionale δ_x und aus der Linearität der F_n damit auch für alle Elemente aus $(\text{lip } \alpha)'_p$ (siehe Definition 3.1.5). Nun liegt aber $(\text{lip } \alpha)'_p$ nach Satz 3.1.7 dicht in $(\text{lip } \alpha)'$ und die F_n sind wegen (3.2.3) gleichmäßig beschränkt. Also gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ und $\varphi \in (\text{lip } \alpha)'$ ein $\psi \in (\text{lip } \alpha)'_p$ mit $\|\varphi - \psi\|' \leq \frac{\varepsilon}{4\|h\|_{L_\alpha}}$, und man folgert

$$\begin{aligned} |F_n(\varphi) - F_m(\varphi)| &\leq |F_n(\varphi) - F_n(\psi)| + |F_n(\psi) - F_m(\psi)| + |F_m(\psi) - F_m(\varphi)| \\ &\leq 2\|h\|_{L_\alpha} \|\varphi - \psi\|' + |F_n(\psi) - F_m(\psi)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon \end{aligned}$$

für $m, n \geq M$ mit einem geeigneten $M \in \mathbb{N}$, da $(F_n(\psi))_n$ konvergiert. Damit ist auch $(F_n(\varphi))_n$ eine Cauchyfolge, also konvergent in \mathbb{R} oder \mathbb{C} , so daß F wegen (3.2.3) und (3.2.4) ein Funktional in $(\text{lip } \alpha)''$ mit

$$\|F\|'' \leq \|h\|_{L_\alpha} \quad (3.2.6)$$

ist, für das aufgrund von (3.2.5) zudem

$$I(F)(x) = F(\delta_x) = h(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

gilt. Aus diesen beiden Tatsachen folgern wir nun die Surjektivität und mit Lemma 3.1.3 die Normerhaltung der Abbildung I . \square

Bemerkung 3.2.3. Man gerät natürlich schnell in die Versuchung, der Freude über die wunderschönen funktionalanalytischen Schlußweisen, derer sich de Leeuw in der Herleitung seines Ergebnisses bedient, dadurch Ausdruck zu verleihen, nach einer möglichen Verallgemeinerung von Theorem 3.2.2 zu fragen. Selbstverständlich wird man sich schwer tun, auf allgemeinen metrischen Räumen K eine Faltung, so wie sie im obigen Beweis benutzt wurde, überhaupt erst zu definieren, denn diese setzt ja die Existenz einer Gruppenstruktur auf K voraus (oben ist es die Addition auf \mathbb{R}), mit der man Translationen von Funktionen erhält.

Glücklicherweise hängt der rote Faden in de Leeuws Überlegungen nicht auf Gedeih und Verderb von der Existenz der Faltungen mit Fejér-Kernen ab. Vielmehr erhält man aus den Eigenschaften dieser Faltungen zunächst die Tatsache (3.2.2) und damit die wichtige gleichmäßige Beschränktheit (3.2.3) der F_n . Weiter liefert der Satz von Fejér die Tatsache (3.2.1), womit die Grundlage für die erfolgreiche Definition (3.2.4) des Funktionals F gelegt ist. Alle weiteren Argumente hängen dann nur noch von Satz 3.1.7 und eben in letzter Konsequenz von (3.2.1) und (3.2.2) ab. Dabei reicht zur Herleitung der Surjektivität von I die Beschränktheit der Menge $\{\|F_n\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ zusammen mit (3.2.1), wohingegen für die Normerhaltung von I die genaue Kenntnis der kleinsten oberen Schranke von $\{\|F_n\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ — nämlich $\|h\|_{L_\alpha}$ — erforderlich ist (sonst hätte man I nur als Isomorphismus erkannt). Viel kann man also an der Bedingung (3.2.2) nicht rütteln, damit man den Beweis, so wie er vorliegt, noch durchführen kann — allenfalls so viel, daß man diese Bedingung wenigstens “im Limes” für $n \rightarrow \infty$ noch fordert. Jedenfalls liefert diese Beweisanalyse, daß mit (3.2.1) und (3.2.2) im wesentlichen die Bedingungen gegeben sind, welche völlig unabhängig von der konkreten Gestalt des Kompaktums K mit de Leeuws Beweis auf die Surjektivität und Normerhaltung von I führen. Es soll hier nicht versäumt werden darauf hinzuweisen, daß das Verdienst, dies als erster gesehen zu haben, T. M. Jenkins (siehe [24]) gebührt. Mit Lemma 3.1.3 erhält man also das

Lemma 3.2.4. *Es existiere für ein kompaktes K zu jedem $h \in Lip(K)$ eine Folge $(g_n) \subseteq lip(K)$, so daß die Bedingungen*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = h(x) \quad \forall x \in K \quad (3.2.7)$$

und

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|g_n\|_L \leq \|h\|_L \quad (3.2.8)$$

erfüllt sind. Dann ist die Abbildung $I : lip(K)'' \rightarrow Lip(K)$ aus Definition 3.1.1 ein isometrischer Isomorphismus, der die natürliche Einbettung von $lip(K)$ in $lip(K)''$ auf $lip(K)$ abbildet.

Die Bedingungen dieses Lemmas fordern also die Möglichkeit, jedes $h \in Lip(K)$ punktweise derart durch Elemente g_n aus $lip(K)$ annähern zu können, daß die Norm der g_n beliebig wenig über der von h liegt. Um diese Möglichkeit überhaupt haben zu können, müssen natürlich kleine Lipschitzfunktionen auf K erst einmal in einer “ausreichenden Menge” vorhanden sein. erinnert man

sich nun an die in Kapitel 1 mit Satz 1.1.13 und Bemerkung 1.1.14 begonnene Diskussion über die “Größe” von $\text{lip}(K)$, so wird man vermuten, daß man zumindest für Hölderräume $\text{lip}(K^\alpha)$ mit $0 < \alpha < 1$ im Sinne des obigen Lemmas “auf der sicheren Seite” sein könnte. Suggestiert wird diese Vermutung durch Satz 1.1.19 und durch die Ergebnisse (1.2.1) und (1.2.2). Man könnte nämlich versuchen, die kleinen Lipschitzfunktionen $g_n \in \text{lip}(K^\alpha)$, die das $h \in \text{Lip}(K^\alpha)$ approximieren sollen, durch große Lipschitzfunktionen aus $\text{Lip}(K^\beta) \subseteq \text{lip}(K^\alpha)$ für $\alpha < \beta \leq 1$ zu konstruieren. Zu diesem Zweck benötigen wir im Hinblick auf die Bedingungen in Lemma 3.2.4 ein allgemeines Analogon zur Abschätzung (1.2.2), und dies legt Jenkins in der folgenden Form vor.

Lemma 3.2.5. *Sei $0 < \alpha < \beta \leq 1$ und $f \in \text{Lip}(K^\beta)$. Dann gilt*

$$\|f\|_{L_\alpha} \leq 2^{(\beta-\alpha)/\alpha} \|f\|_{L_\beta}.$$

Beweis. Seien $x, y \in K$ mit $x \neq y$ gegeben. Nach Bemerkung 1.1.7 und Satz 1.1.8 (angewandt auf K^α und $(K^\alpha)'$) kann man o.B.d.A. von $d^\alpha(x, y) \leq 2$ ausgehen. Damit folgt einerseits

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{d^\alpha(x, y)} = \frac{|f(x) - f(y)|}{d^\beta(x, y)} \left(d^{\beta-\alpha}(x, y) \right)^{\alpha/\alpha} \leq 2^{(\beta-\alpha)/\alpha} \|f\|_{L_\beta}.$$

Andererseits gilt wegen $2^{(\beta-\alpha)/\alpha} > 1$ sowieso

$$\|f\|_\infty \leq 2^{(\beta-\alpha)/\alpha} \|f\|_{L_\beta},$$

also insgesamt die Aussage des Lemmas. \square

Um das weitere Vorgehen von Jenkins in [24] zu motivieren, verweilen wir noch etwas bei den einfachen Hölderräumen H_α und H_α^0 auf $[0, 1]$ und den Ergebnissen aus Abschnitt 1.2. Zunächst kann man wegen $L_\alpha(f) = \max(\|f\|_\infty, L_\alpha(f))$ für $f \in H_\alpha$, $0 < \alpha < 1$, den Raum H_α^0 als Unterraum von $\text{lip}([0, 1]^\alpha)$ auffassen und damit jedes Funktional auf H_α^0 als Einschränkung eines Funktionals auf $\text{lip}([0, 1]^\alpha)$ ansehen. Da zudem die Punktauswertung δ_0 das Nullfunktional auf H_α^0 ist, haben wir auch die Wohldefiniertheit der gemäß 3.1.1 definierten Abbildung $I : (H_\alpha^0)'' \rightarrow H_\alpha$ sowie die restlichen Aussagen von Lemma 3.1.3. Genauso gilt Satz 3.1.7 für H_α^0 , und der Beweis zu Theorem 3.2.2 geht dann völlig analog durch (im übrigen auch für allgemeine Lipschitzräume $\text{lip}_0(K)$), wenn für H_α^0 die Bedingungen (3.2.7) und (3.2.8) des Lemmas 3.2.4 erfüllt sind. Und bei diesen landen wir, wenn wir uns den Beweis zu Satz 1.2.20 und die darauffolgenden Korollare ansehen. Dort wird klar, daß man als Folge $(g_n) \subseteq H_\alpha^0$ sogar Polygone (aus $H_1!$) wählen kann, die h in endlich vielen Punkten, d.h. auf einer Partition von $[0, 1]$, interpolieren. Und die Bedingung (3.2.7) ist, durch fortgesetztes Verfeinern der Partition, sogar gleichmäßig für alle $x \in [0, 1]$ erfüllt.

Für ein allgemeines Kompaktum kann man eine derart einfache Konstruktion natürlich nicht durchführen, aber man kann statt zu interpolierenden Polygonen zu interpolierenden H_β -Funktionen mit $\alpha < \beta \leq 1$ greifen. Wegen $\lim_{\beta \searrow \alpha} 2^{(\beta-\alpha)/\alpha} = 1$ besteht die Hoffnung, die Bedingung (3.2.8) erfüllen zu

können, und da man jedes Kompaktum für jedes $\varepsilon > 0$ durch ein endliches ε -Netz rastern kann, scheint auch die Bedingung (3.2.7) in Reichweite zu sein. Die noch offene Frage, wie man zu einem gegebenem $h \in H_\alpha$ konkret zu einem h approximierenden $g \in H_\beta$ mit $g(x_i) = h(x_i)$ für ein ε -Netz $\{x_i\}_{i=1}^n$ in K kommen kann, wird von Jenkins mit einem Satz beantwortet, der uns bereits seit Kapitel 1 (Satz 1.1.20) wohlbekannt ist, dem Fortsetzungssatz von McShane!

Lemma 3.2.6. *Sei ein reellwertiges $h \in Lip(K^\alpha)$ für ein kompaktes K und $0 < \alpha < 1$ gegeben. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine reellwertige Funktion $g \in lip(K^\alpha)$, so daß*

$$\|g - h\|_\infty \leq \varepsilon \quad (3.2.9)$$

und

$$\|g\|_{L_\alpha} \leq (1 + \varepsilon)^2 \|h\|_{L_\alpha} \quad (3.2.10)$$

erfüllt ist.

Beweis. Sei $h \in Lip(K^\alpha)$ nicht die Nullfunktion (sonst setzen wir $g = h$) und o.B.d.A. $0 < \varepsilon \leq 1$. Betrachte die Kugel $U_x = \{y \in K : d^\alpha(x, y) < \frac{\varepsilon}{5\|h\|_{L_\alpha}}\}$ zu jedem $x \in K$. Aus der Kompaktheit von K folgt dann die Existenz einer endlichen Menge $M = \{x_i\}_{i=1}^n$ von Punkten x_i aus K , so daß $\{U_x : x \in M\}$ eine endliche Teilüberdeckung von K ist. Sei $\lambda = \min\{d(x, y) : x, y \in M, x \neq y\}$ und o.B.d.A. $\lambda \leq 1$. Dann wähle ein β mit $\alpha < \beta \leq 1$ so nahe bei α , daß sowohl

$$\lambda^{\beta-\alpha} \leq \frac{1}{1 + \varepsilon} \quad (3.2.11)$$

als auch

$$2^{(\beta-\alpha)/\alpha} \leq 1 + \varepsilon \quad (3.2.12)$$

gilt. Für die Einschränkung $h|_M$ von h auf M ist $h|_M \in Lip(M^\beta)$ klar. Konkret schließt man aus (3.2.11) (mit einer schon oft durchgeführten Rechnung) die Abschätzung

$$\|h|_M\|_{L_\beta} \leq (1 + \varepsilon) \|h|_M\|_{L_\alpha}.$$

Für das reellwertige $h|_M \in Lip(M^\beta)$ erhält man nun aus Satz 1.1.20 eine reellwertige Fortsetzung $g \in Lip(K^\beta)$ mit $\|g\|_{L_\beta} = \|h|_M\|_{L_\beta}$, so daß insgesamt $\|g\|_{L_\beta} \leq (1 + \varepsilon) \|h\|_{L_\alpha}$ ist, und Lemma 3.2.5 liefert schließlich mit (3.2.12)

$$\|g\|_{L_\alpha} \leq 2^{(\beta-\alpha)/\alpha} \|g\|_{L_\beta} \leq (1 + \varepsilon)^2 \|h\|_{L_\alpha}.$$

Um zu zeigen, daß h durch g gleichmäßig angenähert wird, wähle zu gegebenem $x \in K$ ein $x_i \in M$ mit $x \in U_{x_i}$. Dann kann man wegen $g(x_i) = h(x_i)$ und $\|g\|_{L_\alpha} \leq 4\|h\|_{L_\alpha}$ (nach Wahl von $\varepsilon \leq 1$)

$$\begin{aligned} |g(x) - h(x)| &\leq |g(x) - g(x_i)| + |h(x_i) - h(x)| \\ &\leq (\|g\|_{L_\alpha} + \|h\|_{L_\alpha}) d^\alpha(x, y) \leq 5\|h\|_{L_\alpha} \frac{\varepsilon}{5\|h\|_{L_\alpha}} \leq \varepsilon \end{aligned}$$

abschätzen. □

Aus Lemma 3.2.4 und Lemma 3.2.6 folgt nun sofort die folgende Verallgemeinerung des Ergebnisses von de Leeuw.

Theorem 3.2.7. *Sei $Lip(K^\alpha)$ ein Raum reellwertiger Hölderfunktionen auf einem Kompaktum K . Dann ist die durch Definition 3.1.1 gegebene Abbildung ein isometrischer Isomorphismus.*

Bemerkung 3.2.8. Wie in Kapitel 1 in Bemerkung 1.1.21 bereits besprochen, kann man dieses Theorem für Hölderräume komplexwertiger Funktionen mit der obigen Beweistechnik nicht gewinnen, da der Fortsetzungssatz von McShane für komplexwertige Lipschitzfunktionen nur mit dem Zusatzfaktor $\sqrt{2}$ richtig ist. Für die Bedingung (3.2.8) des Lemmas 3.2.4 ist allerdings die (zumindest “fast”) normgleiche Fortsetzbarkeit von $h_M \in Lip(M^\beta)$ zu einem $g \in Lip(K^\beta)$ unabdingbar. Jenkins gibt (siehe Bemerkung 1.1.21) mit der Lipschitz-vier-Punkt-Eigenschaft genau diejenigen metrischen Räume an, für die der Fortsetzungssatz von McShane in der “scharfen” Form — und damit ebenso obiges Theorem — auch für die komplexwertigen Lipschitzfunktionen gilt. Der Fortsetzungssatz in seiner allgemeinen Form liefert nach der Analyse von de Leeuws Beweis zu Theorem 3.2.2 (in Bemerkung 3.2.3) die Abbildung I lediglich (aber immerhin!) als Isomorphismus.

Die sich aufnötigende Frage ist also: Ist die Abbildung I auf allgemeinen Hölderräumen $Lip(K^\alpha)$ (für kompakte K) in Wirklichkeit immer isometrisch (und wir können es mit unserer Beweistechnik nur nicht zeigen) oder deutet das Defizit in Theorem 3.2.7 tatsächlich auf Gegenbeispiele hin? Die Antwort lautet: Wir müssen uns mehr anstrengen! Und konkreter: Wenn wir uns mehr anstrengen, dann reicht die Aussage des Fortsetzungssatzes auch mit dem Zusatzfaktor $\sqrt{2}$, ja sie würde sogar mit einem beliebigen Zusatzfaktor $c \geq 1$ ausreichen! Und die Mühe lohnt sich: So werden wir am Ende (siehe Bemerkung 3.5.5) vor der grotesken Tatsache stehen, daß Lemma 3.2.6 wundersamerweise auch für komplexwertige Funktionen gilt.

3.3 Beweisvarianten für Räume komplexwertiger Lipschitzfunktionen

In diesem Abschnitt soll das Defizit des Theorems 3.2.7 von Jenkins ausgemerzt werden, denn das Ergebnis gilt auch für Räume komplexwertiger Hölderfunktionen. Als erster hat dies der uns schon bekannte J. A. Johnson (siehe Abschnitt 2.3) in seiner Dissertation gesehen, deren wichtigste Ergebnisse in [25] zusammengefaßt sind. In seinem Ansatz stützt er sich auf den Satz 1.1.22, der ja von ihm stammt, aber er greift auch auf die Ergebnisse von de Leeuw und Jenkins, insbesondere auf Satz 3.1.7 und auf Lemma 3.2.6 zurück. Bei Johnson findet sich denn auch erstmals diejenige Eigenschaft der Hölderräume auf Kompakta K , die sich im Hinblick auf allgemeine Diskussion der Dualität $\ellip(K) \cong Lip(K)$ in Abschnitt 3.5 als entscheidend erweisen wird. Sie ist nichts anderes als ein Destillat aus dem Beweis zu Lemma 3.2.6 von Jenkins und liefert (angesichts dieses Beweises) auch wieder die Eigenschaften (3.2.9) und (3.2.10).

Lemma 3.3.1. *Sei K ein kompakter metrischer Raum, $0 < \alpha < 1$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert zu jeder reellwertigen Funktion $h \in Lip(K^\alpha)$ und endlich vielen Punkten $x_i \in K$, $i = 1, \dots, n$, eine reellwertige Funktion $g \in lip(K^\alpha)$ mit $g(x_i) = h(x_i) \forall i = 1, \dots, n$, und $\|g\|_{L_\alpha} \leq (1 + \varepsilon)\|h\|_{L_\alpha}$. Im komplexen Fall gilt Analoges mit $\|g\|_{L_\alpha} \leq (\sqrt{2} + \varepsilon)\|h\|_{L_\alpha}$.*

Theorem 3.3.2. *Sei K ein kompakter metrischer Raum und $0 < \alpha < 1$. Dann ist die Abbildung $I : lip(K^\alpha)' \rightarrow Lip(K^\alpha)$ aus Definition 3.1.1 auch für Räume komplexwertiger Funktionen ein isometrischer Isomorphismus.*

Wir wollen ehrlich sein und in Würdigung der von de Leeuw und Jenkins geleisteten Arbeit einräumen, daß wir uns den größten Teil des nun folgenden Beweises sparen könnten, denn nach Bemerkung 3.2.8 folgt bereits aus dem verallgemeinerten Ansatz von de Leeuw die Tatsache, daß auch für komplexe Hölderräume die Abbildung I zumindest ein Isomorphismus ist. Dieses Ergebnis (welches explizit auch bei Jenkins nicht zu finden ist) wird im Artikel [25] von Johnson schlichtweg unterschlagen, obwohl Johnson für den komplexen Fall zunächst auch nicht mehr beweisen kann. Allerdings kommen wir so in den Genuß einer ganz anderen Sichtweise auf das Problem, die mit der Approximation großer Lipschitzfunktionen durch kleine primär nichts mehr zu tun hat, und die der mathematischen Welt womöglich auf ewig verborgen geblieben wäre, wenn Jenkins bereits die ganze Wahrheit gewußt hätte. So wollen wir denn auch auf eine kurze Darstellung von Johnsons Gedankengängen trotz der fortgeschrittenen Seitenzahl nicht verzichten. Das Sahnehäubchen indes, nämlich der Beweis, daß I tatsächlich immer und von vornherein (!) isometrisch ist, könnte man unabhängig vom Rest des Beweises auch auf das Ergebnis von Jenkins setzen (bzw. sogar vor diesem servieren). Völlig unbekannt ist uns der Beweis der Normerhaltung von I allerdings auch nicht, denn Wulbert hat ihn in analoger Form (allerdings später, wiewohl unabhängig von Johnson) im Beweis zu Lemma 2.4.4 und Satz 2.4.3 durchgeführt. Man beachte im ersten Teil des folgenden Beweises, auf welcher wundersamen Weise der Operator I plötzlich als Adjungierte einer Abbildung ins Spiel kommt und wie einfach die letztere aussieht.

Beweis von Theorem 3.3.2. Sei V_0 (bzw. U_0) der von den Punktauswertungsfunktionalen Δ_x in $Lip(K^\alpha)'$ (bzw. δ_x in $lip(K^\alpha)'$) aufgespannte Unterraum mit der (jeweils) von dort induzierten Norm. Nach Lemma 3.3.1 existiert zu jeder endlichen Menge x_i , $i = 1, \dots, n$, von Punkten in K und jedem $j = 1, \dots, n$ ein $g_j \in lip(K^\alpha)$, welches mit dem Kroneckersymbol δ_{ij} gerade $g_j(x_i) = \delta_{ij}$ erfüllt (ein $h \in Lip(K^\alpha)$ mit dieser Eigenschaft existiert nach dem Fortsetzungssatz 1.1.20). Es ist also die Menge der Punktauswertungsfunktionale in $lip(K^\alpha)'$ und (damit auch) in $Lip(K^\alpha)'$ linear unabhängig und folglich jeweils eine Basis der Räume U_0 bzw. V_0 .

Definiere nun die lineare Abbildung $T : V_0 \rightarrow U_0$ durch $T(\Delta_x) = \delta_x$. Dann ist T wohldefiniert und bijektiv und wegen $lip(K^\alpha) \subseteq Lip(K^\alpha)$ auch kontraktiv. Jetzt betrachte man die Adjungierte $T' : U_0' \rightarrow V_0'$. Nach Satz 3.1.7 gilt

$\ellip(K^\alpha)'' \cong U'_0$ und nach Satz 1.1.22 hat man $V'_0 \cong Lip(K^\alpha)$. Der erste dieser beiden Isomorphismen schränkt ein Funktional $F \in \ellip(K^\alpha)''$ einfach auf U_0 ein und es gilt $T'(F)(\Delta_x) = F(T(\Delta_x)) = F(\delta_x)$. Nach Satz 1.1.22 liefert der zweite kanonische Isomorphismus $T'(F)$ als Element des Raums $Lip(K^\alpha)''/V'_0$, welches nach eben diesem Satz als eine Funktion $f \in Lip(K^\alpha)$ erscheint mit $f(x) = T'(F)(\Delta_x)$. Hieraus folgern wir, daß modulo der beteiligten Identifikationen tatsächlich $T' = I$ mit der in Definition 3.1.1 gegebenen Abbildung $I : \ellip(K^\alpha)'' \rightarrow Lip(K^\alpha)$ gilt. (Zu sehr wundern sollte man sich darüber freilich nicht, denn der Satz 1.1.22 ging ja von der gleichen Abbildung I , nur "eine Stufe höher" auf $Lip(K^\alpha)''$, aus.)

Sei nun ein $\varphi = \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{x_i} \in U_0$ mit reellen oder komplexen λ_i und Punkten x_i in K , $i = 1, \dots, n$, gegeben. Für jedes reellwertige $h \in Lip(K^\alpha)$ und jedes $\varepsilon > 0$ liefert Lemma 3.3.1 ein $g \in \ellip(K^\alpha)$, womit man

$$|T^{-1}\varphi(h)| = \left| \sum_{i=1}^n \lambda_i h(x_i) \right| = \left| \sum_{i=1}^n \lambda_i g(x_i) \right| = |\varphi(g)| \leq \|\varphi\|' \|g\|_{L_\alpha} \leq (1 + \varepsilon) \|h\|_{L_\alpha}$$

abschätzen kann. Nebenbei folgt hieraus, daß im reellen Fall auch T^{-1} kontraktiv und damit T isometrisch, mithin $I = T'$ ein isometrischer Isomorphismus ist.

Ist $h \in Lip(K^\alpha)$ komplexwertig, so existieren (vgl. Beweis von Satz 1.1.20) reellwertige h_1 und h_2 mit $h = h_1 + ih_2$ und $\max(\|h_1\|_{L_\alpha}, \|h_2\|_{L_\alpha}) \leq \|h\|_{L_\alpha}$, so daß eingedenk der gerade durchgeführten Rechnung

$$|T^{-1}\varphi(h)| = |T^{-1}\varphi(h_1) + iT^{-1}\varphi(h_2)| \leq |T^{-1}\varphi(h_1)| + |T^{-1}\varphi(h_2)| \leq 2\|\varphi\|' \|h\|_{L_\alpha}$$

folgt. Insgesamt ist also T und damit auch I ein Isomorphismus.

Zur Isometrie von I : Wir betrachten mit der isometrischen Einbettung von $\ellip(K^\alpha)$ in $C_0(K^\alpha)$ gemäß Definition 1.1.9 und Satz 1.1.10 die Teilmengen

$$P_1 = \{\lambda \delta_x : x \in K, |\lambda| = 1\}$$

und

$$P_2 = \{\lambda(\delta_x - \delta_y)/d^\alpha(x, y) : x, y \in K, x \neq y, |\lambda| = 1\}$$

von Funktionalen aus $\ellip(K^\alpha)'$, die auf $\Phi(\ellip(K^\alpha))$ als Einschränkungen der entsprechenden Punktmaße auf \hat{K}^α wirken. Letztere bilden gerade (vgl. S. 350 in [55]) die Extremalpunktmenge der Einheitskugel von $M(\hat{K}^\alpha)$. Eine Anwendung von VIII.6.28 in [55] liefert nun die Tatsache, daß $P := P_1 \cup P_2$ alle Extremalpunkte von $B_{\ellip(K^\alpha)'}$ enthält. Da $\ellip(K^\alpha)'$ nach Satz 3.1.9 separabel ist, folgt aus dem Satz von Bessaga-Pełczyński (siehe 23.C. in [20])

$$\overline{\text{co}(P_1 \cup P_2)}^{\|\cdot\|'} = \overline{\text{co ext } B_{\ellip(K^\alpha)'}}^{\|\cdot\|'} = B_{\ellip(K^\alpha)'}$$

Hieraus schließt man für jedes $F \in \ellip(K^\alpha)''$ nach Definition von I und der Lipschitznorm $\|\cdot\|_{L_\alpha}$ (genauso wie im Beweis zu Satz 2.4.3)

$$\|F\|'' = \sup_{\varphi \in B_{\ellip(K^\alpha)'}} |F(\varphi)| = \sup_{\varphi \in \text{ext } B_{\ellip(K^\alpha)'}} |F(\varphi)| = \sup_{\varphi \in P_1 \cup P_2} |F(\varphi)| = \|I(F)\|_{L_\alpha},$$

womit I eine Isometrie ist. \square

Der obige Beweis basiert über Lemma 3.3.1 einmal auf der linearen Unabhängigkeit der Punktauswertungsfunktionale in $\text{lip}(K^\alpha)'$ und damit auf einer gewissen Reichhaltigkeit von $\text{lip}(K^\alpha)'$ bzw. $\text{lip}(K^\alpha)$, zum zweiten aber auch auf der Separabilität von $\text{lip}(K^\alpha)'$. Die erstgenannte Eigenschaft ist für beliebige Kompakta K statt für K^α mit $0 < \alpha < 1$ im allgemeinen nicht zu erwarten, wohingegen die Separabilität von $\text{lip}(K)'$ nach Satz 3.1.9 immer gilt. Damit ist analog mit dem abkoppelbaren zweiten Teil des gerade geführten Beweises die Abbildung I immer isometrisch, so daß man Korollar 3.1.8 auch gleich allgemeiner hätte formulieren können. Insbesondere Jenkins wäre mit dieser Kenntnis viel “unnötige” Arbeit erspart geblieben.

Der obige Isometrie-Beweis zeigt also, daß man die Aussage des Lemmas 3.3.1 — statt für alle (wie bei Jenkins) — lediglich für *ein* beliebiges $\varepsilon > 0$ benötigt (was Jenkins ja schon weiß). (In Abschnitt 3.5, konkret in Theorem 3.5.3 und Bemerkung 3.5.5, wird es “noch dicker kommen”!) Wir werden nun einen weiteren Beweis von Theorem 3.3.2 kennenlernen, für den die volle Schärfe von Lemma 3.3.1 auch nicht gebraucht wird. Interessanterweise “merkt” man in diesem Beweis gar nicht, ob man es mit reell- oder komplexwertigen Funktionen zu tun hat, denn eine solche Unterscheidung ist für diesen Ansatz schlichtweg nicht nötig. Die Überlegenheit dieses Beweises zu den bisher behandelten Ansätzen zeigt sich auch darin, daß hier im Gegensatz zum Beweis von Johnson noch nicht einmal die Separabilität von $\text{lip}(K^\alpha)'$ explizit benötigt wird, wiewohl diese nach Satz 3.1.9 natürlich in der Kompaktheit von K enthalten ist. Diese Tatsache wird jedoch wichtig im Hinblick auf Beweise für Verallgemeinerungen von Theorem 3.3.2, wenn man zum Beispiel nur noch lokalkompakte K betrachten möchte (vergleiche hierzu Bemerkung 1.1.11). Auf solche Verallgemeinerungen wollen wir hier nicht näher eingehen, aber auf die Literatur dazu ([50] von N. Weaver) kann man schon verweisen.

Der im folgenden diskutierte Beweis von Theorem 3.3.2 stammt von W. G. Bade, P. C. Curtis, Jr., und H. G. Dales und ist zu finden in [2]. Diese Autoren arbeiten in der Theorie der Banachalgebren und betrachten daher auch Lipschitzräume unter diesen Gesichtspunkten. Insbesondere verwenden sie also die Norm $\|\cdot\|_A$ auf $\text{Lip}(K)$ aus Satz und Definition 1.1.3, auf die übertragen das Theorem 3.3.2 ebenfalls gilt. Eigentlich sind die Autoren an diesem Theorem und an den damit verbundenen Lemmata (nämlich den auf die Norm $\|\cdot\|_A$ zugeschnittenen und analog beweisbaren Ergebnissen aus Abschnitt 3.1) auch nur im Hinblick auf ihre Implikationen für die kleinen Lipschitzräume als Banachalgebren interessiert, die hier natürlich nicht diskutiert werden sollen.

Der von Bade, Curtis und Dales vorgeschlagene Beweis von 3.3.2 ist ausgesprochen ästhetisch und darüber hinaus vergleichsweise einfach und klar (wobei bekanntlich die letzteren Eigenschaften erstaunlich oft mit der Eigenschaft der Ästhetik Hand in Hand daher kommen). Er läßt sich problemlos auf die Norm $\|\cdot\|_L$ übertragen und vereinfacht sich in diesem Fall sogar, denn Bade, Curtis und Dales müssen zum Beweis der Kontraktivität von I für die Norm $\|\cdot\|_A$ einen Umweg über den Satz von Goldstine (siehe VIII.3.17 in [55]) machen, an den wir ja in Lemma 3.1.3 nicht im entferntesten gedacht haben. Interessant ist

an diesem Beweis, daß sich die Normerhaltung von I (ähnlich wie bei de Leeuw durch die Eigenschaften der Faltungen mit Fejér-Kernen) aus der Herleitung der Surjektivität von I (und im übrigen unabhängig von den Überlegungen von Johnson) fast wie von selbst ergibt.

Der Vorteil der dem Beweis zugrundeliegenden Idee liegt schlicht und einfach darin, daß eine Inverse zur Abbildung I angegeben wird. Im Gegensatz zum Vorgehen von Wulbert im Beweis zu Satz 2.4.3 springt einem hier die Inverse fast ins Auge (und es ist diesmal auch sonnenklar, daß es tatsächlich eine ist!). Betrachtet man einfach lange genug das Ergebnis

$$\varphi(f) = \int_{\hat{K}} \Phi(f) d\mu \quad \forall f \in \text{lip}(K) \quad (3.3.1)$$

im Beweis des Lemmas 3.1.4, so wird man der Dualität gewahr, die darin besteht, daß nicht nur die Maße $\mu \in M(\hat{K})$ Funktionale auf Lipschitzfunktionen abgeben können, sondern daß umgekehrt auch Funktionen $f \in \text{lip}(K)$ mit der gleichen Formel Anlaß zu Funktionalen auf $\text{lip}(K)'$, repräsentiert durch Maße aus $M(\hat{K})$, geben. Und es hindert einen niemand daran, dies — wenn auch zunächst nur formal — für große Lipschitzfunktionen $h \in \text{Lip}(K)$, für die ja $\Phi(h)$ auch definiert ist, ebenfalls zu betrachten. Konkreter und mit einem mittlerweile angebrachten Abschied von den Hölderräumen:

Definition 3.3.3. Ist K ein kompakter metrischer Raum, so definiere die Abbildung

$$J : \text{Lip}(K) \rightarrow \text{lip}(K)''$$

durch

$$(J(h))(\varphi) = \int_{\hat{K}} \Phi(h) d\mu$$

für $h \in \text{Lip}(K)$, wenn μ gemäß 3.3.1 ein das Funktional $\varphi \in \text{lip}(K)'$ repräsentierendes Maß aus $M(\hat{K})$ ist (in den Fällen, in denen diese Zuordnung Sinn ergibt).

Das Problem mit dieser Definition liegt auf der Hand: Sie muß gerechtfertigt werden, und darin liegt die Hauptarbeit, *und* dies gelingt nicht immer, wie die Voraussetzung im nächsten Satz andeutet. Es gilt zwar

$$|(J(h))(\varphi)| \leq \|\Phi(h)\|_{\infty} \left| \int_{\hat{K}} \mathbf{1} d\mu \right| \leq \|h\|_L \|\mu\|_V = \|h\|_L \|\varphi\|',$$

also $(J(h))(\varphi) \in \text{lip}(K)''$ und $\|J(h)\| \leq \|h\|_L$, d.h. J ist kontraktiv — aber natürlich nur dann, wenn J überhaupt wohldefiniert ist, und dies ist völlig unklar.

Einen Lichtblick bieten die kleinen Lipschitzfunktionen, denn sind μ und ν zwei das Funktional φ gemäß (3.3.1) repräsentierende Maße, so gilt ja wegen (3.3.1) gerade

$$\int_{\hat{K}} \Phi(f) d(\mu - \nu) = 0 \quad \forall f \in \text{lip}(K).$$

Mit dieser Tatsache im Gepäck gelingt es nun Bade, Curtis und Dales, die Wohldefiniertheit von J auf ganz $Lip(K)$ zu zeigen, jedoch erwartungsgemäß nur dann, wenn $Lip(K)$ sich so “angenehm” wie ein Hölderraum “verhält”. Dafür greifen sie heftigst auf die von de Leeuw geleistete Vorarbeit in Gestalt von Satz 3.1.7 zurück und eigentlich auch auf das Ergebnis 3.3.1 von Jenkins, wobei sie dieses lieber gleich selbst beweisen. Hier wird Lemma 3.3.1 wieder nur für *ein* beliebiges $\varepsilon > 0$ benötigt, diesmal aber allgemein für komplexwertige Funktionen, was mit dem Faktor $\sqrt{2} + \varepsilon$ ja auch kein Problem ist. Bade, Curtis und Dales zeigen jedoch sogar die Existenz eines $f \in Lip(K) \subseteq lip(K^\alpha)$ mit den entsprechenden Eigenschaften und $\varepsilon = 1$. Sie greifen dafür nicht auf den Satz 1.1.20 von McShane zurück, was zumindest mit der Beweistechnik von Jenkins (siehe Beweis zu Lemma 3.2.6) auch nicht zu machen wäre. Stattdessen imitieren sie den Beweis von McShane, um ihr stärkeres Ergebnis zu erhalten (welches übrigens für komplexwertige Funktionen wieder bis auf einen Faktor $\sqrt{2} + \varepsilon$ und für reellwertige bis auf $1 + \varepsilon$ verbessert werden könnte).

Satz 3.3.4. *Für einen kompakten metrischen Raum K existiere eine Konstante $c > 1$, so daß es zu jeder Funktion $h \in Lip(K)$ und endlich vielen Punkten $x_i \in K$, $i = 1, \dots, n$, eine Funktion $g \in lip(K)$ gibt, welche $g(x_i) = h(x_i)$ für alle $i = 1, \dots, n$ und $\|g\|_L \leq c \|h\|_L$ erfüllt.*

Gilt nun für ein reguläres Borelmaß $\mu \in M(\hat{K})$

$$\int_{\hat{K}} \Phi(g) d\mu = 0 \quad \forall g \in lip(K),$$

so gilt auch

$$\int_{\hat{K}} \Phi(h) d\mu = 0 \quad \forall h \in Lip(K).$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert mit der gleichen Argumentation wie in den Beweisen zu Lemma 3.1.6 und Satz 3.1.7 (man beachte, daß dort — im Gegensatz zum Existenzbeweis für Lemma 3.1.4 — die lip -Bedingung an keiner Stelle eingeht) ein Maß $\eta \in M(K)$ mit endlichem Träger $A \subseteq K$ und der Eigenschaft

$$\left| \int_{\hat{K}} \Phi(h) d\mu - \int_K h d\eta \right| \leq \varepsilon \|h\|_L \quad \forall h \in Lip(K).$$

Wähle nun ein (beliebiges komplexwertiges) $h \in Lip(K)$. Dann existiert nach der ersten Voraussetzung ein $g \in lip(K)$ mit $g|_A = h|_A$ und $\|g\|_L \leq c \|h\|_L$, mithin

$$\left| \int_{\hat{K}} \Phi(g) d\mu - \int_K g d\eta \right| \leq \varepsilon \|g\|_L \leq c\varepsilon \|h\|_L.$$

Da aber nach der ersten Annahme $\int_K g d\eta = \int_K h d\eta$ und nach der zweiten $\int_{\hat{K}} \Phi(g) d\mu = 0$ ist, folgt

$$\left| \int_{\hat{K}} \Phi(h) d\mu \right| \leq (c + 1)\varepsilon \|h\|_L$$

und damit wie gewünscht $\int_{\hat{K}} \Phi(h) d\mu = 0$. □

Neben der Tatsache, daß der gerade bewiesene Satz die Wohldefiniertheit von J liefert, an der wir ja interessiert waren, ist natürlich auch schon die Aussage selbst bemerkenswert. Wie schon Lemma 3.3.1 deutet sie (unter der angegebenen Voraussetzung) einmal mehr auf eine gewisse "Größe" des kleinen Lipschitzraums $\text{lip}(K)$ hin und besagt diesmal, lax gesprochen, daß der Annilator von $\text{lip}(K)$ als Unterraum von $C_0(\hat{K})$ so "stark" ist, daß unter ihm auch $\text{Lip}(K)$ als Unterraum von $C^b(\hat{K})$ noch verschwindet. Anders formuliert besagt das Ergebnis, daß ein Funktional auf $\text{lip}(K)$ mit einer gemäß (3.3.1) gegebenen Gestalt eindeutig von einem Funktional auf $\text{Lip}(K)$ der gleichen Gestalt herrührt. Wir werden in Abschnitt 4.1 auf dieses Phänomen unter einem anderen Gesichtspunkt (siehe S. 127 ff) noch einmal zurückkommen.

Zusammen mit der bereits (im Anschluß an Definition 3.3.3) gezeigten Kontraktivität von J und der schon lange (Lemma 3.1.3) bekannten Kontraktivität von I muß jetzt nur noch verifiziert werden, daß J tatsächlich die Inverse von I ist. Dies ist aber nun sehr einfach. Man muß nur bedenken, daß das Punktmaß μ_x auf \hat{K} an der Stelle $x \in K$ natürlich ein gemäß Lemma 3.1.4 repräsentierendes Maß für $\delta_x \in \text{lip}(K)'$ ist, so daß nach Definition von I und J

$$I(J(h))(x) = J(h)(\delta_x) = \int_{\hat{K}} \Phi(h) d\mu_x = h(x) \quad \forall x \in K$$

gilt und I surjektiv mit der Rechtsinversen J ist. Hieraus kann man natürlich noch nicht schließen — wie sehr Bade, Curtis und Dales diesen Eindruck auch vermitteln mögen — daß J sofort die Linksinverse von I ist. Dies folgt jedoch aus der uns schon lange bekannten Injektivität von I mit Korollar 3.1.8. Wir notieren das Bewiesene in der allgemeinsten Form.

Theorem 3.3.5. *Besitzt der metrische Raum K die in Satz 3.3.4 angegebene Eigenschaft, so ist die in 3.1.1 definierte Abbildung $I : \text{lip}(K)'' \rightarrow \text{Lip}(K)$ ein isometrischer Isomorphismus.*

Natürlich wäre dieses Theorem einigermaßen leblos, wenn wir nicht (nach Lemma 3.3.1) wüßten, daß metrische Räume, versehen mit Höldermetriken die in Satz 3.3.4 genannte Eigenschaft haben — und wir hätten nicht die verallgemeinerten Höldermetriken definiert, wenn diese sich nicht auch so verhielten. Man sieht, daß es sich lohnt, weiter auf dieser Eigenschaft und der damit verbundenen in Lemma 3.3.1 herumzureiten, und genau das wird in Abschnitt 3.5 getan. Schließlich hätte man ja gerne noch eine notwendige Bedingung dafür, daß I ein isometrischer Isomorphismus ist. Und um diese zu sehen — natürlich sehen wir sie schon die ganze Zeit — wird eine vierte (aber auch letzte!) Variante diskutiert, obiges Theorem zu beweisen — eigenartigerweise aber wieder nur für den reellen Fall. Am Schluß, beim Einsammeln aller Ergebnisse, wird klar, daß wir damit auch gut auskommen.

3.4 Die Kantorovich-Rubinstein-Norm

Das übergeordnete Ziel im weiteren Verlauf von Kapitel 3 ist es, der Natur der Dualität $\text{lip}(K)'' \cong \text{Lip}(K)$ ganz auf den Grund zu gehen und alle kompakten metrischen Räume, für die diese Dualität besteht, vollständig zu charakterisieren. Zu diesem Zweck wollen wir eine Idee von L. G. Hanin aus dem Jahre 1992, zu finden in [15], [16] und [17], zu verstehen versuchen. Hanin hatte Kenntnis von allen bisher in diesem Kapitel behandelten Artikeln, angefangen von de Leeuw [33] bis hin zu Bade, Curtis und Dales [2], und darüber hinaus studierte er frühere Arbeiten des Nobelpreisträgers L. V. Kantorovich (teilweise mit dem Ko-Autor G. S. Rubinstein), deren wichtigste Ergebnisse im Klassiker [29, S. 225–237] über Funktionalanalysis zusammengefaßt sind.

Die Idee von Hanin ist motiviert durch den Rieszschen Darstellungssatz (siehe II.2.5 in [55]), der ja den Dualraum von $C(K)$ für ein Kompaktum K als den Banachraum $(M(K), \|\cdot\|_V)$ von regulären Borelmaßen auf K , versehen mit der Variationsnorm $\|\cdot\|_V$, identifiziert. Daher ist es alles andere als abwegig, die Frage aufzuwerfen, ob es für den Dualraum des Raums $\text{lip}(K)$ von spezielleren stetigen Funktionen nicht auch eine Darstellung über Maße auf K gibt, zum Beispiel indem man die Variationsnorm durch eine andere geeignete ersetzt. So war es sicher eine kleine Sternstunde für die Mathematik, als Hanin feststellte, daß diese Frage im Jahre 1942, also bereits 50 Jahre bevor sie gestellt wurde, schon fast beantwortet war — und noch dazu im Hinblick auf die Dualität $\text{lip}(K)'' \cong \text{Lip}(K)$! Natürlich hatte sich der Autor, Kantorovich, damals, als er seine Kantorovich-Rubinstein-Norm definierte, für etwas ganz anderes interessiert, aber so ist es nun mal in der Mathematik.

Der bisherige Umfang dieser Arbeit *verbietet* eine umfassende Darstellung der Kantorovich-Rubinstein-Theorie, die gleichwohl lohnenswert wäre und auf den Seiten 225–237 in [29] ausführlich dargestellt ist. So wird im weiteren Verlauf das, was man zum Verständnis der Verzahnung dieser Theorie mit unserer Theorie über Lipschitzräume wissen *muß*, so verdichtet wie möglich beschrieben. Im Hinterkopf haben sollte man dabei die folgenden beiden Defizite der Variationsnorm auf $M(K)$: Erstens “sieht” diese Norm die Metrik auf K “praktisch” nicht, da sie nach Definition (siehe [55, S. 21/22]) nur von der Topologie auf K abhängt, mithin invariant unter allen Metriken ist, die die gleiche Topologie auf K erzeugen. So kommt es auch, daß für verschiedene Punktmaße δ_x und δ_y auf K stets $\|\delta_x - \delta_y\|_V = 2$ gilt. Wir werden demgegenüber sehen, daß die Kantorovich-Rubinstein-Norm $\|\cdot\|_K$ durch $\|\delta_x - \delta_y\|_K = d(x, y) \forall x, y \in K$ die Metrik d auf K reproduziert. Das zweite Defizit des Raums $(M(K), \|\cdot\|_V)$ besteht darin, daß die Beschreibung seines Dualraums, der auf komplizierte L^∞ -Räume führt, sehr schwierig und unanschaulich ist. Der Dualraum von $(M(K), \|\cdot\|_K)$ hingegen ist uns bereits seit 1.1.2 bekannt.

Kantorovich betrachtet in [29] das folgende sehr anschauliche *Transportproblem*. Es sei eine Menge K von n Orten gegeben, die der Einfachheit halber mit Zahlen $K = \{1, \dots, n\}$ bezeichnet seien. An diesen Orten seien entweder Produzenten oder Konsumenten eines gewissen Produkts angesiedelt. Dabei stehe

die Zahl ν_i für die pro Jahr am Ort i produzierten oder konsumierten Einheiten des Produkts, wobei das Vorzeichen von ν_i mit $\nu_i \leq 0$ Produktion und mit $\nu_i > 0$ Konsum andeutet. Sind mit $\nu_i^+ = \max\{\nu_i, 0\}$ und mit $\nu_i^- = -\min\{\nu_i, 0\}$ bezeichnet, so kann man den Vektor $(\nu_i^-)_{i=1}^n$ als Anfangszustand (Herstellerebene) und $(\nu_i^+)_{i=1}^n$ als Endzustand (Verbraucherebene) auffassen. (Stellt man sich vor, daß an den Orten in K sowohl produziert als auch konsumiert wird, so stellen die ν_i^- Produktionsüberschüsse und die ν_i^+ Defizite dar.) Insgesamt soll genauso viel produziert wie konsumiert werden (bzw. die Überschüsse und die Defizite sollen sich gerade ausgleichen), so daß man von

$$\sum_{i=1}^n (\nu_i^+ - \nu_i^-) = \sum_{i=1}^n \nu_i = 0 \quad (3.4.1)$$

ausgeht. Vom Ort i zum Ort j sollen pro Jahr ψ_{ij} Einheiten des Produkts transportiert werden, womit durch die Matrix $\psi = (\psi_{ij})$ ein Transportplan gegeben ist. Es werden also pro Jahr $\sum_{i=1}^n \psi_{ik}$ Produkteinheiten vom Ort k importiert und $\sum_{j=1}^n \psi_{kj}$ Einheiten exportiert, und die Differenz ist gerade die hergestellte oder benötigte Produktmenge (bzw. der Überschuß oder das Defizit)

$$\sum_{i \in K} \psi_{ik} - \sum_{j \in K} \psi_{kj} = \nu_k^+ - \nu_k^- = \nu_k. \quad (3.4.2)$$

Der Transportplan vermittelt also den Übergang vom Anfangszustand $(\nu_i^-)_{i=1}^n$ zum Endzustand $(\nu_i^+)_{i=1}^n$. Belaufen sich die Kosten für den Transport einer Einheit des Produktes vom Ort i zum Ort j auf d_{ij} Geldeinheiten, so betragen die gesamten Transportkosten pro Jahr

$$c(\psi) = \sum_{i \in K} \sum_{j \in K} d_{ij} \psi_{ij} \quad (3.4.3)$$

Geldeinheiten, und es ist klar, daß man nach einem Transportplan ψ sucht, für den $c(\psi)$ minimal wird.

Man weiß aus der unter anderem von Kantorovich vorangetriebenen Theorie der linearen Programmierung, daß ein solcher Transportplan immer existiert und auch — was hier nicht unwichtig sein dürfte — wie man ihn errechnet. In der Praxis wird man getrost davon ausgehen können, daß ein “nichttrivialer” Transport immer etwas kostet und daß Spediteure keine unsinnigen Transportwege wählen. Nimmt man weiter an, daß eine Reise von einem Ort zu einem anderen genauso teuer ist wie die Rückfahrt, so stellt die Matrix (d_{ij}) eine Metrik auf K dar.

Auf diese Weise wird man ganz natürlich auf eine Verallgemeinerung des Transportproblems geführt, wenn man die beteiligten Orte nicht mehr zählen möchte oder kann, zum Beispiel wenn sie Punkte in einem unendlichen kompakten metrischen Raum sind. Allgemein hat man nun ein von Kantorovich untersuchtes *Massentransportproblem* vorliegen. An die Stelle der Vektoren $(\nu_i^-)_{i=1}^n$ und $(\nu_i^+)_{i=1}^n$ treten nun nichtnegative Maße ν_- und ν_+ auf den Borelmengen $\mathcal{B}(K)$ von K , wobei man analog zu oben von einer durch ν_- gegebenen Anfangsverteilung überschüssiger Masse auf K (gemessen auf den Borelmengen von K)

durch “Umschichten” zu einer Endverteilung ν_+ dieser Masse kommen möchte. Daß dabei nichts verloren geht, wird wie in (3.4.1) durch $\nu_-(K) = \nu_+(K)$ sichergestellt, so daß für das Maß

$$\nu := \nu_+ - \nu_- \in M_0(K) := \{\mu \in M(K) : \mu(K) = 0\}$$

gilt. Umgekehrt gibt natürlich jedes Maß $\nu \in M_0(K)$ über seine negative und positive Variation ν_- und ν_+ (siehe Satz A.4.4 in [55]: Hahn-Jordan-Zerlegung) Anlaß zu solchen Anfangs- und Endverteilungen. Für eine Verschiebung der Masse zwischen diesen Zuständen sorgt nun ein nichtnegatives Maß $\psi \in M(K^2)$, welches mit $\psi(e_1, e_2)$ die von der Menge e_1 in die Menge e_2 transportierte Masse angibt, aber natürlich so, daß es über

$$\psi(K, e) - \psi(e, K) = \nu_+(e) - \nu_-(e) = \nu(e) \quad \forall e \in \mathcal{B}(K) \quad (3.4.4)$$

analog zu (3.4.2) auch wirklich zwischen Anfangs- und Endzustand “vermittelt”. Die Familie aller solcher Maße für ein festes $\nu \in M_0(K)$ sei mit Ψ_ν bezeichnet. Der Aufwand für den Transport von Masse zwischen den Punkten $x, y \in K$ wird mit $d(x, y)$ durch die Metrik d auf K gegeben, so daß

$$c(\psi) = \int_{K^2} d(x, y) d\psi(x, y) \quad (3.4.5)$$

als “verschmiertes” Analogon an die Stelle von (3.4.3) tritt.

Wieder versucht man, den Aufwand $c(\psi)$ für den Massentransport so klein wie möglich zu machen, und Kantorovich zeigt, daß es einen Transport ψ_m , für den $c(\psi_m)$ minimal wird, immer gibt. Er entwickelt zudem (wie im diskreten Fall) notwendige und hinreichende Bedingungen für ein solches ψ und baut dafür seine Theorie auf, welche ihn (an dieser Stelle scheint dies fast mysteriös) auch in die Welt der Lipschitzräume führt. Wie schon angekündigt tritt dabei eine neue Norm für Maße auf K in Erscheinung, und hier ist sie:

$$\|\nu\|_K^0 := \inf_{\psi \in \Psi_\nu} \int_{K^2} d(x, y) d\psi(x, y) \quad \forall \nu \in M_0(K). \quad (3.4.6)$$

Der geringstmögliche Aufwand für den von $\nu \in M_0(K)$ provozierten Massentransport auf K gibt also Anlaß zu einer Norm auf $M_0(K)$, der Kantorovich-Rubinstein-Norm $\|\cdot\|_K^0$, die im folgenden mit KR-Norm abgekürzt sei. Wir wollen die Normeigenschaften hier nicht nachrechnen, aber darauf hinweisen, daß auch Kantorovich die Tatsache, daß $\|\cdot\|_K^0$ nicht nur eine Halbnorm ist, erst zeigen konnte, nachdem er (mit einer Variante von Theorem 3.4.5) die Verbindung zu Lipschitzräumen hergestellt hatte (natürlich ohne das noch nicht Bewiesene vorher benutzt zu haben, wie man sich in [29] überzeugen kann).

Man sieht leicht ein, daß mit

$$\psi_\nu(e, e') := \frac{\nu_-(e)\nu_+(e')}{\nu_+(K)} \quad \forall e, e' \in \mathcal{B}(K) \quad (3.4.7)$$

nach Fortsetzung auf $\mathcal{B}(K^2)$ für jedes $\nu \in M_0(K)$ ein $\psi_\nu \in \Psi_\nu$ definiert ist (ein normalisiertes Produktmaß tut’s also schon). Für den Träger $\text{supp } \psi_\nu$

gilt natürlich $\text{supp } \psi_\nu = (\text{supp } \nu_-) \times (\text{supp } \nu_+)$, und weiter ist die Gleichheit $\psi_\nu(K, K) = \nu_-(K) = \nu_+(K)$ klar. Hieraus folgt die Abschätzung

$$\int_{K^2} d(x, y) d\psi_\nu(x, y) \leq \nu_+(K) \max\{d(x, y) : x \in \text{supp } \nu_-, y \in \text{supp } \nu_+\}$$

und mit $\|\nu\|_V = |\nu|(K) = \nu_+(K) + \nu_-(K)$ (siehe Satz A.4.4 in [55]) damit das grundlegende

Lemma 3.4.1. *Für jedes $\nu \in M_0(K)$ gilt*

$$\|\nu\|_K^0 \leq \nu_+(K) \text{diam}(\text{supp } \nu) \leq \frac{1}{2} \|\nu\|_V \text{diam}(K).$$

Dieses Ergebnis stellt eine erste Verbindung der KR-Norm mit der Metrik auf K her (welche für die Variationsnorm schlichtweg nicht existieren kann, da diese ja über die Topologie bzw. sogar nur über die Borelmengen definiert ist), und speziell folgt das

Korollar 3.4.2. *Für das Maß $\delta_x - \delta_y \in M_0(K)$, $x, y \in K$, gilt*

$$\|\delta_x - \delta_y\|_K^0 \leq d(x, y).$$

Das nächste Lemma ist essentiell für alles weitere und läßt mit Blick auf Satz 3.1.7 bereits Gutes hoffen.

Lemma 3.4.3. *Die Maße mit endlichem Träger liegen dicht in $M_0(K)$ bezüglich der Kantorovich-Rubinstein-Norm.*

Da der Beweis weder schwer noch lang ist und genau das funktioniert, was man gerne täte, sei er hier festgehalten.

Beweis. Man zerlegt für ein gegebenes $\nu \in M_0(K)$ das Kompaktum K disjunkt in Borelmengen e_i , $i = 1, \dots, n$, vom Durchmesser höchstens $\frac{\varepsilon}{\|\nu\|_V}$ und definiert das Maß

$$\nu_p := \sum_{i=1}^n \nu(e_i) \delta_{x_i},$$

wenn $x_i \in e_i$ für $i = 1, \dots, n$ beliebig gewählt sind. Dann ist ν_p ein Maß mit endlichem Träger und in $M_0(K)$, denn es ist

$$\nu_p(K) = \sum_{i=1}^n \nu(e_i) = \nu(K) = 0.$$

Nun beobachtet man, daß die Maße ν_i , $i = 1, \dots, n$, definiert durch

$$\nu_i(e) = \nu(e \cap e_i) - \nu(e_i) \delta_{x_i}(e) \quad \forall e \in \mathcal{B}(K),$$

in $M_0(K)$ sind und die Eigenschaft

$$\sum_{i=1}^n \nu_i = \nu - \nu_p$$

besitzen. Weiter ist für jedes i der Träger von ν_i im Abschluß von e_i enthalten, so daß $\text{diam}(\text{supp } \nu_i) \leq \frac{\varepsilon}{\|\nu\|_V}$ und

$$(\nu_i)_+(K) = (\nu_i)_+(e_i) \leq \nu_+(e_i) - (-\nu_-(e_i)) = \nu_+(e_i) + \nu_-(e_i)$$

gilt, womit man aus Lemma 3.4.1

$$\|\nu_i\|_K^0 \leq \frac{\varepsilon}{\|\nu\|_V} (\nu_+(e_i) + \nu_-(e_i)) \quad \forall i = 1, \dots, n$$

schließt. Und jetzt rechnet man

$$\begin{aligned} \|\nu - \nu_p\|_K^0 &= \left\| \sum_{i=1}^n \nu_i \right\|_K^0 \leq \sum_{i=1}^n \|\nu_i\|_K^0 \leq \frac{\varepsilon}{\|\nu\|_V} \sum_{i=1}^n (\nu_+(e_i) + \nu_-(e_i)) \\ &= \frac{\varepsilon}{\|\nu\|_V} (\nu_+(K) + \nu_-(K)) = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Im nächsten Theorem wird nun die angestrebte Verbindung zwischen den Maßen mit der KR-Norm und den Lipschitzräumen hergestellt. Kantorovich hat dieses Theorem für $(M_0(K), \|\cdot\|_K^0)$ und $(\text{Lip}_0(K), L(\cdot))$ bewiesen. Es ist aber nicht schwer, das Ergebnis gleich auf $(\text{Lip}(K), \|\cdot\|_L)$ zu übertragen, und das werden wir auch tun, nachdem die dafür passende Definition der KR-Norm auf ganz $M(K)$ vorgenommen wurde.

Satz und Definition 3.4.4. Für einen kompakten metrischen Raum K und $\mu \in M(K)$ setze

$$\|\mu\|_K = \inf_{\nu \in M_0(K)} (\|\nu\|_K^0 + \|\mu - \nu\|_V).$$

Dann ist $\|\cdot\|_K$ eine Norm, die Kantorovich-Rubinstein-Norm auf $M(K)$. Sie ist auf $M_0(K)$ äquivalent zur klassischen KR-Norm $\|\cdot\|_K^0$ und mit dieser im Falle $\text{diam}(K) \leq 2$ sogar identisch. Speziell gilt $\|\delta_x\|_K = 1 \quad \forall x \in K$, und der durch die Punktmaße aufgespannte Unterraum liegt dicht in $M(K)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_K$. Schließlich sind $(M_0(K), \|\cdot\|_K^0)$ und $(M(K), \|\cdot\|_K)$ für unendliches K nicht vollständig.

Beweis. Die Normeigenschaft sieht man durch kurzes Innehalten ein. Hat man ein $\mu \in M_0(K)$, so bemerkt man einerseits

$$\|\mu\|_K \leq \|\mu\|_K^0 + \|\mu - \mu\|_V = \|\mu\|_K^0$$

und andererseits mit Lemma 3.4.1 und beliebigem $\nu \in M_0(K)$

$$\|\mu\|_K^0 \leq \|\nu\|_K^0 + \|\mu - \nu\|_K^0 \leq \|\nu\|_K^0 + \frac{1}{2} \text{diam}(K) \|\mu - \nu\|_V,$$

also $\|\mu\|_K^0 \leq \max(1, \text{diam}(K)/2) \|\mu\|_K$. Hieraus folgt die Äquivalenz und darüberhinaus für $\text{diam}(K) \leq 2$ sogar die Gleichheit der beiden Normen.

Für die Punktmaße sieht man sofort $\|\delta_x\|_K \leq 1$, und weiter gilt mit jedem $\nu \in M_0(K)$ die Tatsache $(\delta_x - \nu)(K) = 1$, also sicher $\|\delta_x - \nu\|_V = |\delta_x - \nu|(K) \geq 1$ und daher $\|\delta_x\|_K = 1$. Daß der durch die Punktmaße aufgespannte Unterraum dicht in $(M(K), \|\cdot\|_K)$ liegt, folgt unmittelbar aus Lemma 3.4.3. Ist nämlich ein Maß $\mu \in M(K) \setminus M_0(K)$ gegeben, so ist für ein beliebiges $x \in K$ offenbar $\mu' = \mu - \mu(K)\delta_x \in M_0(K)$. Nun gibt es aber ein Maß $\mu'_p \in M_0(K)$ mit endlichem Träger, so daß $\|\mu' - \mu'_p\|_K^0 \leq \varepsilon$ gilt. Also ist (unter Beachtung der Äquivalenz der Normen $\|\cdot\|_K^0$ und $\|\cdot\|_K$ auf $M_0(K)$) das Maß $\mu(K)\delta_x + \mu'_p \in M(K)$ mit endlichem Träger eine Approximation von μ bezüglich $\|\cdot\|_K$.

Jetzt muß nur noch gezeigt werden, daß $(M_0(K), \|\cdot\|_K^0)$ und $(M(K), \|\cdot\|_K)$ für unendliches K nicht vollständig sind. Zunächst ist $(M_0(K), \|\cdot\|_V)$ ein abgeschlossener Unterraum von $(M(K), \|\cdot\|_V)$ und damit selbst ein Banachraum. Denn wäre ein $\mu \in M(K) \setminus M_0(K)$ Häufungspunkt einer Folge $(\mu_n) \subseteq M_0(K)$, so hätte man für alle $n \in \mathbb{N}$ stets $(\mu - \mu_n)(K) = \mu(K) \neq 0$, also auch $\|\mu - \mu_n\|_V \geq |\mu(K)| > 0$ im Widerspruch zu $\|\mu - \mu_n\|_V \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Aus Lemma 3.4.1 folgt nun, daß die Identität

$$Id : (M_0(K), \|\cdot\|_V) \rightarrow (M_0(K), \|\cdot\|_K^0)$$

stetig ist. Sie ist also nach dem Satz über die offene Abbildung (siehe konkret das Korollar IV.3.5 in [55]) genau dann ein Isomorphismus, wenn $(M_0(K), \|\cdot\|_K^0)$ vollständig ist. Gleiches gilt für $(M(K), \|\cdot\|_K)$. Da K als kompakt und unendlich vorausgesetzt ist, existiert eine Cauchyfolge $(x_i)_{i \geq 0}$ mit paarweise verschiedenen $x_i \in K$. Damit ist wegen Lemma 3.4.2 auch (δ_{x_i}) eine Cauchyfolge in $(M(K), \|\cdot\|_K)$, obwohl stets $\|\delta_{x_i} - \delta_{x_j}\|_V = 2$ für $i \neq j$ gilt. Folglich ist $(M(K), \|\cdot\|_K)$ kein Banachraum, und Gleiches schließt man für $(M_0(K), \|\cdot\|_K^0)$, wenn man die Cauchyfolge $(\delta_{x_i} - \delta_{x_{i-1}})_{i \geq 1} \subseteq M_0(K)$ ansieht. \square

Da wir in diesem Kapitel isometrische Isomorphismen zwischen Lipschitzräumen betrachten und es hierfür aufgrund von Bemerkung 1.1.7 bzw. Satz 1.1.8 reicht, von $\text{diam}(K) \leq 2$ auszugehen, ist es nach dem gerade erhaltenen Ergebnis nur anständig, dies auch zu tun. So brauchen wir angesichts des obigen Satzes nicht zwischen $\|\cdot\|_K^0$ und $\|\cdot\|_K$ auf $M_0(K)$ unterscheiden und können auch im folgenden stets von nur *einer* Kantorovich-Rubinstein-Norm sprechen.

Nun treten endlich — wie schon lange angekündigt — die Lipschitzräume auf den Plan, und zwar über die Dualität, die analog in Definition 3.3.3 von Bade, Curtis und Dales bereits betrachtet wurde. Man beachte im Beweis des Theorems, wie über den Umweg (3.4.4) ganz natürlich eine Lipschitzkonstante ins Spiel kommt.

Theorem 3.4.5. *Die Dualität*

$$\langle h, \mu \rangle = \int_K h d\mu \quad (h \in \text{Lip}(K), \mu \in M(K))$$

vermittelt einen isometrischen Isomorphismus j zwischen dem Lipschitzraum $\text{Lip}(K)$ und dem Dualraum $(M(K), \|\cdot\|_K)'$.

Beweis. Die Wohldefiniertheit von j ergibt sich aus den nachfolgenden Abschätzungen, und die Linearität von j ist klar. Seien also $h \in Lip(K)$ sowie $\mu \in M(K)$ gegeben und weiter $\nu \in M_0(K)$ und $\psi \in \Psi_\nu$ beliebig. Dann gilt

$$j(h)(\mu) = \int_K h d\mu = \int_K h(x) d(\mu - \nu)(x) + \int_K h(x) d\nu(x)$$

und damit zunächst

$$\left| \int_K h(x) d(\mu - \nu)(x) \right| \leq \|h\|_\infty \|\mu - \nu\|_V \quad \forall \nu \in M_0(K). \quad (3.4.8)$$

Weiter rechnet man nach Wahl von $\psi \in \Psi_\nu$

$$\begin{aligned} \int_K h(x) d\nu(x) &= \int_K h(x) d\psi(K, x) - \int_K h(x) d\psi(x, K) \\ &= \int_{K^2} h(x) d\psi(y, x) - \int_{K^2} h(y) d\psi(y, x) \\ &= \int_{K^2} (h(x) - h(y)) d\psi(y, x), \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

also nach Definition der Lipschitzkonstanten

$$\left| \int_K h(x) d\nu(x) \right| \leq L(h) \int_{K^2} d(x, y) d\psi(x, y) \quad \forall \psi \in \Psi_\nu \quad (3.4.10)$$

und damit

$$\left| \int_K h(x) d\nu(x) \right| \leq L(h) \|\nu\|_K^0. \quad (3.4.11)$$

Insgesamt folgt aus (3.4.8) und (3.4.11) nach Definition der Lipschitznorm $\|\cdot\|_L$ und der KR-Norm $\|\cdot\|_K$ die Tatsache $|j(h)(\mu)| \leq \|h\|_L \|\mu\|_K$, woraus man $\|j(h)\| \leq \|h\|_L$ und $\|j\| \leq 1$ schließt.

Die einfachsten Maße $\delta_x \in M(K)$ und $\delta_x - \delta_y \in M_0(K)$, $x, y \in K$, reichen aus, um auch die umgekehrte Abschätzung zu zeigen. Zunächst gilt

$$|j(h)(\delta_x)| = \left| \int_K h(t) d\delta_x \right| = |h(x)| \quad \forall x \in K,$$

also wegen $\|\delta_x\|_K = 1 \quad \forall x \in K$

$$\|h\|_\infty = \sup_{x \in K} |j(h)(\delta_x)| \leq \|j(h)\|.$$

Zweitens hat man

$$|j(h)(\delta_x - \delta_y)| = \left| \int_K h(t) d(\delta_x - \delta_y)(t) \right| = |h(x) - h(y)| \quad \forall x, y \in K,$$

und hieraus folgt mit Lemma 3.4.2

$$L(h) = \sup_{\substack{x, y \in K \\ x \neq y}} \frac{|j(h)(\delta_x - \delta_y)|}{d(x, y)} \leq \sup_{\substack{x, y \in K \\ x \neq y}} \frac{|j(h)(\delta_x - \delta_y)|}{\|\delta_x - \delta_y\|_K} \leq \|j(h)\|.$$

Insgesamt ist damit j als isometrisch nachgewiesen.

Zum Beweis der Surjektivität von j sei ein Funktional $\ell \in (M(K), \|\cdot\|_K)'$ gegeben. Wir betrachten die durch

$$h(x) = \ell(\delta_x) \quad \forall x \in K$$

definierte Funktion h auf K . Dann gilt für $x, y \in K$

$$|h(x) - h(y)| = |\ell(\delta_x - \delta_y)| \leq \|\ell\| \|\delta_x - \delta_y\|_K \leq \|\ell\| d(x, y)$$

nach Lemma 3.4.2 und weiter $|h(x)| = |\ell(\delta_x)| \leq \|\ell\|$ wegen $\|\delta_x\|_K = 1 \quad \forall x \in K$. Also folgt $h \in Lip(K)$, und es gilt nach Definition von j

$$j(h)(\delta_x) = h(x) = \ell(\delta_x) \quad \forall x \in K,$$

so daß $j(h)$ und ℓ auf dem durch die Maße mit endlichem Träger aufgespannten Unterraum von $M(K)$ übereinstimmen. Da dieser Unterraum nach Satz 3.4.4 dicht in $(M(K), \|\cdot\|_K)$ liegt, folgt $j(h) = \ell$. \square

Mit dem Beweis dieses Theorems sind wir nun in der glücklichen Lage, zeigen zu können, daß die Ungleichung in Lemma 3.4.2 sogar eine Gleichheit ist, daß man also über die KR-Norm die Metrik auf K zurückgewinnt. Zusammen mit dem Theorem haben wir damit als Abrundung dieser Einführung in die Kantorovich-Rubinstein-Theorie die beiden einleitend angesprochenen entscheidenden "Vorteile" der KR-Norm gegenüber der Variationsnorm eingesehen.

Korollar 3.4.6. *Für alle $x, y \in K$ gilt*

$$\|\delta_x - \delta_y\|_K^0 = d(x, y).$$

Beweis. Seien $x_0, y_0 \in K$ gegeben. Für das Punktmaß $\psi := \delta_{(y_0, x_0)}$ auf K^2 mit

$$\psi(e, e') = \delta_{y_0}(e) \delta_{x_0}(e') \quad \forall e, e' \in \mathcal{B}(K)$$

sieht man schnell $\psi \in \Psi_{(\delta_{x_0} - \delta_{y_0})}$ ein (vgl. (3.4.7)), und weiter ist natürlich

$$\int_{K^2} d(x, y) d\psi(x, y) = d(x_0, y_0).$$

Hieraus folgt mit $\nu = \delta_{x_0} - \delta_{y_0}$ in (3.4.11) nach Definition der KR-Norm

$$\left| \int_K h(x) d(\delta_{x_0} - \delta_{y_0})(x) \right| \leq L(h) \|\delta_{x_0} - \delta_{y_0}\|_K^0 \leq d(x_0, y_0)$$

für jedes $h \in Lip(K)$ mit $L(h) \leq 1$ (ohne hierfür auf Lemma 3.4.2 angewiesen zu sein). Und jetzt zeigen wir einfach, daß für die spezielle Funktion h_0 , definiert durch

$$h_0(x) = d(x, y_0) \quad \forall x \in K,$$

mit $L(h_0) \leq 1$ aus dieser Ungleichungskette eine Gleichungskette wird und sind fertig. Wie in (3.4.9) gilt aber

$$\int_K h_0(x) d(\delta_{x_0} - \delta_{y_0})(x) = \int_{K^2} (h_0(x) - h_0(y)) d\psi(y, x),$$

und die rechte Seite ist wegen $\text{supp } \psi = \{(x_0, y_0)\}$ und der speziellen Wahl von h_0 gerade $d(x_0, y_0)$. \square

3.5 Die Separationseigenschaft

Wie zu Beginn von Abschnitt 3.4 angekündigt, liefert die nun vorliegende Verbindung zwischen der Kantorovich-Rubinstein-Norm und den Lipschitzräumen die Möglichkeit, die in diesem Kapitel untersuchte Dualität $\text{lip}(K)'' \cong \text{Lip}(K)$ vollständig zu verstehen. Als Trittbrett dafür dient nun der gefundene Maßraum $(M(K), \|\cdot\|_K)$, der für Hanin in [15], [16] und [17] Anlaß zu einem geeigneten Kandidaten für die Beschreibung von $\text{lip}(K)'$ gibt. Hanin betrachtet nämlich die in Theorem 3.4.5 angegebene Dualität — wie schon zuvor Bade, Curtis und Dales (vgl. Definition 3.3.3) — von zwei verschiedenen Standpunkten aus: Einerseits wirken Lipschitzfunktionen als Funktionale auf Maßen und andererseits sind Maße wiederum Funktionale auf Lipschitzfunktionen. Angesichts der zu Lemma 3.1.6 und Satz 3.1.7 führenden Überlegungen liegt es nahe zu fragen, ob damit vielleicht alle Funktionale auf $\text{lip}(K)$ erfaßt sind. Hanin betrachtet daher das lineare beschränkte Funktional

$$i : (M(K), \|\cdot\|_K) \rightarrow \text{lip}(K)',$$

definiert durch

$$i(\mu)(g) = \int_K g d\mu \quad \forall g \in \text{lip}(K),$$

für das nach Theorem 3.4.5

$$|i(\mu)(g)| \leq \|g\|_L \|\mu\|_K \quad \forall g \in \text{lip}(K),$$

also $\|i\| \leq 1$ gilt. Wir wissen seit Lemma 3.1.6, daß $i(M(K))$ dicht in $\text{lip}(K)'$ liegt. Geht man zur Vervollständigung $M(K)^c$ von $M(K)$ bezüglich der KR-Norm $\|\cdot\|_K$ über (beachte Satz 3.4.4), so stellt sich natürlicherweise die Frage, wann die fortgesetzte Abbildung $i : M(K)^c \rightarrow \text{lip}(K)'$ ein isometrischer Isomorphismus ist. Man beachte, daß ein Vergleich von Satz 3.1.7 mit Lemma 3.4.3 bzw. Satz 3.4.4 bereits eine Entsprechung dieser beiden Räume vermuten läßt. Hanin findet auf diese Frage im Hinblick auf die in Lemma 3.3.1 und in Satz 3.3.4 schon aufgetauchten Bedingungen eine äußerst befriedigende Antwort.

Theorem 3.5.1. *Die Abbildung $i : M(K)^c \rightarrow \text{lip}(K)'$ ist genau dann ein isometrischer Isomorphismus, wenn folgende Bedingung (S) erfüllt ist:*

Für jede Konstante $c > 1$, jede endliche Menge $A \subseteq K$ und jede Funktion h auf A gibt es eine Fortsetzung $g \in \text{lip}(K)$ von h mit $\|g\|_L \leq c \|h\|_L$.

Es sei nochmals darauf hingewiesen, daß wir auch hier, wie schon im gesamten Abschnitt 3.4, gemäß Definition der KR-Norm nur reellwertige Lipschitzfunktionen betrachten. Man beachte, daß die Bedingung (S) gerade der in Lemma 3.3.1 gefundenen Eigenschaft von kleinen Hölderfunktionen im reellen Fall entspricht. Es ist klar, daß man eingedenk des Fortsetzungssatzes von McShane (Satz 1.1.20) statt $h \in \text{Lip}(A)$ genauso gut $h \in \text{Lip}(K)$ hätte vorgeben und dazu die Existenz eines $g \in \text{lip}(K)$ mit $g|_A = h|_A$ mit $\|g\|_L \leq c \|h\|_L$ hätte verlangen können. (Im Komplexen gäbe es da Schwierigkeiten, siehe Bemerkung 3.5.5.) Offensichtlich stellt (S) eine gewisse Reichhaltigkeitsbedingung an

den kleinen Lipschitzraum $\text{lip}(K)$ dar (man vergleiche mit den Beispielen aus Bemerkung 1.1.14), durch welche auch $\text{lip}(K)'$ "groß genug" ist, um i zu einer Isometrie zu machen.

Beweis. Notwendigkeit. Wir nehmen i als isometrischen Isomorphismus an und zeigen, daß die Bedingung (S) erfüllt ist. Sei also A eine n -elementige Teilmenge von K . Setze $E = \{g|_A : g \in \text{lip}(K)\}$. Offenbar ist E isomorph zu einem Unterraum von \mathbb{R}^n . Wir zeigen, daß sogar $E = \mathbb{R}^n$ gilt. Um dies einzusehen betrachte man ein Funktional auf \mathbb{R}^n , welches E annulliert. Dieses Funktional kann als ein Maß η auf A (und damit auch auf K) angesehen werden. Es gilt also

$$i(\eta)(g) = \int_K g d\eta = 0 \quad \forall g \in \text{lip}(K)$$

und damit $i(\eta) = 0$. Da i aber als injektiv angenommen ist, bedeutet dies $E = \mathbb{R}^n$. Eine beliebige Fortsetzung einer Funktion $h \in \text{Lip}(A)$ in $\text{lip}(K)$, sprich die Surjektivität der Restriktionsabbildung $R : \text{lip}(K) \rightarrow \text{Lip}(A)$, erhält man also schon durch die Injektivität von i .

Setze nun $X = \{g \in \text{lip}(K) : g|_A = 0\}$ und bemerke zunächst, daß der Annihilator von X in $\text{lip}(K)'$ gerade $i(M(A))$ ist. Dies ist lineare Algebra. Wie gerade gezeigt, ist E schon n -dimensional (genauer als Bild von R isomorph zum n -dimensionalen Quotientenraum $\text{lip}(K)/\ker(R)$), so daß X in $\text{lip}(K)$ die Kodimension n besitzt und damit kanonisch (vgl. III.1.10 in [55]) $X^\perp \cong (\text{lip}(K)/X)'$ ein n -dimensionaler Raum ist. Sicher gilt $i(M(A)) \subseteq X^\perp$, aber $i(M(A))$ hat wegen der Injektivität von i bereits die Dimension n , so daß die beiden Räume gleich sind. Sei nun eine Funktion h auf A gegeben. Nach dem oben Gezeigten gibt es eine Funktion $g_0 \in \text{lip}(K)$ mit $g_0|_A = h$. Es gilt

$$\text{dist}(g_0, X) = \inf_{g_1 \in X} \|g_0 - g_1\|_L = \|[g_0]\|$$

mit $[g_0] \in \text{lip}(K)/X$, und letzteres ist nach Hahn-Banach (siehe III.1.7 in [55])

$$\sup\{\ell'([g_0]) : \ell' \in (\text{lip}(K)/X)', \|\ell'\| = 1\},$$

was wegen $(\text{lip}(K)/X)' \cong X^\perp$ gleich

$$\sup\{\ell(g_0) : \ell \in \text{lip}(K)', \ell(X) = \{0\}, \|\ell\|' = 1\}$$

ist. (Mit $\|\cdot\|$ seien hier stets die kanonischen Normen gemeint.) Da aber i als Isometrie angenommen ist, folgt mit der Tatsache $X^\perp \cong i(M(A))$ und schließlich aus Theorem 3.4.5 (angewandt auf A statt auf K), daß letzteres nach Wahl von g_0 übereinstimmt mit

$$\sup\left\{\int_A h d\mu : \mu \in M(A), \|\mu\|_K = 1\right\} = \|h\|_L.$$

Insgesamt erhält man also für jedes $c > 1$ eine Funktion $g_1 \in X$, so daß $\|g_0 - g_1\|_L \leq c\|h\|_L$ gilt, womit in $g = g_0 - g_1$ die gewünschte Funktion gefunden ist.

Hinlänglichlichkeit. Sei nun die Bedingung (S) erfüllt. Die Surjektivität von i ist durch Lemma 3.1.6 gesichert, wenn gezeigt wird, daß i eine Isometrie ist, und dafür reicht es, die dichte Menge $M(K)$ in $M(K)^c$ zu betrachten. Seien hierzu $\varepsilon > 0$, $\mu \in M(K)$ und $h \in B_{Lip(K)}$ gegeben. Nach Satz 3.4.4 gibt es ein Maß η auf K mit endlichem Träger A , so daß $\|\eta - \mu\|_K \leq \varepsilon$ ist. Die Bedingung (S) liefert nun eine Funktion $g \in lip(K)$ mit $g|_A = h|_A$ und $\|g\|_L \leq 1 + \varepsilon$. Damit gilt zunächst

$$\int_K h d\mu = \int_K h d(\mu - \eta) + \int_K g d(\eta - \mu) + \int_K g d\mu,$$

wobei hier auf der rechten Seite nach Theorem 3.4.5 das erste Integral höchstens $\|h\|_L \|\eta - \mu\|_K \leq \varepsilon$ ist und analog das zweite höchstens $(1 + \varepsilon)\varepsilon$, so daß man insgesamt

$$\int_K h d\mu \leq (2 + \varepsilon)\varepsilon + \int_K g d\mu$$

schließt. Hieraus folgt nun durch nochmalige Anwendung von Theorem 3.4.5 (und nebenbei Hahn-Banach)

$$\|\mu\|_K = \sup_{h \in B_{Lip(K)}} \int_K h d\mu = \sup_{g \in B_{lip(K)}} \int_K g d\mu = \|i(\mu)\|'.$$

□

Durch das Theorem 3.5.1 ist nach langer Arbeit auch das Problem der Dualität $lip(K)'' \cong Lip(K)$ für Räume reellwertiger Lipschitzfunktionen endlich vollständig geklärt. Mit der Adjungierten $i' : lip(K)'' \rightarrow (M(K)^c)' \cong M(K)'$ und dem Isomorphismus $j^{-1} : M(K)' \rightarrow Lip(K)$ aus Theorem 3.4.5 ist die Abbildung

$$\tilde{I} := j^{-1} \circ i' : lip(K)'' \rightarrow Lip(K)$$

genau dann ein isometrischer Isomorphismus, wenn dies für i gilt. Jetzt muß man nur noch bedenken, daß für jedes Funktional $F \in lip(K)''$ mit dem Punktmaß $\delta_x \in (M(K), \|\cdot\|_K)$ und dem entsprechenden Punktauswertungsfunktional $i(\delta_x) \in lip(K)'$ gerade

$$F(i(\delta_x)) = j(\tilde{I}(F))(\delta_x) = \int_K \tilde{I}(F) \delta_x = \tilde{I}(F)(x) \quad \forall x \in K,$$

gilt, um schließlich $\tilde{I} = I$ mit unserer Abbildung I aus Definition 3.1.1 folgern zu können. Damit sind wir am Ziel angelangt:

Theorem 3.5.2. *Für Lipschitzräume reellwertiger Funktionen ist die Abbildung I aus Definition 3.1.1 genau dann ein isometrischer Isomorphismus, wenn der metrische Raum die Bedingung (S) erfüllt.*

Im folgenden Theorem wird zusammenfassend deutlich, worum es in diesem Kapitel eigentlich ging.

Theorem 3.5.3. Für jeden kompakten metrischen Raum K sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:

- (i) Es gibt eine Konstante $c > 1$, so daß für je zwei $x, y \in K$ stets ein $f \in \text{lip}(K)$ existiert mit $|f(x) - f(y)| = d(x, y)$ und $\|f\|_L \leq c$.
- (ii) Für jede Konstante $c > 1$ gibt es zu je zwei $x, y \in K$ ein $f \in \text{lip}(K)$ mit $|f(x) - f(y)| = d(x, y)$ und $\|f\|_L \leq c \max(1, \text{diam}(K)/2)$.
- (iii) Es gibt eine Konstante $c > 1$, so daß für jede endliche Menge $A \subseteq K$ und jede Funktion h auf A eine Fortsetzung $g \in \text{lip}(K)$ von h existiert mit $\|g\|_L \leq c \|h\|_L$.
- (iv) Für jede Konstante $c > 1$, jede endliche Menge $A \subseteq K$ und jede reellwertige Funktion h auf A gibt es eine Fortsetzung $g \in \text{lip}(K)$ von h mit $\|g\|_L \leq c \|h\|_L$.
- (v) Die Lipschitzräume $\text{lip}(K, \mathbb{R})''$ und $\text{Lip}(K, \mathbb{R})$ sind auf natürliche Weise isometrisch isomorph.
- (vi) Die Lipschitzräume $\text{lip}(K, \mathbb{C})''$ und $\text{Lip}(K, \mathbb{C})$ sind auf natürliche Weise isometrisch isomorph.

Zum guten Schluß stehen jetzt die Ergebnisse für Räume reellwertiger und für Räume komplexwertiger Lipschitzfunktionen (wir verwenden hier die Bezeichnungen aus Abschnitt 2.2) "relativ" gleichberechtigt nebeneinander (und die natürliche Isomorphie wird natürlich durch die Abbildung I aus Definition 3.1.1 vermittelt). Lediglich die Bedingung (iv) (also unser "bisheriges" (S)) bezieht sich nur auf Funktionen mit Werten in \mathbb{R} , die Bedingungen (i) bis (iii) sind für reellwertige und komplexwertige äquivalent. Diese Untersuchung der Eigenschaft (S) geht auf N. Weaver in [49] und [51] zurück, und sie ist auch in seinem Buch "Lipschitz Algebras" [52] dargestellt. In [49, S. 287] und [51, S. 2644] wird behauptet, daß man in (iv) auch komplexwertige Funktionen zulassen kann. Das hierfür vorgebrachte Argument (vergleiche die Darstellung in [52, S. 85]) ist neu und soll deshalb im Beweis von (v) \Rightarrow (iv) angegeben werden, obwohl für diesen entscheidenden Schritt ja bereits Hanin mit Theorem 3.5.2 zuständig war. Es liefert eine Möglichkeit, unabhängig von der Kantorovich-Rubinstein-Norm die Rückrichtung in diesem Theorem einzusehen, und zwar durch völlig allgemeine Tatsachen der Banachraumtheorie. Es wird im Beweis (vergleiche auch Bemerkung 3.5.5) die Schwierigkeit aufgezeigt, durch diese Argumente (iv) durch (vi) auch für komplexwertige Lipschitzfunktionen zu zeigen, und wieder wird sich die $\sqrt{2}$ im Fortsetzungssatz 1.1.20 als der Übeltäter herausstellen.

Beweis. (i) \Rightarrow (iii): Sei eine endliche Menge $A \subseteq K$ und zunächst ein reellwertiges $h \in \text{Lip}(A)$ (o.B.d.A. nicht die Nullfunktion) gegeben. Wir betrachten $\tilde{h} := h/\|h\|_L$. Da (i) gilt, finden wir zu einem $c > 1$ für jedes Paar von Punkten $x, y \in A$ ein $f \in \text{lip}(K)$ mit $\|f\|_L \leq c$ und $|f(x) - f(y)| = |\tilde{h}(x) - \tilde{h}(y)| \leq d(x, y)$.

Wir können f als reellwertig ansehen (sonst multiplizieren wir f mit einer geeigneten Konstanten a vom Betrag 1, so daß $af(x) - af(y) \in \mathbb{R}$ gilt und betrachten den Realteil der Funktion af mit den gleichen Eigenschaften). Durch Multiplikation mit ± 1 kann man sogar $f(x) - f(y) = \tilde{h}(x) - \tilde{h}(y)$ erreichen, und durch Verschieben von f und Abschneiden mit den konstanten Funktionen $\mathbf{1}$ und $-\mathbf{1}$ definieren wir

$$f_{xy} := ((f + \tilde{h}(x) - f(x)) \wedge \mathbf{1}) \vee -\mathbf{1}.$$

Wir erhalten $f_{xy}(x) = \tilde{h}(x)$ und $f_{xy}(y) = \tilde{h}(y)$ (man beachte $\|\tilde{h}\|_\infty \leq 1$), wobei nach Satz 1.1.12 auch $f_{xy} \in \text{lip}(K)$ und $\|f_{xy}\|_L \leq c$ gilt. Jetzt setzen wir

$$\tilde{g} := \bigvee_{x \in A} \bigwedge_{\substack{y \in A \\ y \neq x}} f_{xy},$$

denken kurz nach und erhalten $\tilde{g}|_A = \tilde{h}|_A$ sowie durch nochmalige Anwendung von Satz 1.1.12 ebenfalls $\tilde{g} \in \text{lip}(K)$ und $\|\tilde{g}\|_L \leq c$, so daß $g := \tilde{g} \cdot \|h\|_L$ die gewünschte Fortsetzung von h ist. Die Konstante c kann dabei wie in (i) gewählt werden. Ist h komplexwertig, so führen wir obige Konstruktion getrennt für den Real- und Imaginärteil durch, wobei über die Summe der fortgesetzten Real- und Imaginärteile (iii) mit der Konstanten $c\sqrt{2}$ erfüllt ist.

(iii) \Rightarrow (vi) ist Theorem 3.3.5. Man bemerke, daß einerseits (iii) die in Satz 3.3.4 angegebene Eigenschaft impliziert, andererseits aber wieder über den Fortsetzungssatz 1.1.20 (mit der Konstanten $c\sqrt{2}$) aus ihr gewonnen werden kann (vergleiche auch mit der Bemerkung vor dem Beweis von Theorem 3.5.1).

(vi) \Rightarrow (v) folgt durch Einschränkung des Isomorphismus.

(v) \Rightarrow (iv) wird durch Theorem 3.5.2 geliefert, aber auch durch die folgende sehr allgemeine Überlegung: Nach dem Satz von Goldstine (vgl. VIII.3.17 in [55]) ist $i_{\text{lip}(K)}(B_{\text{lip}(K)})$ w^* -dicht in $B_{\text{lip}(K)''}$. Da $\text{lip}(K)''$ (mit der Abbildung I aus Definition 3.1.1) natürlich isometrisch isomorph zu $\text{Lip}(K)$ ist, bedeutet dies, daß zu gegebenen $A = \{x_i\}_{i=1}^n \subseteq K$ und $h \in B_{\text{Lip}(K)}$ mit $I^{-1}(h) = H \in B_{\text{lip}(K)''}$ für jedes $\varepsilon > 0$ in der w^* -Umgebung

$$\{G \in \text{lip}(K)'' : |H(\delta_{x_i}) - G(\delta_{x_i})| \leq \varepsilon \ \forall i = 1, \dots, n\}$$

von H ein $G = i_{\text{lip}(K)}(g)$ für ein $g \in B_{\text{lip}(K)}$ liegt, für welches gemäß Definition von I damit $|h(x_i) - g(x_i)| \leq \varepsilon \ \forall i = 1, \dots, n$ gilt. Da A endlich ist, finden wir also eine Folge $(g_m) \subseteq B_{\text{lip}(K)}$ mit $\|(h - g_m)|_A\|_L \rightarrow 0$ für $m \rightarrow \infty$, was bedeutet, daß die Restriktionsabbildung $R : \text{lip}(K) \rightarrow \text{Lip}(A)$ die Eigenschaft

$$\overline{R}(B_{\text{Lip}(K)}) \subseteq \overline{R(B_{\text{lip}(K)})}$$

hat, wenn \overline{R} die Restriktionsabbildung von $\text{Lip}(K)$ auf $\text{Lip}(A)$ bezeichnet. Aufgrund der normgleichen Fortsetzbarkeit von reellwertigen Lipschitzfunktionen (Satz 1.1.20) gilt $\overline{R}(B_{\text{Lip}(K)}) = B_{\text{Lip}(A)}$, und jetzt kann man durch leichte Modifikation der obigen Folge (g_m) auch

$$\text{int } B_{\text{Lip}(A)} = \overline{R(\text{int } B_{\text{lip}(K)})}$$

einsehen. Erinnert man sich nun an den Beweis des Satzes von der offenen Abbildung (siehe [55, S. 136 f, 2. Teil!]), so kann man wie dort hieraus sogar

$$\text{int } B_{Lip(A)} = R(\text{int } B_{lip(K)})$$

schließen, so daß man R als Quotientenabbildung (siehe [55, S. 54–56]) erkannt hat, und dies ist genau die Behauptung (iv). Da Lipschitzfunktionen mit Werten in \mathbb{C} im allgemeinen nicht normgleich fortgesetzt werden können, ist es mehr als fraglich, ob mit dieser Argumentation (iv) aus (vi) unter Vermeidung der $\sqrt{2}$ auch für komplexwertige Funktionen hergeleitet werden kann.

(iv) \Rightarrow (iii) kann wie gehabt für jedes $c \geq \sqrt{2}$ in (iii) geschlossen werden.

(iv) \Rightarrow (ii) sieht man durch Betrachtung von $A = \{x, y\}$ und $h(x) := d(x, y)/2$ sowie $h(y) := -d(x, y)/2$ mit $\|h\|_L \leq \max(1, d(x, y)/2)$ ein.

(ii) \Rightarrow (i) ist für jedes $c > \max(1, \text{diam}(K)/2)$ in (i) offensichtlich. \square

Nun wird auch klar, wieso Weaver die Eigenschaft (S) (und damit alle weiteren obigen Eigenschaften sowie diejenigen aus Lemma 3.3.1 und aus Satz 3.3.4) als *Separationseigenschaft* des Kompaktums K bzw. des kleinen Lipschitzraums auf K bezeichnet. Die Bedingung (i) erfordert nämlich nicht nur die Punktentrennung von $lip(K)$, sondern auch, daß diese in einer gleichmäßigen Art erfolgt, d.h. durch gleichmäßig in der Norm beschränkte kleine Lipschitzfunktionen. Und (ii) besagt sogar, daß die Normbeschränkung fast “optimal” gewählt werden kann. Man beachte, daß (ii) im Falle $\text{diam}(K) \leq 2$ eine noch schönere Form hat, und in der Tat könnte man (auch für beliebiges $\text{diam}(K)$) in (i) und (ii) sogar $\|\cdot\|_L$ durch $L(\cdot)$ ersetzen (in (ii) dann sogar ohne den Zusatzfaktor $\text{diam}(K)/2$), was zu scheinbar schwächeren Bedingungen (i)' und (ii)' führt. Man kann aber durch Verschiebung (und Drehung) von (komplexwertigen) Funktionen (und danach durch Betrachtung des Realteils) immer ein reellwertiges f mit $f(x) = d(x, y)/2$ und $f(y) = -d(x, y)/2$ aus (i)' oder (ii)' erhalten, und dann liefert “Abschneiden” durch die konstanten Funktionen $z \mapsto d(x, y)/2$ und $z \mapsto -d(x, y)/2$ wieder (i) bzw. (ii). Analog kann man in (iii) und (iv) ebenfalls $\|\cdot\|_L$ durch $L(\cdot)$ ersetzen, und man erhält (iii)' (bzw. (iv)') durch (i) (bzw. (ii)) wie im obigen Beweis, wobei “Abschneiden” wieder (iii) (bzw. (iv)) liefert.

Noch eine zur Separationseigenschaft äquivalente Bedingung ist, daß im Falle reellwertiger Lipschitzfunktionen die Einheitskugel $B_{lip(K)}$ als Unterverband bezüglich der Operationen \vee und \wedge “dicht in” $B_{Lip(K)}$ “liegt”, d.h. daß (vergleiche die Bemerkung zu Satz 1.1.12) $B_{Lip(K)}$ der kleinste vollständige Verband ist, der $B_{lip(K)}$ enthält (siehe hierzu 5.4.3 bis 5.4.5 in [52]). Und Weaver krönt seine Sammlung von zu (S) äquivalenten Eigenschaften durch den folgenden Fortsetzungssatz für *kleine* Lipschitzfunktionen.

Satz 3.5.4. *Sei K ein kompakter metrischer Raum mit der Separationseigenschaft und M eine abgeschlossene Teilmenge von K . Dann gibt es zu jeder reellwertigen Funktion $f \in lip(M)$ mit $\|f\|_L < 1$ eine reellwertige Fortsetzung $F \in lip(K)$ mit $\|F\|_L < 1$. Ist f komplexwertig, so gibt es auch eine Fortsetzung $F \in lip(K)$ mit $\|F\|_L < \sqrt{2}$.*

Zum Beweis verweisen wir auf den Originalartikel [51] und den entsprechenden Abschnitt 3.2 im Buch [52]. Hier sei auf eine Darstellung des Beweises verzichtet, da er durch einige technische Lemmata erst vorbereitet werden muß und uns wesentliche Ideen daraus im obigen Beweis von (i) \Rightarrow (iii) und (v) \Rightarrow (iv) bereits begegnet sind. Es sei jedoch darauf hingewiesen, daß (im Unterschied zum Fortsetzungssatz 1.1.20 für große Lipschitzfunktionen) eine normgleiche Fortsetzung bereits bei reellwertigen kleinen Lipschitzfunktionen im allgemeinen nicht möglich ist. Dazu betrachte man das Beispiel $K = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \cup \{0\}$ mit dem Absolutbetrag als Metrik, für welches man relativ einfach (S) einsehen kann. Wählt man aber $M = \{0, 1\}$ und $f(0) = 0$ sowie $f(1) = 1$, so sieht man schnell, daß die einzige mögliche Fortsetzung F von f mit $\|F\|_L = 1$ die Funktion $F : x \mapsto x$ ist, die aber nicht in $lip(K)$ liegt.

Bemerkung 3.5.5. Es wurde im Vorlauf zu Theorem 3.5.3 bereits von Weavers Behauptung in [49, S. 287] und [51, S. 2644] gesprochen, daß aus der Separationseigenschaft sofort die Aussage (iv) auch für komplexwertige Funktionen folgt, obwohl man diese Version aus (iv) nur für jede Konstante $c > \sqrt{2}$ schließen kann. Die Fragwürdigkeit dieser Behauptung wurde im obigen Beweis begründet. Man könnte sich aber im Hinblick auf eine weitere Untersuchung dieser Behauptung noch einmal mit dem Beweis des Theorems 3.5.1 von Hanin und der Kantorovich-Rubinstein-Theorie befassen. Dort nämlich sind die meisten Überlegungen auch für komplexe Maße und komplexwertige Lipschitzfunktionen durchführbar. Der Ansatz, Weavers Behauptung mit Hanins Theorem zu zeigen, steht und fällt also mit der Frage, ob und wenn ja, wie eine Kantorovich-Rubinstein-Norm, für welche es ja im reellen Fall eine nette anschauliche Motivation gibt, für komplexe Maße definiert werden kann. Weaver selbst (siehe [52, S. 45]) zieht hier das Theorem 3.4.5 definitorisch heran, indem er

$$\|\mu\|_K := \sup_{\|h\|_L \leq 1} \left| \int_K h d\mu \right| \quad \forall \mu \in M(K)$$

erklärt, aber dieses Vorgehen greift natürlich viel zu kurz, da man dieses Theorem gerade gerne als Aussage auch für komplexwertige Maße hätte.

Der Ansatz, wie in (3.4.6) einfach das Infimum über den Betrag des Integrals zu betrachten, stößt leider schon bei der Definition in (3.4.7), sprich in der Frage, ob überhaupt immer $\Psi_\nu \neq \emptyset$ ist, an seine Grenzen. Angehen müßte man diese Problematik natürlich gemäß Definition von Integralen über komplexe Maße (siehe A.4.5 in [55]), indem man sich die positive und negative Variation sowohl des Realteils ν_1 als auch des Imaginärteils ν_2 eines komplexen Maßes ν näher ansieht und zum Beispiel dahingehend die Bedingung (3.4.4) “zerlegt”. “Auf’s Komplexe übertragen” könnte die Definition in (3.4.6) dann so aussehen:

$$\|\nu\|_K^0 := \sqrt{\|\nu_1\|_K^0 + \|\nu_2\|_K^0},$$

und die Vermutung liegt nicht fern, daß sich darin auch wieder ein Faktor $\sqrt{2}$ “verbirgt”. Jedenfalls sieht es vielversprechend aus, mit diesen Ideen den von Kantorovich und Rubinstein entwickelten Apparat auch auf komplexwertige Maße zu übertragen und dann die Frage zu stellen, welche Gestalt dabei

die entscheidenden Ergebnisse, insbesondere Theorem 3.4.5, annehmen. Diese offene Frage sei an dieser Stelle ausdrücklich als Motivation für weitere Untersuchungen an den Leser gestellt. Und verbunden sei diese Frage noch mit der Information, daß Weavers Behauptung falsch ist, daß also eine komplexe Version von Theorem 3.4.5 unmöglich als Isometrie-Ergebnis vorliegen kann. Das Gegenbeispiel zu Weavers Behauptung stammt nach einem email-Kontakt von Weaver selbst, und es ist genau das gleiche Beispiel, welches schon Jenkins zur “scharfen komplexen Version” von Satz 1.1.20 (siehe Bemerkung 1.1.21) angegeben hat: Es handelt sich dabei um einen vierpunktigen metrischen Raum $K = \{a, b, c, d\}$, für den trivialerweise $\text{lip}(K)'' \cong \text{Lip}(K)$ gilt, mit der Eigenschaft, daß sich die Norm jeder Lipschitzfunktion h auf $A = \{a, b, c\}$ nach beliebiger Fortsetzung von h auf K stets um mindestens den Faktor $2/\sqrt{3}$ vergrößert.

Und um nun die Verwirrung über die vielen Versionen der Separationseigenschaft zu komplettieren, wollen wir hier Weavers Behauptung doch noch ein wenig zu ihrem Recht verhelfen. Im Zusammenhang mit dem Dualitätsergebnis bringt Weaver in seinem Buch auf S. 84/85 eine ähnliche, nun aber überzeugende, Argumentation. Seine Behauptung wird nämlich richtig, wenn man in der Version (iv) der Separationseigenschaft “im wesentlichen” nur einen Buchstaben verändert: Modifiziert man (iv) so, daß man nicht für jede Funktion h auf A , sondern nur für jede Funktion h auf K die Existenz eines $g \in \text{lip}(K)$ mit $g|_A = h|_A$ und $\|g\|_L \leq c\|h\|_L$ fordert, so kann man die Einschränkung “reellwertig” tatsächlich weglassen. Die Begründung wurde schon gegeben, und zwar mit dem Lemma von Goldstine im Beweis von (v) \Rightarrow (iv) — bevor der Fortsetzungssatz auftauchte (mit dem man das Ergebnis von $\text{Lip}(K)$ auf $\text{Lip}(A)$ “hochhebt”).

Um dem Vorwurf der “Erbsenzählerei” zuvor zu kommen, seien jetzt noch einmal die Schwierigkeiten von Jenkins in Erinnerung gerufen, das Theorem 3.2.7 auch für komplexwertige Hölderfunktionen mit seinem Approximationsansatz (siehe Abschnitt 3.2) zu beweisen. Er hatte nämlich dafür nur Lemma 3.3.1 zur Verfügung, und es stellte sich die Frage, ob nicht die gröbere Normabschätzung im komplexen Fall auch schon die Dualität $\text{lip}(K^\alpha)'' \cong \text{Lip}(K^\alpha)$ sicherstellt. Diese Frage wurde in Abschnitt 3.3 auf zwei verschiedene Weisen mit “ja” beantwortet: Jenkins hatte also, ohne es zu wissen, schon alles Nötige zur Hand. Mit Weavers (modifizierter) Behauptung werden jetzt Jenkins “Probleme” vollkommen ad absurdum geführt. Nicht nur, daß schon die komplexe (“schwache”) Version seines Lemmas 3.3.1 das Dualitätsergebnis liefert, es sichert über dieses Ergebnis sogar, daß die “starke” komplexe Version (mit $(1+\varepsilon)$ anstelle des Faktors $(\sqrt{2} + \varepsilon)$) sowieso immer erfüllt ist! Weaver fällt für dieses Phänomen, an das, bei allem Respekt, Jenkins wohl nicht im Traum gedacht hätte, auf S. 287 in [49] (mit gutem Recht!) nur die Bezeichnung “mysterious” ein (wenn er auch hier seine “ursprüngliche” oben ebenfalls als mysteriös erkannte Behauptung meint). Denn einen “direkteren” Weg — das Lemma von Goldstine scheint ja hierfür wahrlich wie mit Kanonen auf Spatzen geschossen — die “starke” komplexe Version von Lemma 3.3.1 zu beweisen, kennt auch er nicht.

Bemerkung 3.5.6. Im Zusammenhang mit der Diskussion der Separationseigenschaft ist es angebracht, noch einmal auf einen früheren Abschnitt dieser Arbeit zurückzublicken, in dem eine Dualität der Art $\text{lip}(K)'' \cong \text{Lip}(K)$ erstmalig auftauchte, konkret auf Satz 2.4.3, dessen Beweis unvollendet blieb. Es sollte dort $\Lambda(K^\alpha)'' \cong H(K^\alpha)$ gezeigt werden, und mit dem im Beweis gewählten Basispunkt $x_0 \in K$ ist die isometrische Isomorphie $\text{Lip}_0(K^\alpha) \cong H(K^\alpha)$ (siehe Satz 1.1.6) klar. Die im Beweis von Satz 2.4.3 betrachtete Abbildung entspricht genau der im vorliegenden Kapitel gewählten natürlichen Abbildung I aus Definition 3.1.1, nun allerdings zwischen $\text{lip}_0(K)''$ und $\text{Lip}_0(K)$. Jetzt kann man sich noch einmal den gesamten in diesem Kapitel entwickelten Apparat anschauen, indem man zum Beispiel bei der im Anschluß an Lemma 3.2.5 gemachten Bemerkung anfängt, um einzusehen, daß auch für diese Räume völlig analog Theorem 3.5.3 mit $L(\cdot)$ statt mit $\|\cdot\|_L$ gilt. Dabei betrachtet man anstelle von \hat{K} in Definition 1.1.9 und Satz 1.1.10 nur $K^2 \setminus \text{diag}(K^2)$. In der Version von Kantorovich lag Theorem 3.4.5 übrigens ohnehin schon in der Form $\text{Lip}_0(K) \cong (M_0(K), \|\cdot\|_K^0)'$ vor. Man kann sich auch die Vorgehensweise von Weaver in den Kapiteln 2 und 3 seines Buches [52] zu Gemüte führen. Dort behandelt er die Dualität für Lip_0 - bzw. lip_0 -Räume, indem er sich im Zwischenschritt den im Anschluß an Satz 1.1.22 kurz erwähnten Raum von Arens und Eells in [1], den man als diskretes Analogon von $(M_0(K), \|\cdot\|_K^0)$ ansehen könnte, näher vorknüpft. Man beachte hier auch, daß die Lip_0 - bzw. lip_0 -Räume gemäß Satz 1.1.8 die "allgemeineren" Lipschitzräume sind. Insgesamt schließt man, daß im Falle des von Wulbert in Satz 2.4.3 behandelten kleinen Lipschitzraums $\Lambda(K^\alpha)$ die Separationseigenschaft folgendermaßen aussieht:

Für jede Konstante $c > 1$, jede endliche Menge $\{x_j\}_{j=1}^n \subseteq K$ und jede Funktion $h \in H(K^\alpha)$ existiert eine Funktion $g \in \Lambda(K^\alpha)$ mit

$$h(x_j) - h(x_0) = g(x_j) - g(x_0) \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

und $L_\alpha(g) \leq c \cdot L_\alpha(h)$.

Insbesondere die Notwendigkeit dieser Eigenschaft für die Existenz der natürlichen isometrischen Isomorphie $\Lambda(K^\alpha)'' \cong H(K^\alpha)$ sieht man sofort wie im Beweis von (v) \Rightarrow (iv) unter Verwendung der Funktionale $\xi(x, y)$ anstelle der Punktauswertungsfunktionale. Es wurde allerdings bereits im Anschluß an den Beweis zu Satz 2.4.3 bekannt, daß es nach wie vor offen ist, wie man mit dieser Eigenschaft den Beweis von Wulbert vervollständigen kann. Und fraglich bleibt auch, ob aus den Voraussetzungen $\Lambda(K^\alpha) \simeq c_0$ und der Punktentrennung von $\Lambda(K^\alpha)$ in Satz 2.4.3 auf die Separationseigenschaft geschlossen werden kann. Auf der Suche nach einem Gegenbeispiel fallen offenbar die von Ciesielski (Abschnitt 2.1) und von Bonic, Frampton und Tromba (Abschnitt 2.2) betrachteten kleinen Hölderräume, die isomorph zu c_0 sind, aus. Damit blieben als potentielle Gegenbeispiele einzig die von Wulbert selbst in Satz 2.4.7 gestifteten, denn weitere Beispiele für $\Lambda(K^\alpha) \simeq c_0$ sind rar in der Literatur. Nun wurde Satz 2.4.7 von Wulbert ohne die Zusatzvoraussetzung, daß C eine Nullmenge sein soll, formuliert. Und hier fiel jetzt eine Bemerkung von Weaver in [51, S. 2644] auf, wo er von der Existenz gewisser "fetter" Cantor-Mengen C spricht, auf denen $\text{lip}(C)$ zwar die Punkte trennt, dies aber nicht gleichmäßig, sprich: für welche

die Separationsbedingung nicht erfüllt ist — das gewünschte Gegenbeispiel! Die Cantor-Menge selbst (siehe [52, S. 78]) erfüllt die Separationsbedingung, so daß nach einer nirgends dichten Menge von positivem Maß ohne die Separationseigenschaft gesucht wurde. Leider tauchte damit ein Gegenbeispiel zum Beweis von Wulberts ursprünglichem Satz 2.4.7 auf (siehe Bemerkung 2.4.8). Es konnte Satz 2.4.7 “nur noch” für Lebesgue-Nullmengen gezeigt werden. Damit gilt für solche Mengen aber auch sofort die Aussage des Satzes 2.4.3, womit nirgends dichte Teilmengen der reellen Achse vom Maß 0 immer die Separationseigenschaft haben.

Nach alldem, was bisher passiert ist, können wir jetzt sogar auch in der Rückrichtung sehr allgemein argumentieren: Sei $C_p \subseteq \mathbb{R}$ kompakt, nirgends dicht mit $\mu(C_p) > 0$ und das Intervall $[x, y] \supseteq C_p$ kleinstmöglich gewählt. Zu jedem $f \in B_{lip}(C_p)$ und jedem $\varepsilon > 0$ kann man ein $\delta > 0$ finden, so daß f zwischen Punkten in Intervallen der Länge δ höchstens die Steigung ε hat. Handelt man sich mit solchen Intervallen von x nach y , so findet man eine endliche Vereinigung V_ε von abgeschlossenen Intervallen, die C_p bis auf endlich viele Punkte überdeckt und auf der f höchstens die Steigung ε hat. Da f auf $[x, y] \setminus V_\varepsilon$ höchstens die Steigung 1 besitzt, führt dies wegen $\mu(V_\varepsilon) > \mu(C_p) > 0 \forall \varepsilon > 0$ auf die Abschätzung

$$|f(y) - f(x)| \leq y - x - \mu(C_p) \leq \tilde{c}(y - x)$$

für ein $\tilde{c} \in (0, 1)$ unabhängig von f . Damit erfüllt $lip(C_p)$ nicht die Bedingung (ii) in Theorem 3.5.3, wenn man dort $\|f\|_L$ durch $L(f)$ ersetzt und $\text{diam}(K)/2$ streicht, was man jedoch nach den Bemerkungen im Anschluß an den Beweis dieses Theorems “ungestraft” tun darf (diese Bedingung könnte höchstens für $c \geq \tilde{c}^{-1}$ erfüllt sein). Analoges erhält man für $lip_0(C_p) \cong \Lambda(C_p)$ und auch für $\Lambda(C_p^\alpha)$, wenn $\alpha > 1$ ist (dann ergibt sich $|f(y) - f(x)| \leq \tilde{c}(y - x)^\alpha$). $\Lambda(C_p^\alpha)$ trennt damit die Punkte von C_p , dies aber nicht gleichmäßig, so daß keine natürliche Isomorphie $\Lambda(C_p^\alpha)'' \cong H(C_p^\alpha)$ vorliegt. Damit folgt aber sofort, daß die Aussage von Satz 2.4.7 nicht gelten kann.

Wir fassen zusammen: Die Aussagen von Satz 2.4.3 (mit dem in dessen Beweis definierten speziellen Isomorphismus I) und Satz 2.4.7 sind für (unendliche) nirgends dichte kompakte Teilmengen C der reellen Achse äquivalent. Wahr sind die Aussagen genau dann, wenn C die Separationsbedingung erfüllt, und dies ist genau dann der Fall, wenn C eine Lebesgue-Nullmenge ist.

Jetzt ist die Zeit gekommen, wo man sich noch etwas der Frage widmen sollte, wann die Separationseigenschaft “in der Realität” denn überhaupt erfüllt ist. Ein Blick auf Lemma 3.3.1 liefert sofort für alle Höldermetriken eine positive Antwort auf diese Frage, und bei Hanin findet sich noch eine allgemeinere Bedingung an den metrischen Raum, aus welcher (S) geschlossen werden kann. Schließlich ist die Separationseigenschaft “eigentlich” eine Eigenschaft des metrischen Raums K , und man wird bestrebt sein, sie unabhängig von den Elementen aus $lip(K)$ zu formulieren. In diesem Zusammenhang erinnere man sich an Satz 1.1.16: Notwendig für (S) ist auf jeden Fall die Existenz einer lokal kleineren Metrik.

Definition 3.5.7. Eine Metrik d auf einer Menge K heißt *nichtkritisch*, falls es eine Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Metriken auf K gibt mit

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n(x, y) = d(x, y) \quad \forall x, y \in K,$
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{d_n(x, y)/d(x, y) : x, y \in K, x \neq y\} = 1,$
- (iii) $\lim_{d(x, y) \rightarrow 0} d_n(x, y)/d(x, y) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Haben wir also eine Folge (d_n) von Metriken auf K vorliegen, die d gemäß (i) punktweise und im Sinne von (ii) sogar gleichmäßig annähern und dennoch alle lokal kleiner als d sind, so sind wir auf der sicheren Seite:

Satz 3.5.8. *Jeder metrische Raum mit einer nichtkritischen Metrik besitzt die Separationseigenschaft.*

Man beachte, daß im obigen Satz keine Kompaktheit vorausgesetzt wird. Er gilt völlig allgemein, obwohl uns im Hinblick auf Theorem 3.5.3 natürlich hauptsächlich kompakte metrische Räume interessieren. Der Satz mag auf den ersten Blick etwas obskur erscheinen, aber nur so lange, wie man keine Möglichkeit sieht, überhaupt kleine Lipschitzfunktionen zu konstruieren. Dank Jenkins (und Hanin hatte Kenntnis von dessen Arbeit) haben wir aber im Falle der Höldermetriken eine solche Möglichkeit bereits im Beweis zu Lemma 3.2.6 kennengelernt: Die Lösung ist (wieder einmal) der Fortsetzungssatz von McShane, denn große Lipschitzfunktionen zu lokal kleineren Metriken sind kleine Lipschitzfunktionen zu lokal größeren Metriken!

Beweis. Sei d eine nichtkritische Metrik auf K und (d_n) eine Folge von Metriken, welche die Bedingungen der obigen Definition erfüllt. Wir weisen die Version (iv) der Separationseigenschaft (also (S) aus Theorem 3.5.2) nach. Sei hierfür eine endliche Menge $A \subseteq K$ und eine reellwertige Funktion h auf A gegeben. Definiere nun für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\alpha_n = \max\{d(x, y)/d_n(x, y) : x, y \in A, x \neq y\},$$

$$\beta_n = \sup\{d_n(x, y)/d(x, y) : x, y \in K, x \neq y\}.$$

Es folgt mit (i) $\alpha_n \rightarrow 1$ und mit (ii) $\beta_n \rightarrow 1$ für $n \rightarrow \infty$. Bezeichnet man für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $L_n(\cdot)$ die Lipschitz-Halbnorm bezüglich der Metrik d_n , so gilt offenbar die Abschätzung $\|h\|_{L_n} \leq \max(\alpha_n, 1)\|h\|_L$. Nun gibt es nach Satz 1.1.20 eine Fortsetzung $g_n \in Lip(K, d_n)$ von h mit $\|g_n\|_{L_n} = \|h\|_{L_n}$, und die Bedingung (iii) sowie die Tatsache $\beta_n < \infty$ liefern $g_n \in lip(K, d)$. Insgesamt ergibt sich

$$\|g_n\|_L \leq \max(\beta_n, 1)\|g_n\|_{L_n} \leq \max(\alpha_n, 1)\max(\beta_n, 1)\|h\|_L.$$

Dies zeigt, daß für jedes $c > 1$ mit g_n für genügend großes n die Bedingung (S) erfüllt ist. \square

Die Definition nichtkritischer Metriken läßt sich mit Leben füllen, denn sie ist maßgeschneidert, um einzusehen, daß auch die verallgemeinerten Höldermetriken, die uns bereits in Kapitel 1 in Definition 1.1.17 begegnet sind, mehr als nur die Punktentrennung von $lip(K)$ gewährleisten.

Satz 3.5.9. *Hat man in d eine Metrik auf K , so ist $\omega(d)$ für jedes $\omega \in \Omega$ aus Definition 1.1.17 eine nichtkritische Metrik auf K .*

Beweis. Sei d eine Metrik auf K und $\omega \in \Omega$ gegeben und $\rho = \omega(d)$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definiere nun die Funktion φ_n auf \mathbb{R}_0^+ durch

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t = 0, \\ \left(n\omega\left(\frac{1}{n}\right)\frac{t}{\omega(t)}\right)^{\frac{1}{2}} & \text{für } 0 < t < \frac{1}{n}, \\ 1 & \text{für } t \geq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Man prüft leicht nach, daß die Funktionen $\omega_n = \varphi_n\omega$ für alle n in Ω liegen. Des weiteren folgen aus den Eigenschaften von ω für die Funktionenfolge (φ_n) die drei Tatsachen

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t) = 1 \quad \forall t > 0,$
- (ii) $\sup_{t > 0} \varphi_n(t) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N},$
- (iii) $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi_n(t) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Hiermit sieht man sofort ein, daß die entsprechende Folge (ρ_n) der Metriken $\rho_n := \omega_n(\rho) = \varphi_n(\rho)\rho$ die Bedingungen von Definition 3.5.7 erfüllt und daher ρ eine nichtkritische Metrik ist. \square

Mit diesen Ergebnissen ist die Separationseigenschaft eines kompakten metrischen Raumes, soweit sie im Hinblick auf die Dualität $lip(K)'' \cong Lip(K)$ in der Literatur auftaucht, einigermaßen ergiebig ausgeleuchtet. Fast nebenbei stößt man im Zusammenhang mit (S) auf ein erstaunliches neues Ergebnis. In der Bemerkung vor dem Satz 3.3.4 wurde bereits darauf hingewiesen, daß Bade, Curtis und Dales in [2] das Lemma 3.3.1 verschärft haben, indem sie nicht nur ein $f \in lip(K^\alpha)$, sondern sogar ein $f \in Lip(K)$ mit den gleichen Eigenschaften konstruiert haben. Hanin gelingt nun das gleiche für die verallgemeinerten Höldermetriken $\omega(d)$ mit einem ähnlichen Beweis (der wieder eine Art Verfeinerung der Beweistechnik darstellt, die zum Fortsetzungssatz 1.1.20 geführt hat). Mit den Bezeichnungen aus Definition 1.1.18 erhält man also eingedenk Satz 1.1.19 die Tatsache, daß für solche Metriken die Separationsbedingung (S) in verschärfter Form gilt, nämlich schon für $Lip(K) \subseteq lip(K^\omega)$.

Satz 3.5.10. *Sei (K, d) ein metrischer Raum $\omega \in \Omega$. Dann hat der metrische Raum $K^\omega = (K, \omega(d))$ die verschärfte Separationseigenschaft:*

Für jede Konstante $c > 1$, jede endliche Menge $A \subseteq K$ und jede reellwertige Funktion h auf A existiert eine Fortsetzung $g \in Lip(K)$ von h , so daß $\|g\|_{L_\omega} \leq c \|h\|_{L_\omega}$ gilt.

Auf die Darstellung des Beweises zu diesem Satz wollen wir hier verzichten, um das Ende dieses Kapitels nicht zu sehr mit technischem und ansonsten wenig erquicklichem Material zu verunstalten. Stattdessen wollen wir einen ästhetischeren Gedankengang von Weaver aus [49] skizzieren, welcher für die gewöhnlichen Höldermetriken sehr elegant auf obiges Ergebnis führt. Aber natürlich muß erst einmal gesagt werden, wofür dieser Aufwand betrieben wird.

Theorem 3.5.11. *Sei K ein kompakter metrischer Raum und U ein Unterraum von $\text{lip}(K)$, der die folgende Bedingung erfüllt:*

Es gibt eine Konstante $c > 1$, so daß für jede endliche Menge $A \subseteq K$ und jede Funktion $f \in \text{lip}(K)$ ein $g \in U$ mit $g|_A = f|_A$ und $\|g\|_L \leq c\|f\|_L$ existiert.

Dann liegt U dicht in $\text{lip}(K)$.

Wir erhalten also eine Art Stone-Weierstraß-Theorem für kleine Lipschitzräume! Das mag auf den ersten Blick eine Überraschung sein, entpuppt sich aber schnell als eine sehr einfache Schlußfolgerung, die uns im Beweis zu Satz 3.3.4 bereits völlig analog begegnet ist. Was dort für kleine Lipschitzfunktionen gezeigt wurde, kann man jetzt genauso für die Elemente aus U durchführen, um einzusehen, daß der Annihilator von U bereits alles andere annulliert. Man beachte, daß sich de Leeuws Satz 3.1.7 hier einmal mehr als Schlüssel zur Lösung des Problems darstellt.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ und ein $\varphi \in \text{lip}(K)'$ mit $\varphi|_U = 0$ gegeben. Dann existiert nach Satz 3.1.7 ein Maß η mit endlichem Träger A in K , so daß

$$\left| \varphi(f) - \int_K f d\eta \right| \leq \varepsilon \|f\|_L \quad \forall f \in \text{lip}(K)$$

gilt. Wähle nun ein $f \in \text{lip}(K)$. Nach der Voraussetzung existiert ein $g \in U$ mit $g|_A = f|_A$ und $\|g\|_L \leq c\|f\|_L$, das heißt

$$\left| \varphi(g) - \int_K g d\eta \right| \leq \varepsilon \|g\|_L \leq c\varepsilon \|f\|_L.$$

Aus $\int_K g d\eta = \int_K f d\eta$ und $\varphi(g) = 0$ folgt daher $|\varphi(f)| \leq (c+1)\varepsilon\|f\|_L$, mithin $\varphi(f) = 0$, und U ist dicht in $\text{lip}(K)$. \square

Da die Bedingung in Satz 3.5.10 für $U = \text{Lip}(K) \subseteq \text{lip}(K^\omega)$ die im Theorem 3.5.11 geforderte Eigenschaft impliziert (durch die bekannte Anpassung an den komplexen Fall), haben wir als Verschärfung von Satz 1.1.19 das

Korollar 3.5.12. *Für kompaktes K liegt $\text{Lip}(K)$ dicht in jedem verallgemeinerten kleinen Hölderraum auf K .*

Man erinnere sich, daß wir dieses Ergebnis bereits im speziellen Fall der Lipschitz- und Hölderräume auf $[0, 1]$ in Satz 1.2.7, allerdings mit völlig anderen Techniken, erhalten haben. Hier wollen wir, wie angekündigt, zumindest im

Fälle der “normalen” Höldermetriken verstehen, warum die in Satz 3.5.10 angegebene Eigenschaft und damit obiges Korollar gilt.

Vergleicht man Theorem 3.5.11 mit dem “richtigen” Satz von Stone-Weierstraß (siehe VIII.4.7 in [55]), so könnte man versucht sein, beide so analog wie möglich zu formulieren. Zunächst einmal kann man sich anstelle von Unterräumen U auf Unteralgebren V von $\text{lip}(K)$, die die konstanten Funktionen enthalten, beschränken und dann nach einem Analogon für die Punktentrennung suchen. Erfolgreich auf dieser Suche war Weaver in [49, S. 284–287], wo er zunächst für abgeschlossene Unteralgebren V im Raum $\text{lip}(K)$ reellwertiger Funktionen durch ein gewitztes Argument relativ schnell skizzierend nahelegt, daß diese stets Unterverbände von $\text{Lip}(K)$ sein müssen. Und mit diesem Ergebnis kann er dann völlig analog wie im Beweis von (i) \Rightarrow (iii) (sowie von (iv) \Rightarrow (ii)) des Theorems 3.5.3 die Äquivalenz der Eigenschaft in Satz 3.5.10 und der Eigenschaften (i) bzw. (ii) nachweisen, wenn man in den letzteren einfach $\text{lip}(K)$ durch V ersetzt. Mit anderen Worten: An die Stelle der Punkttrennung tritt natürlicherweise die gleichmäßige Punkttrennung gemäß (i) bzw. (ii) in Theorem 3.5.3, sprich: die “Separationseigenschaft von V ”. Fast unbemerkt wird in diesen Äquivalenzbeweisen (durch die nötige Verschiebung von Funktionen) natürlich auch die Existenz der konstanten Funktionen in V vorausgesetzt. Und wie beim Satz von Stone-Weierstraß muß man auch hier etwas mit Algebren V von komplexwertigen Funktionen aufpassen, denn für diese erhält man die Eigenschaft in Theorem 3.5.11 aus derjenigen in Satz 3.5.10 bzw. aus der gerade genannten Separationseigenschaft von V durch Übergang zu Real- und Imaginärteil, die also auch in V liegen müssen (was ja für $\text{lip}(K)$ nicht erwähnenswert war). Daher ist auch hier die Forderung der Selbstadjungiertheit angebracht. Wir fassen zusammen und schließen die versprochene Anwendung auf die Hölderräume an.

Theorem 3.5.13. *Sei K kompakt und V eine selbstadjungierte Unteralgebra von $\text{lip}(K)$, welche die konstanten Funktionen enthält und gemäß (i) aus Theorem 3.5.3 die Punkte von K gleichmäßig trennt. Dann liegt V dicht in $\text{lip}(K)$.*

Lemma 3.5.14. *Für kompaktes K , versehen mit einer Höldermetrik d^α , erfüllt $V = \text{Lip}(K) \subseteq \text{lip}(K^\alpha)$ die Bedingungen von Theorem 3.5.13.*

Beweis. Es muß nur die gleichmäßige Punkttrennung von $\text{Lip}(K)$ in $\text{lip}(K^\alpha)$ nachgewiesen werden. Zu gegebenen $x, y \in K$ definiere hierzu f auf K durch

$$f(z) = 2(d^\alpha(x, z) - d^\alpha(x, y)/2) \vee 0 \quad \forall z \in K.$$

Dann gilt $\|f\|_{L_\alpha} \leq 2 \max(1, \text{diam}(K^\alpha))$ unabhängig von x und y und weiter $|f(x) - f(y)| = d^\alpha(x, y)$. Definiere nun $g : K \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ durch $g(z) = d(x, z) \quad \forall z \in K$ und $h : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ durch

$$h(t) = 2(t^\alpha - d^\alpha(x, y)/2) \vee 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}_0^+.$$

Dann ist h stückweise differenzierbar mit beschränkter Ableitung, also (siehe Satz 1.2.3) in $\text{Lip}([0, \text{diam}(K)])$. Folglich ist $f = h \circ g$ — wie man sich schnell anhand einer naheliegenden Rechnung überzeugt — als Komposition von (beschränkten) Lipschitzfunktionen in $\text{Lip}(K)$ mit $L(f) \leq L(h)L(g)$. \square

Man sieht sofort, daß diese Beweisidee von Weaver für jede verallgemeinerte Höldermetrik $\omega(d)$ durchgeht, für welche ω auf $[\delta, \text{diam}(K)]$ für jedes $\delta > 0$ (bezüglich $L(\cdot)$) Lipschitz-stetig ist. Nicht verschwiegen werden sollte an dieser Stelle, daß bereits L. I. Hedberg Ende der 60er Jahre in [19] das Stone-Weierstraß-Theorem für kleine Hölderräume formulierte — und zwar ohne auch nur die Ergebnisse von de Leeuw zu kennen! Anstelle der in Theorem 3.5.13 angegebenen Separationseigenschaft gab er eine etwas kompliziertere lokale gleichmäßige Punktentrennung an, die einmal mehr von Weaver in [49, S. 286] als (zum Glück!) äquivalent zur Seinigen erkannt wurde.

Kapitel 4

Anwendung der Theorie der M -Ideale auf Lipschitzräume

4.1 Grundlegendes zu M -Idealen und Beispiele

In diesem letzten Kapitel wollen wir uns unter einem weiteren Aspekt die Lage des kleinen Lipschitzraums im großen ansehen. Die beiden vorangegangenen Kapitel brachten mit Ergebnissen wie $\text{lip}(K) \simeq c_0$, $\text{Lip}(K) \simeq \ell^\infty$ bzw. $\text{lip}(K)'' \cong \text{Lip}(K)$ im wesentlichen das Resultat, daß sich in “vernünftigen” Fällen der kleine Lipschitzraum zum großen “in etwa so verhält” wie der Folgenraum c_0 zu ℓ^∞ . Nun zieht man ja die einfachen Räume c_0 und ℓ^∞ gerne als Standardexemplare zur Illustration gewisser Banachraumeigenschaften heran. So ist zum Beispiel c_0 nicht in ℓ^∞ komplementiert (siehe IV.6.5 in [55]). Demgegenüber jedoch ist der Annihilator von c_0 im Dualraum $(\ell^\infty)'$ nicht nur komplementiert, sondern darüber hinaus noch mittels einer sehr “schönen” Projektion. c_0 ist nämlich ein M -Ideal in ℓ^∞ . Die nächste Definition und alle noch folgenden grundlegenden Tatsachen zu M -Idealen sind dem Standardwerk [18] entnommen.

Definition 4.1.1. Sei X ein reeller oder komplexer Banachraum.

- (i) Eine lineare Projektion P heißt M -Projektion, falls

$$\|x\| = \max(\|P(x)\|, \|x - P(x)\|) \quad \forall x \in X,$$

und L -Projektion, falls

$$\|x\| = \|P(x)\| + \|x - P(x)\| \quad \forall x \in X.$$

- (ii) Ein abgeschlossener Unterraum $U \subseteq X$ heißt M -Summand, wenn er das Bild einer M -Projektion ist, und L -Summand, wenn er das Bild einer L -Projektion ist.
- (iii) Ein abgeschlossener Unterraum $U \subseteq X$ heißt M -Ideal, wenn sein Annihilator U^\perp ein L -Summand in X' ist.

Satz 4.1.2. c_0 ist ein M -Ideal in ℓ^∞ .

Die Idee zum Beweis dieses Satzes besteht darin, sich an die Gestalt der Funktionale in $c'_0 \cong \ell^1$ zu erinnern (siehe III.5.6 in [55]).

Beweis. Sei ein Funktional $\ell \in (\ell^\infty)'$ gegeben. Dann läßt sich die Einschränkung $\ell|_{c_0}$ mit einem gewissen $(y_n) \in \ell^1$ als

$$\ell((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \quad \forall (x_n) \in c_0$$

schreiben. Wegen $|\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n| \leq \|(x_n)\|_\infty \|(y_n)\|_1$ ist dann auch

$$\ell_1((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \quad \forall (x_n) \in \ell^\infty$$

erklärt und damit wieder ein Funktional $\ell_1 \in (\ell^\infty)'$ gefunden. Da ℓ_1 auf c_0 mit ℓ übereinstimmt, kann man die Abbildung

$$P : (\ell^\infty)' \rightarrow c_0^\perp,$$

definiert durch

$$\ell \mapsto \ell_2 := \ell - \ell_1$$

betrachten. Wir beweisen, daß P eine L -Projektion ist. Wegen der Dreiecksungleichung muß nur noch $\|\ell\| \geq \|\ell_1\| + \|\ell_2\|$ eingesehen werden. Wähle hierfür zu einem $\varepsilon > 0$ ein $x^{(1)} \in B_{\ell^\infty}$ mit $\ell_1(x^{(1)}) \geq \|\ell_1\| - \varepsilon$. Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|$ konvergiert, kann o.B.d.A. die Folge $x^{(1)}$ als abbrechende Nullfolge gewählt werden, d.h. wir können $x_n^{(1)} = 0$ für $n > N$ mit einem $N \in \mathbb{N}$ annehmen. Dieses N sei so groß gewählt, daß auch $\sum_{n=N+1}^{\infty} |y_n| \leq \varepsilon$ ist.

Sei weiter ein $x^{(2)} \in B_{\ell^\infty}$ gegeben mit $\ell_2(x^{(2)}) \geq \|\ell_2\| - \varepsilon$. Ist nun $x^{(3)}$ die Folge, die bis zum N -ten Glied mit $x^{(2)}$ übereinstimmt und sonst lauter Nullen enthält, so gilt wegen $x^{(3)} \in c_0$ und $\ell_2|_{c_0} = 0$ auch $\ell_2(x^{(2)} - x^{(3)}) = \ell_2(x^{(2)})$ (ob die naive Vorstellung dies nun mitmacht oder nicht). Darüberhinaus gilt nach Wahl von N für die "Restfolge" auch $\ell_1(x^{(2)} - x^{(3)}) \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |y_n| \leq \varepsilon$. Jetzt definieren wir $z \in B_{\ell^\infty}$ als diejenige Folge, die bis zum N -ten Glied mit $x^{(1)}$ und ab dem $(N+1)$ -ten Glied mit $x^{(2)}$ übereinstimmt, schließen eingedenk $\ell_2(x^{(1)}) = 0$

$$\begin{aligned} |\ell(z)| &= |\ell_1(x^{(1)}) + \ell_2(x^{(1)}) + \ell_1(x^{(2)} - x^{(3)}) + \ell_2(x^{(2)} - x^{(3)})| \\ &= |\ell_1(x^{(1)}) + \ell_1(x^{(2)} - x^{(3)}) + \ell_2(x^{(2)})| \\ &\geq \ell_1(x^{(1)}) + \ell_2(x^{(2)}) - \varepsilon \geq \|\ell_1\| + \|\ell_2\| - 3\varepsilon \end{aligned}$$

und sind fertig. □

Es ist nach diesem Satz und den vorangegangenen Bemerkungen bezüglich der Entsprechung von Lipschitzräumen und Folgenräumen alles andere als abwegig, die Frage zu stellen, ob oder wann der kleine Lipschitzraum ein M -Ideal im großen ist. Klar ist jedoch, daß die Eigenschaft, ein M -Ideal zu sein, eine geometrische, sprich eine recht “empfindliche” ist, die unter Isomorphismen zerstört werden kann. Sicher kann man nur bei isometrischen Isomorphismen sein, so daß wir an dieser Stelle mit Wulberts Satz 2.4.7 lediglich die folgende bescheidene Aussage treffen können.

Korollar 4.1.3. *Ist K eine kompakte nirgends dichte Teilmenge der reellen Achse vom Lebesgue-Maß Null, so ist $\Lambda(K)$ ein M -Ideal in $H(K)$.*

Sehen wir uns, um uns der Frage, ob bzw. wann der kleine Lipschitzraum ein M -Ideal im großen ist, langsam zu nähern, noch einmal den Beweis des obigen Satzes an. Dort wurde mittels der Darstellung der Funktionale auf c_0 eine kanonische eindeutige Zerlegung jedes Funktionals ℓ auf ℓ^∞ gefunden, und zwar als Summe eines Funktionals ℓ_2 aus dem Annihilator von c_0 und eines Funktionals ℓ_1 , welches sich aus dem Darstellungssatz $c'_0 \cong \ell^1$ ganz natürlicherweise als Formel $\ell_1((x_n)) = \sum_{n=1}^\infty x_n y_n$ ergibt, welche aber — und das ist der Clou — nicht nur für Nullfolgen, sondern für alle $(x_n) \in \ell^\infty$ sinnvoll ist. Und hier nötigt sich stark eine Analogie zu den Lipschitzräumen auf. Wir haben nämlich im Zusammenhang mit de Leeuws Vorgehen in Abschnitt 3.1 (siehe konkret Lemma 3.1.4) eine Darstellung für Funktionale auf $\text{lip}(K)$ gefunden, die dann von Bade, Curtis und Dales in Definition 3.3.3 und vor allem in Satz 3.3.4 auf $\text{Lip}(K)$ “hochgehoben” wurde. In Anlehnung an den obigen Beweis bietet sich nun folgende Konstruktion an. Sei ein $\psi \in \text{Lip}(K)'$ gegeben. Betrachte $\varphi = \psi|_{\text{lip}(K)} \in \text{lip}(K)'$ und hierzu gemäß Lemma 3.1.4 ein $\mu \in M(\hat{K})$, so daß

$$\psi(g) = \int_{\hat{K}} \Phi(g) d\mu \quad \forall g \in \text{lip}(K)$$

gilt. Jetzt kann man das Funktional $\psi_1 \in \text{Lip}(K)'$, definiert durch

$$\psi_1(h) = \int_{\hat{K}} \Phi(h) d\mu \quad \forall h \in \text{Lip}(K)$$

ansetzen. Falls K die in Satz 3.3.4 (und Theorem 3.5.3) genannte Separationseigenschaft hat, ist nach diesem Satz ψ_1 unabhängig von dem gewählten μ , welches ψ gemäß Lemma 3.1.4 darstellt, hängt also nur von ψ ab. Damit ist in diesem Falle die Abbildung

$$P : \text{Lip}(K)' \rightarrow \text{lip}(K)^\perp,$$

gegeben durch

$$\psi \mapsto \psi - \psi_1$$

wohldefiniert und (in Analogie zum Beweis von Satz 4.1.2) ein natürlicher Kandidat für eine mögliche L -Projektion, mit welcher $\text{lip}(K)$ ein M -Ideal in $\text{Lip}(K)$ sein könnte. Entscheidend ist aber natürlich die in Definition 4.1.1 geforderte

Normgleichung, welche die Abbildung P erfüllen müßte, und das kann an dieser Stelle auf dieser abstrakten Ebene leider nicht geklärt werden. Es sei hier lediglich kurz umrissen, was man in der Literatur über die Gestalt und die Eigenschaften von Funktionalen in $\text{lip}(K)^\perp$ weiß.

Bei D. R. Sherbert in [45, III., S. 270] findet sich die Charakterisierung, daß $\text{lip}(K)^\perp$ der w^* -Abschluß desjenigen Unterraums in $Lip(K)'$ ist, welcher von den sogenannten Punktderivationen auf K aufgespannt wird. Ein beschränktes lineares Funktional D auf $Lip(K)$ heißt Punktderivation am Punkt $x \in K$, falls

$$D(f \cdot h) = f(x)D(h) + h(x)D(f) \quad \forall f, h \in Lip(K),$$

d.h. eine Art Produktregel, erfüllt ist. Der uns schon bekannte T. M. Jenkins hat in seiner Arbeit [24, S. 43 f], aufbauend auf den Erkenntnissen von Sherbert, die Extremalpunkte von $B_{Lip(K^\alpha)'}$ und von $B_{\text{lip}(K^\alpha)'}$ für $0 < \alpha < 1$ in den Hölderräumen mit der Norm $\|\cdot\|_{L^\alpha} = \max(\|\cdot\|_\infty, L_\alpha(\cdot))$ näher untersucht. Ausgehend von de Leeuws Einbettungsabbildung $\Phi : Lip(K^\alpha) \rightarrow C^b(\hat{K}^\alpha)$ (siehe Definition 1.1.9 und Satz 1.1.10) schließt er zunächst mit den Mengen

$$E_1 := \{\lambda\delta_x : x \in K, |\lambda| = 1\}$$

und

$$E_2 := \{\lambda(\delta_x - \delta_y)d^{-\alpha}(x, y) : 0 < d^\alpha(x, y) < 2, |\lambda| = 1\}$$

die Tatsache

$$\text{ext } B_{\text{lip}(K^\alpha)'} = E_1 \cup E_2.$$

(Die beteiligten Funktionale sind nun immer als eingeschränkt auf die jeweiligen Teilräume zu betrachten.) Die Stone-Čech-Kompaktifizierung $\beta\hat{K}$ des Raums $\hat{K} = K \cup K^2 \setminus \text{diag}(K^2)$ führt auf die Menge

$$E_3 := \{\lambda\delta_z : z \in \beta\hat{K} \setminus \hat{K}, |\lambda| = 1\},$$

worin jedes δ_z nach Sherbert eine Punktderivation an einem eindeutig bestimmten Punkt $x \in K$ ist. Mit einer Teilmenge D von E_3 gilt dann gemäß Jenkins

$$\text{ext } B_{Lip(K^\alpha)'} = E_1 \cup E_2 \cup D.$$

Über D weiß man fast nichts. Wenigstens ist seit Johnsons Arbeit [25, S. 153] bekannt, daß D für unendliches K nichtleer ist, und das ist ja schon mal was! Beruhigend ist auch die Art der Zusammensetzung der Menge $\text{ext } B_{Lip(K^\alpha)'}$ als Vereinigung von $\text{ext } B_{\text{lip}(K^\alpha)'}$ und D , denn es ist ja im allgemeinen alles andere als “üblich” (siehe zum Beispiel ℓ^∞ -Normen), daß sich Extremalpunkte der Einheitskugel eines Unterraums als Extremalpunkte der Einheitskugel des ganzen Raums wiederfinden. Ist der Raum mittels einer ℓ^1 -direkten Summe zweier Unterräume zusammengesetzt, so kommen beim Schritt “von unten nach oben” auch keine neuen hinzu (siehe I.1.5 in [18]):

Lemma 4.1.4. *Für $X = U_1 \oplus_1 U_2$ gilt (mit der Konvention $\text{ext } B_{\{0\}} = \emptyset$)*

$$\text{ext } B_X = \text{ext } B_{U_1} \cup \text{ext } B_{U_2}.$$

Im Hinblick auf unser langfristiges Ziel hätte man natürlich gerne (lax ausgedrückt)

$$Lip(K^\alpha)' = lip(K^\alpha)' \oplus_1 lip(K^\alpha)^\perp,$$

also eine Art Umkehrung des Lemmas, die man sich im “Niedrigdimensionalen” auch gut vorstellen kann. Was außer einer ℓ^1 -Summe noch möglich ist, um die Aussage des Lemmas zu erhalten, können und wollen wir hier jedoch nicht klären.

Führt man sich das Vorgehen zum Nachweis $\|\ell\| = \|\ell_1\| + \|\ell_2\|$ im Beweis von Satz 4.1.2 noch einmal zu Gemüte, so könnte man vermuten, daß eine genauere Kenntnis der Funktionale in $lip(K)^\perp$ gar nicht nötig ist, vielmehr eine genaue Kenntnis der Elemente der Einheitskugel $B_{Lip(K)}$ im Wechselspiel mit denen in $B_{lip(K)}$. Gleichzeitig sieht man jedoch, wenn man die Analogie mit dem obigen Beweis weitertreibt, die Problematik bei dem Versuch, in der Formel

$$\psi(g) = \int_K g(x) d\mu(x) + \int_{K^2 \setminus \text{diag}(K^2)} \frac{g(x) - g(y)}{d(x, y)} d\mu(x, y)$$

am Quotienten $\frac{g(x) - g(y)}{d(x, y)}$ entlang der Diagonalen, d.h. im “Unendlichen” von \hat{K} , zu “drehen”. Das, was im Beweis von oben einfach durch Abschneiden der Folge geschehen konnte, würde hier die gesamte Funktion in Mitleidenschaft ziehen, da diese ja dann “lokal überall” verändert würde.

So soll an dieser Stelle der vorliegende Ansatz nicht weiter verfolgt werden. Auf eine weitere Analogie zwischen den Folgenräumen und den Lipschitzräumen sei jedoch noch hingewiesen. Aus dem Beweis zu Satz 4.1.2 kann man nämlich auch herauslesen, daß es eine schöne Hahn-Banach-Fortsetzungsabbildung

$$T : c'_0 \rightarrow (\ell^\infty)'$$

für Funktionale auf c_0 gibt. Ist mit einem $(y_n) \in \ell^1$ ein Funktional ℓ_0 auf c_0 gegeben, so setzt man es einfach als ℓ_1 wie im Beweis oben fort, und diese Zuordnung liefert den Operator T . Daß tatsächlich $\|\ell_1\| = \|\ell_0\|$ gilt, sieht man leicht durch Abschneiden von Folgen aus ℓ^∞ mit der Konvergenz von $\sum_{n=1}^\infty |y_n|$. Die Normgleichung $\|\ell\| = \|\ell_1\| + \|\ell_2\|$ zeigt nun, daß die Hahn-Banach-Fortsetzung sogar eindeutig ist. Denn wäre ℓ eine weitere Hahn-Banach-Fortsetzung von ℓ_0 , so hätte man (mit den Bezeichnungen des Beweises) $\ell_2 = \ell - \ell_1 \neq 0$ und damit den Widerspruch $\|\ell\| > \|\ell_1\| = \|\ell_0\|$. Falls die Separationsbedingung erfüllt ist, und unter dieser Voraussetzung wurde ja der obige Ansatz für die Lipschitzräume formuliert, hat man ebenfalls eine Hahn-Banach-Fortsetzungsabbildung

$$S : lip(K)' \rightarrow Lip(K)'$$

vorliegen, wobei mit den Begriffen aus dem obigen Ansatz natürlicherweise $S(\varphi) = \psi_1$ gesetzt wird, wenn μ ein φ gemäß Lemma 3.1.4 repräsentierendes Maß ist. Die Wohldefiniertheit von S folgt wieder aus Satz 3.3.4, und auch die Tatsache $\|\varphi\| = \|\psi_1\|$ kann man völlig analog zum Beweis von Satz 3.3.4 aus der Separationsbedingung herleiten. Wäre mit dem genannten Ansatz $lip(K)$

ein M -Ideal in $Lip(K)$, könnte man wie oben auch die Eindeutigkeit der Hahn-Banach-Abbildung einsehen. Letzteres ist im übrigen kein Zufall, denn jedes M -Ideal U in X ist "Hahn-Banach-glatt", d.h. jedes Funktional auf U besitzt eine eindeutige Hahn-Banach-Fortsetzung in X' (siehe I.1.12 in [18]).

Zu den allgemeinen Eigenschaften von M -Idealen gehört zum Beispiel, daß der Schnitt oder auch die Summe zweier M -Ideale wieder ein M -Ideal ist (siehe I.1.11 in [18]). In einem glatten oder strikt konvexen Raum X lassen sich, außer den trivialen M -Idealen $\{0\}$ und X selbst, keine weiteren M -Ideale finden (siehe I.1.7 in [18]). Leicht einzusehen ist, daß M -Summanden auch M -Ideale sind, aber nicht umgekehrt (siehe S. 2 in [18]). Ein Beispiel für letzteres werden wir am Ende von Abschnitt 4.2 sehen, und eines haben wir natürlich schon gesehen, nämlich das Standardbeispiel c_0 in ℓ^∞ . Schon dieses ist besonders eindrücklich, denn es gibt ja nicht nur keine M -Projektion von ℓ^∞ auf c_0 , sondern bekanntlich überhaupt keine (siehe IV.6.5 in [55]). M -Ideale, die keine M -Summanden sind, nennt man *echte* M -Ideale.

Besonders schöne Aussagen kann man über sogenannte M -eingebettete Räume machen, welche (über die natürliche Einbettung) M -Ideale in ihren Bidualräumen sind. Dies ist ja für c_0 in ℓ^∞ der Fall, und $lip(K)$ wäre ja in $Lip(K)$, wie gesehen, "oft" auch ein solcher Kandidat. Beispielsweise bleibt man in der Klasse der M -eingebetteten Räume, wenn man zu Unterräumen, Quotienten oder c_0 -Summen übergeht (siehe III.1.6 in [18]). Ein weiteres bemerkenswertes Ergebnis ist, daß der Dualraum eines separablen M -eingebetteten Raums selbst wieder separabel ist (vgl. III.3.1 in [18]). Nichtreflexive M -eingebettete Räume (siehe das Standardbeispiel oder auch Korollar 2.3.4 als weitere Anregung) sind nie komplementiert in ihrem Bidualraum (vgl. III.3.7 in [18]). Der Folgenraum c_0 als Prototyp eines M -Ideals findet sich in jedem echten M -Ideal wieder (siehe II.4.7 und III.4.7 in [18]):

Theorem 4.1.5. *Jedes echte M -Ideal X enthält eine Kopie von c_0 . Ist X darüberhinaus M -eingebettet, so ist diese, und auch jede weitere Kopie von c_0 , komplementiert in X .*

Für M -eingebettete Räume X existiert sogar ein Analogon zum Satz von Krein-Milman bzw. zum Satz von Bessaga-Pelczyński. Man hat die Gleichheit

$$B_{X'} = \overline{\text{co}}^{\|\cdot\|} w^*\text{-sexp } B_{X'},$$

wobei $w^*\text{-sexp } B_{X'}$ die sogenannten w^* -stark exponierten Punkte von $B_{X'}$ sind (vergleiche hierzu III.3.2 in [18]).

Ein prominentes von J. Dixmier gefundenes Beispiel eines M -eingebetteten Raums ist der Raum $K(H)$ aller kompakten Operatoren auf einem Hilbertraum H im Raum $L(H)$ aller beschränkten linearen Operatoren auf H (vergleiche III.1.4 (f) in [18] und [54, S. 349]). Besonders schön ist dieses Beispiel auch deshalb, weil $L(H)$ sogar eine Algebra und $K(H)$ ein algebraisches Ideal darin ist. Das nächste Theorem zeigt eine Schnittstelle zwischen den algebraischen und den gemäß Definition 4.1.1 geometrisch definierten Idealen auf (vergleiche V.4.1 und V.4.4 in [18]).

Theorem 4.1.6. *In Banachalgebren gelten folgende Aussagen zu M -Idealen und algebraischen Idealen.*

- (i) *In einer kommutativen Banachalgebra mit Einheit ist ein M -Ideal notwendig ein abgeschlossenes Ideal.*
- (ii) *In einer C^* -Algebra sind die M -Ideale genau die abgeschlossenen zweiseitigen Ideale.*

Aus Punkt (i) dieses Theorems folgt nun sofort das erste negative Ergebnis zu M -Idealen in Lipschitzräumen. Wir wissen ja seit Satz 1.1.3, daß $Lip(K)$ mit der Norm $\|\cdot\|_A = \|\cdot\|_\infty + L(\cdot)$ eine Banachalgebra mit Einheit ist. Diese Einheit liegt jedoch schon in $lip(K)$, so daß $lip(K)$ genau dann ein Ideal in $Lip(K)$ ist, wenn es mit $Lip(K)$ zusammenfällt. Dies ist jedoch nur in diskreten Fällen so (siehe die Voraussetzung zu Johnsons Theorem 2.3.1).

Korollar 4.1.7. *Sei (K, d) ein metrischer Raum mit $\inf_{x \neq y} d(x, y) = 0$, d.h. $lip(K) \subsetneq Lip(K)$. Dann ist $lip(K)$ in der Lipschitzalgebra $(Lip(K), \|\cdot\|_A)$ kein M -Ideal.*

Da die Eigenschaft eines Raums, ein M -Ideal zu sein, eine geometrische ist, kann die Sache bei Umnormierungen völlig anders aussehen. So ist zum Beispiel, wie wir seit der Bemerkung zu Satz 1.1.3 wissen, $Lip(K)$ mit der Standardnorm $\|\cdot\|_L = \max(\|\cdot\|_\infty, L(\cdot))$, zwar eine Algebra mit Einheit, nicht jedoch eine Banachalgebra, so daß Theorem 4.1.6 nicht anwendbar ist. In den Räumen $Lip_0(K)$, wo $f(x_0) = 0$ für ein $x_0 \in K$ und alle $f \in Lip_0(K)$ gilt, und speziell in den Räumen H_α aus Abschnitt 1.2 fehlt sogar die Einheit. In solchen Räumen hat man also noch eine Chance auf ein positives Ergebnis, weswegen wir uns im nächsten Abschnitt speziell auf die Hölderräume H_α konzentrieren werden.

Wir wurden weiter oben bereits mit der Schwierigkeit konfrontiert, durch Betrachtung der Funktionale in $Lip(K)'$ aus dem Annihilator $lip(K)^\perp$ direkt anhand der Definition zu untersuchen, ob oder wann $lip(K)$ ein M -Ideal in $Lip(K)$ ist. Eine Analyse des Beweises zu Satz 4.1.2 zeigte jedoch auch, daß es schon genügen kann, einfach die Elemente der Einheitskugel des Unterraums $U \subseteq X$ "im Verhältnis" zu denen in B_X genau zu kennen. So nimmt es nicht wunder, daß es eine Charakterisierung der Aussage " U ist ein M -Ideal in X " gibt, die ganz allgemein dieses Verhältnis herausstellt. Es ist dies die sogenannte 3-Kugel-Eigenschaft für M -Ideale, und sie ist zu finden im Charakterisierungstheorem I.2.2 in [18].

Theorem 4.1.8. *Für einen abgeschlossenen Unterraum U eines Banachraums X sind äquivalent:*

- (i) *U ist ein M -Ideal in X .*
- (ii) *Für alle $y_1, y_2, y_3 \in B_U$, alle $x \in B_X$ und alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $y \in U$, so daß die Ungleichung*

$$\|x + y_i - y\| \leq 1 + \varepsilon$$

für $i = 1, 2, 3$ Bestand hat.

Mit dieser schönen Charakterisierung werden wir von nun an die Frage, ob ein Raum ein M -Ideal in einem anderen ist, untersuchen. Die 3-Kugel-Eigenschaft (ii) wird übrigens noch einfacher, wenn man weiß, daß X der zweite Dualraum von U ist. Dann haben wir anstelle von (i) die Aussage “ U ist M -eingebettet in X ”, und in (ii) reicht es, die Ungleichung nur für y_1 und $-y_1$ zu fordern (siehe 1.1 f in [54]). Im praktischen Nachprüfen der 3-Kugel-Eigenschaft spielt diese Vereinfachung indes meist keine Rolle, da man dort oft genauso gut von einer n -Kugel-Eigenschaft für ein $n \in \mathbb{N}$ ausgehen könnte. Wenn klar ist, um welche Räume X und vor allem U es sich handelt, werden wir, besonders in Abschnitt 4.2, auch davon reden, daß *ein Element $x \in B_X$ die (Forderung der) 3-Kugel-Eigenschaft erfüllt*, wenn (ii) für dieses spezielle x gilt. Weiter sagen wir, daß *U in X die 3-Kugel-Eigenschaft erfüllt*, falls U ein M -Ideal in X ist, wobei wir diese Begriffe bisweilen auch verwenden, wenn X nicht vollständig ist.

Bemerkung 4.1.9. Im Falle von konkret vorliegenden (meist M -eingebetteten) Banachräumen wie Folgen- oder Funktionenräumen, mit denen wir es ja hier zu tun haben, findet sich zum Überprüfen der 3-Kugel-Eigenschaft eine ausgesprochen nette und einfache Idee in [18, S. 102 f] bzw. in [54, S. 338 f], die dort auch an einigen Beispielen durchexerziert ist. Sie geht von der Beobachtung aus, daß es (in der Sprache der Landau-Symbole $o(\cdot)$ und $O(\cdot)$) oft eine Art “ $o(\cdot)$ - $O(\cdot)$ ”-Relation zwischen den Elementen in einem M -eingebetteten Raum U und den Elementen im Bidualraum $U'' \cong X$ gibt. Wenn die Elemente in X dadurch bestimmt sind, daß bei ihnen eine gewisse Größe auf einem Definitionsbereich K (gemessen durch $|\cdot|$), aus der sich die Norm auf X bzw. U speist, beschränkt bleibt (wie in ℓ^∞ oder auch in $Lip(K)$), so zeichnen sich diejenigen Elemente in U zusätzlich dadurch aus, daß diese Größe in einem gewissen “Bereich” von K sogar gegen Null geht (wie in c_0 oder eben in $lip(K)$). Zur Verifikation der 3-Kugel-Eigenschaft für ein gegebenes $\varepsilon > 0$ wählt man nun eine Teilmenge $M \subseteq K$, so daß $|y_i| \leq \varepsilon$ auf $K \setminus M$ für $i = 1, 2, 3$ ist (und hier wird klar, daß man es auch mit endlich vielen statt nur drei y_i ’s zu tun haben könnte). Dann versucht man zu dem gegebenen $x \in X$ ein $y \in U$ so zu definieren, daß es auf M bis auf höchstens ε mit x übereinstimmt und auf $K \setminus M$ in einer “sich an x orientierenden Weise abfällt”, so daß dort immer noch $|x - y| \leq 1 + \varepsilon$ gilt. Dann ist $|x + y_i - y| \leq |y_i| + |x - y| \leq 1 + \varepsilon$ auf M gesichert und auf $K \setminus M$ nutzt man die Kleinheit der Elemente y_1, y_2 und y_3 aus U , so daß man hier $|x + y_i - y| \leq |x - y| + |y_i| \leq 1 + 2\varepsilon$ abschätzen kann. Das Problem besteht dabei oft in der Behandlung eines Zwischenbereichs am “Rand von M ”, wo das y im Sinne von $|\cdot|$ “kontrolliert abfallen” muß, meist aber noch nicht so gewählt werden kann, daß $|y| \leq \varepsilon$ auf ganz $K \setminus M$ gilt. Zur Arbeitserleichterung mag jedoch noch die Beobachtung beitragen, daß es aufgrund des zur Verfügung stehenden $\varepsilon > 0$ reicht, x und die y_i ’s aus dichten Teilmengen der jeweiligen Einheitskugel anzunehmen bzw. das y nur in einer dichten Teilmenge von U zu suchen.

Am Standardbeispiel c_0 als M -Ideal in ℓ^∞ kann man das gerade beschriebene Vorgehen mit einem Wort als “straightforward” bezeichnen. Ist $N \in \mathbb{N}$ ein

Index, ab dem der Betrag aller weiteren Folgeglieder in y_1, y_2 und y_3 höchstens ε ist, kann man y bis zum N -ten Folgeglied mit der Folge x gleichsetzen und ansonsten mit Nullen auffüllen. Ein Problem auf dem “Rand von M ” hat man in diesem diskreten Fall nicht. Wenn man dies mit dem Vorgehen im Beweis des gleichen Ergebnisses (Satz 4.1.2) vergleicht, wo wir direkt von der Definition 4.1.1 ausgingen, sieht man wohl einerseits Ähnlichkeiten, hat aber andererseits auch den Eindruck, daß die 3-Kugel-Eigenschaft offenbar die Definition auf das Wesentliche eindampft.

Ein einfaches Beispiel für Funktionenräume hat man im Raum $C_0(K)$ aller im “Unendlichen” verschwindenden stetigen Funktionen auf einem lokalkompakten metrischen Raum K , welcher ein M -Ideal im Raum $C^b(K)$ aller beschränkten stetigen Funktionen auf K ist. Sind nämlich die y_i außerhalb eines kompakten $M \subseteq K$ betragsmäßig höchstens ε , so kann man mit der stetigen Abstandsfunktion $\text{dist}(\cdot, M)$ die Funktion $y = x \cdot 1/(1 + \text{dist}(\cdot, M)) \in C_0(K)$ betrachten und sieht rasch $\|x - y + y_i\|_\infty \leq 1 + \varepsilon$ ein. Und weiter nährt sich damit die Hoffnung, daß sich über de Leeuws Einbettungsabbildung aus Satz 1.1.10 dieses Ergebnis auf die Unterräume $Lip(K)$ von $C^b(\hat{K})$ bzw. $\ellip(K)$ von $C_0(\hat{K})$ übertragen könnte.

Das Problem liegt jedoch auf der Hand: Mit einem derart simplen Multiplikationsargument, mit dem wir gerade das y aus dem x erhalten haben, kann es unmöglich gehen. Die Lipschitzfunktionen, die sich mittels der Einbettungsabbildung als beschränkte stetige Funktionen auf $K \cup K^2 \setminus \text{diag}(K^2)$ wiederfinden, sind ja bereits durch ihre Werte auf K vollständig bestimmt. Ein “Rütteln” entlang der Diagonalen $\text{diag}(K^2)$ hieße ja, eine Lipschitzfunktion “lokal überall” zu verändern, womit man Gefahr liefe, sie danach nicht mehr wieder zu erkennen. Das Problem, die 3-Kugel-Eigenschaft im Sinne der “ $o(\cdot)$ - $O(\cdot)$ ”-Relation für Lipschitzfunktionen nachzuprüfen, liegt eben gerade in dem Umstand begründet, daß die $o(\cdot)$ -Bedingung, d.h. die ℓip -Bedingung, eine gleichmäßige lokale Bedingung ist, so daß es fast unmöglich erscheint, ein $M \subseteq K$ zu extrahieren, um die vorgeschlagene Konstruktion für Lipschitzfunktionen überhaupt durchzuführen. Aber da gibt es ein Licht am Horizont, und um dieses besser sehen zu können, wollen wir uns noch einem weiteren Beispiel zuwenden.

Satz 4.1.10. *Sei K ein kompakter Hausdorffraum und D eine abgeschlossene Teilmenge von K . Dann ist der Teilraum*

$$U_D := \{f \in C(K) : f(x) = 0 \quad \forall x \in D\}$$

von $C(K)$ ein M -Ideal in $C(K)$.

Man kann sogar noch mehr aussagen (siehe I.1.4 (a) in [18]): Umgekehrt ist tatsächlich jedes M -Ideal in $C(K)$ wieder ein U_D für ein gewisses abgeschlossenes $D \subseteq K$, und U_D ist genau dann ein M -Summand, wenn D “clopen”, also abgeschlossen und offen ist. Weiter gelten diese Aussagen auch für $C_0(K)$, wenn K nur ein lokalkompakter Hausdorffraum ist. Zum Beweis wird in [18, S. 3 f] direkt von der Definition 4.1.1 ausgegangen und der Rieszsche Darstellungssatz benutzt. Wir wollen Satz 4.1.10 mit der 3-Kugel-Eigenschaft zeigen und hierfür

den Satz von Tietze-Urysohn (siehe B.2.4 in [55]) anwenden. Um dies zu tun, benötigt man die Voraussetzung, daß K normal ist (siehe S. 436 in [55]) und das kann man für kompakte Hausdorffräume in endlicher Zeit einsehen.

Beweis. Seien Funktionen $h \in C(K)$ und $f_1, f_2, f_3 \in U_D$, alle mit Norm höchstens 1, und ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Zu jedem $x \in \partial D$ existiert eine offene Umgebung V_x , so daß $|f_i(y)| \leq \varepsilon \forall y \in V_x$ und $\forall i \in \{1, 2, 3\}$ ist. Dann ist $V := \bigcup_{x \in \partial D} V_x \subseteq K$ offen und die Mengen $E := K \setminus (V \cup D)$ sowie D disjunkte abgeschlossene Mengen in K . Da K normal ist, folgt aus dem Satz von Tietze-Urysohn die Existenz einer stetigen Funktion $f : K \rightarrow [0, 1]$ mit $f|_D = 0$ und $f|_E = 1$. Mit der Produktfunktion $g := h \cdot f \in U_D$ gilt dann

$$\|(h + f_i - g)|_D\|_\infty \leq \|h\|_\infty \leq 1 \quad \forall i \in \{1, 2, 3\},$$

$$\|(h + f_i - g)|_E\|_\infty \leq \|f_i\|_\infty \leq 1 \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}$$

und

$$\|(h + f_i - g)|_{(V \setminus D)}\|_\infty \leq \|1 - f\|_\infty \|h\|_\infty + \|f_i\|_\infty \leq 1 + \varepsilon \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}$$

nach Wahl von V und f . Damit ist U_D ein M -Ideal in $C(K)$. \square

Das Entscheidende an dem Beweisgedanken ist die Anwendung des Fortsetzungssatzes von Tietze-Urysohn, um aus der vorgegebenen Funktion $h \in B_{C(K)}$ die gewünschte Funktion $g \in U_D$ zu gewinnen. Die offene Menge E spielt die Rolle der in Bemerkung 4.1.9 besprochenen Menge M , auf deren Komplement $V \cup D$ die Funktionen f_1, f_2, f_3 über deren Kleinheit kontrolliert werden. Lehrreich im Hinblick auf unsere Fragestellung ist dieses Beispiel deshalb, weil auch wir über einen Fortsetzungssatz verfügen, der es uns erlaubt, aus einer großen Lipschitzfunktion h eine kleine Lipschitzfunktion g zu gewinnen, die h in einem gewissen Sinne annähert. Es ist dies ein Satz, der zum ersten Mal bei Jenkins (siehe Lemma 3.2.6) auftauchte, der von Johnson (siehe Lemma 3.3.1) auf seinen wesentlichen Gehalt hin untersucht wurde und der letzten Endes nichts weiter als die Separationseigenschaft (siehe Theorem 3.5.3) beschreibt: Die große Lipschitzfunktion h kann durch eine kleine Lipschitzfunktion g in der Supremumsnorm angenähert werden mit dem Nebeneffekt, daß die Lipschitznorm von g "im Rahmen" der Lipschitznorm von h bleibt. Wenn man nun noch bemerkt, daß die gleichmäßige Annäherung von g an h auch den Quotienten $\frac{|(h-g)(x) - (h-g)(y)|}{d(x,y)}$ für Punkte x, y , die nicht "zu nahe" beieinander liegen, klein werden läßt, so stößt man — nachdem man sich genügend Zeit zum Nachsinnen genommen hat — auf eine Möglichkeit, wie man die "lokale Menge $K \setminus M$ " aus der *lip*-Bedingung herauskitzeln könnte.

Definition 4.1.11. Für eine Lipschitzfunktion f auf einem metrischen Raum K sei die *Steigung* $L_{xy}(f)$ zwischen den Punkten $x, y \in K$, $x \neq y$, durch

$$L_{x,y}(f) = \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)}$$

erklärt.

Diese Abkürzung ist von nun an nötig. Offensichtlich ist $L_{xy}(\cdot)$ eine Halbnorm auf $Lip(K)$. Das nachfolgende Lemma könnte man als “Fundamentallemma” für alle weiteren Untersuchungen bezeichnen. Man sieht an seinem Beweis sofort, daß seine Aussage das “Testen” der 3-Kugel-Eigenschaft von $lip(K)$ an einzelnen Funktionen $h \in B_{Lip(K)}$ ermöglicht, und genau dieses wird im nächsten Abschnitt 4.2 ausgiebigst geschehen.

Lemma 4.1.12. *Es sei K ein metrischer Raum und $Lip(K)$ mit der Norm $\|\cdot\|_L = \max(\|\cdot\|_\infty, L(\cdot))$ versehen. Weiter gelte für einen Unterraum $\ell IP(K)$ von $Lip(K)$ mit $lip(K) \subseteq \ell IP(K)$ die folgende Bedingung (3K).*

Zu jedem $h \in B_{\ell IP(K)}$, jedem $\varepsilon' > 0$ und jedem $\delta' > 0$ existiere ein $g \in lip(K)$ mit den beiden Eigenschaften

$$\|h - g\|_\infty \leq \varepsilon' \delta' \quad (4.1.1)$$

und

$$0 < d(x, y) \leq \delta' \implies L_{xy}(h - g) \leq 1 + \varepsilon' \quad \forall x, y \in K. \quad (4.1.2)$$

Dann ist die 3-Kugel-Eigenschaft erfüllt und $lip(K)$ ein M -Ideal in $\ell IP(K)$.

Die gleiche Aussage gilt analog in $Lip_0(K)$ mit der Norm $L(\cdot)$.

Beweis. Wir weisen nach, daß $lip(K)$ in $\ell IP(K)$ die 3-Kugel-Eigenschaft erfüllt. Seien also Funktionen $h \in B_{\ell IP(K)}$ und $f_1, f_2, f_3 \in B_{lip(K)}$ sowie ein $\varepsilon' > 0$ gegeben. Wähle mit der lip -Bedingung ein $\delta' > 0$, so daß aus $0 < d(x, y) \leq \delta'$ die Ungleichung

$$L_{xy}(f_i) = \frac{|f_i(x) - f_i(y)|}{d(x, y)} \leq \frac{\varepsilon'}{2} \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}$$

folgt. Nun existiert nach Voraussetzung (3K) und (4.1.1) ein $g \in lip(K)$ mit $\|h - g\|_\infty \leq \delta' \cdot \frac{\varepsilon'}{4}$. Hieraus schließt man für $d(x, y) \geq \delta'$ zunächst

$$L_{xy}(h - g) \leq \frac{|(h - g)(x)| + |(h - g)(y)|}{d(x, y)} \leq \frac{\frac{\varepsilon' \delta'}{4} + \frac{\varepsilon' \delta'}{4}}{\delta'} \leq \frac{\varepsilon'}{2}.$$

Insgesamt folgt damit

$$L_{xy}(h - g + f_i) \leq L_{xy}(h - g) + L_{xy}(f_i) \leq \frac{\varepsilon'}{2} + 1 \leq 1 + \varepsilon' \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}$$

für $d(x, y) \geq \delta'$ und

$$L_{xy}(h - g + f_i) \leq L_{xy}(h - g) + L_{xy}(f_i) \leq 1 + \frac{\varepsilon'}{4} + \frac{\varepsilon'}{2} \leq 1 + \varepsilon' \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}$$

für $0 < d(x, y) \leq \delta'$ nach Wahl von ε' bzw. δ' und wegen (4.1.2).

Die Ungleichung

$$\|h - g + f_i\|_\infty \leq \|h - g\|_\infty + \|f_i\|_\infty \leq \varepsilon' + 1$$

ist nach (4.1.2) für jedes $\delta' \leq 1$ erfüllt, und die Aussage in $Lip_0(K)$ ist klar. \square

Man sieht, daß die lokale Bedingung $0 < d(x, y) \leq \delta'$ gewissermaßen als “Ersatz” für die “Menge $K \setminus M$ ”, auf der wir die “Kleinheit” der Funktionen f_i , $i = 1, 2, 3$, beherrschen wollen, erhalten muß. Leider kann man die Tatsache, daß g selbst wieder eine kleine Lipschitzfunktion ist, zum Nachweis der 3-Kugel-Eigenschaft nicht verwenden, da sie sich einem quasi “fortwährend entzieht”. Natürlich weiß man von der Existenz eines gewissen $\delta'' > 0$, womit $L_{xy}(h - g) \leq L_{xy}(h) + L_{xy}(g) \leq 1 + \frac{\varepsilon'}{2}$ für $0 < d(x, y) \leq \delta''$ gilt, da g die *lip*-Bedingung erfüllt. Weiter sichert die Bedingung (4.1.1) in (3K) noch

$$d(x, y) \geq \delta' \frac{\frac{\varepsilon'}{2}}{1 + \frac{\varepsilon'}{2}} \implies L_{xy}(h - g) \leq 1 + \frac{\varepsilon'}{2},$$

so daß es reichen würde, die zweite Bedingung (4.1.2) nur für $\delta' \varepsilon' (1 + \varepsilon'/2)^{-1}/2$ statt für das (je nach Wahl von ε') “viel größere” δ' zu formulieren. An dem grundsätzlichen Problem, die Forderung (4.1.2) von (3K) zu erfüllen, ändern diese Feinheiten jedoch nichts, denn die Lücke zwischen δ'' und $\delta' \varepsilon' (1 + \varepsilon'/2)^{-1}/2$ kann “immer noch sehr groß” sein und läßt sich auch nicht ohne weitere Anstrengungen wegdiskutieren. Schließlich hängt g und damit δ'' von δ' und ε' ab. Die Bedingung (3K) fordert eben zusätzlich zur gleichmäßigen Annäherung von g an h , daß sich g in seinem Steigungsverhalten auch “lokal an h anpaßt”.

4.2 Die 3-Kugel-Eigenschaft von H_α^0 in Teilräumen von H_α

Jetzt wollen wir das obige Lemma 4.1.12 und damit unsere Methode, die 3-Kugel-Eigenschaft in Lipschitzräumen zu untersuchen, mit Leben füllen. Da wir zur Anwendung des Lemmas das Auffinden einer gleichmäßigen Approximation einer großen Lipschitzfunktion h durch eine kleine Lipschitzfunktion g mit dem Vergleich des Steigungsverhaltens von h und g verbinden müssen, beschränken wir unsere Betrachtungen auf die naheliegenden konkreten Lipschitzräume H_α^0 und H_α für $0 < \alpha < 1$ mit der Norm $L_\alpha(\cdot)$, die wir in Abschnitt 1.2 schon etwas in den Griff bekommen haben. Den Hölderexponenten α halten wir dabei meist fest, so daß in den Steigungen $L_{xy}(\cdot)$, die nicht mit einem weiteren Index α versehen werden, bis auf kenntlich gemachte Ausnahmen auch stets von der Metrik d^α auf $[0, 1]$ ausgegangen wird. Und da wir uns die Steigungen auch vorstellen wollen, betrachten wir zunächst Hölderräume reellwertiger Funktionen.

Beispiel 4.2.1. Wir beginnen mit dem einfachsten Beispiel einer großen Hölderfunktion, das uns einfällt, nämlich mit der Funktion $h : x \mapsto x^\alpha$ auf $[0, 1]$, welche wir durch

$$g : x \mapsto \begin{cases} \varepsilon^{1-\frac{1}{\alpha}} \cdot x & \text{für } 0 \leq x \leq \delta \\ h(x) & \text{für } \delta \leq x \leq 1 \end{cases}$$

mit einem gewissen $\varepsilon > 0$ und $\delta = \varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}$ annähern wollen (siehe Abbildung 4.1). Da g sogar eine Lipschitzfunktion zum Exponenten 1 ist, liegt g in H_α^0 , und da g auf

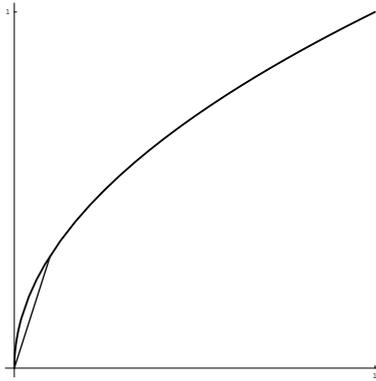


Abbildung 4.1: Die 3-Kugel-Eigenschaft am Beispiel der Wurzelfunktion

$[0, \delta]$ eine polygonale Annäherung an h darstellt, folgt wie im Beweis zum Satz 1.2.20 auch $L_\alpha(g) = 1$. Wählt man $\varepsilon = \varepsilon' \delta'$, so ist die Voraussetzung (4.1.1) von Lemma 4.1.12 erfüllt. Eigenschaft (4.1.2) gilt für die beiden Funktionen sofort global, denn es ist $L_\alpha(h - g) = 1$.

Die Begründung ist sehr einfach, und wir wollen sie von nun an als *Steigungsargument* bezeichnen. Sowohl h als auch g sind beide monoton steigend, so daß aus $x < y$ stets $h(x) \leq h(y)$ und $g(x) \leq g(y)$ folgt. Daraus schließt man

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq \frac{h(y)-h(x)}{(y-x)^\alpha} \leq 1 \\ 0 \leq \frac{g(y)-g(x)}{(y-x)^\alpha} \leq 1 \end{array} \right\} \implies -1 \leq \frac{(h-g)(y) - (h-g)(x)}{(y-x)^\alpha} \leq 1$$

für alle $x, y \in [0, 1]$ mit $x < y$. (Wegen $L_{0x}(h-g) \rightarrow 1$ für $x \rightarrow 0$ folgt schließlich $L_\alpha(h-g) = 1$.)

Allgemein liefert uns das Steigungsargument die folgende Aussage (sogar für beliebige metrische Räume K), welche sich völlig analog beweisen läßt.

Lemma 4.2.2. *Wenn zu einem $h \in B_{Lip(K)}$ (oder $B_{Lip_0(K)}$), jedem $\varepsilon' > 0$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein $g \in (1 + \varepsilon')B_{Lip(K)}$ (oder $(1 + \varepsilon')B_{Lip_0(K)}$) existiert, so daß $\|h - g\|_\infty \leq \varepsilon$ ist und mit $h(x) \geq h(y)$ auch immer $g(x) \geq g(y)$ gilt, dann erfüllt h die Forderung der 3-Kugel-Eigenschaft. Verschärft reicht es für diese Folgerung sogar, ein $g \in lip(K)$ (oder $lip_0(K)$) mit $\|h - g\|_\infty \leq \varepsilon$ und $L_{xy}(g) \leq 1 + \varepsilon'$ sowie $h(x) \geq h(y) \Rightarrow g(x) \geq g(y)$ lediglich für $0 < d(x, y) \leq \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}$ zu finden.*

Konkret haben wir damit zum Beispiel alle monotonen Funktionen in H_α im Griff.

Korollar 4.2.3. *Für jedes monotone $h \in B_{H_\alpha}$ mit $0 < \alpha < 1$ ist die 3-Kugel-Eigenschaft erfüllt.*

Beweis. O.B.d.A. sei $h \in B_{H_\alpha}$ monoton steigend und ein $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir verwenden die Separationseigenschaft (siehe Korollar 1.2.22), die wir für die

Höldräume H_α speziell mit Polygonen g im Beweis zu Satz 1.2.20 (sogar mit $\varepsilon' = 0$) gezeigt haben. Da diese Polygone in allen ihren Knoten h interpolieren, sind auch sie monoton steigend, so daß aus Lemma 4.2.2 die Behauptung folgt. \square

Bemerkung 4.2.4. Natürlich ist jetzt die Versuchung groß, mit Lemma 4.2.3 alle Funktionen von beschränkter Variation in H_α zu erschlagen, indem man diese als Differenz zweier monotoner Funktionen schreibt (siehe hierzu S. 62/63 in [4], insbesondere (3): Jordans Theorem), und sich dann dieser Einzelteile gesondert annimmt. Schaut man sich die 3-Kugel-Eigenschaft jedoch “additiv zerlegt” an, wird man schnell gewahr, daß man dieser Versuchung besser nicht nachgeben sollte.

Beispiel 4.2.5. Zur Illustration des Steigungsarguments wollen wir hier noch ein Analogon zu den gängigen Exemplaren von stetigen aber nirgends differenzierbaren Funktionen (vergleiche zum Beispiel [31, S. 153 f]) betrachten. Unsere Funktion $h \in B_{H_\alpha}$ soll sich als Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} h_k$ über die folgenden $h_k \in 2^{-k} B_{H_\alpha}$ zusammensetzen:

$$h_k(x) := \begin{cases} 2^{-k} x^\alpha & \text{für } 0 \leq x \leq 2^{-k} \\ 2^{-k} (2^{-(k-1)} - x)^\alpha & \text{für } 2^{-k} \leq x \leq 2^{-(k-1)} \\ \text{sonst periodisch} & \text{auf } [0, 1] \text{ fortgesetzt.} \end{cases}$$

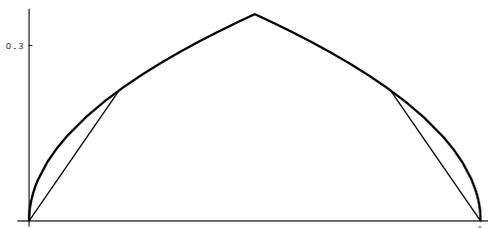


Abbildung 4.2: h_1 und g_1

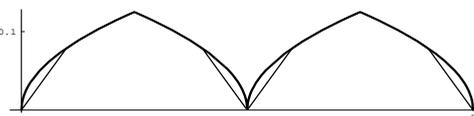


Abbildung 4.3: h_2 und g_2

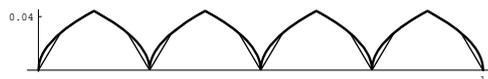


Abbildung 4.4: h_3 und g_3

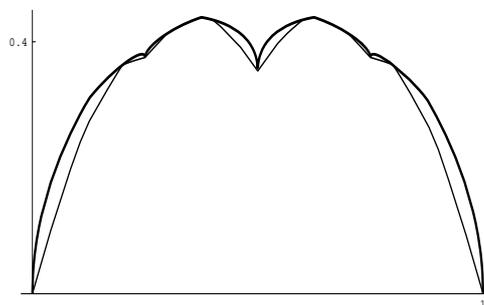


Abbildung 4.5: ... und die Summe

Die Funktionen g_k gleichen die h_k 's an den Stellen, an denen die “ x^α -Bögen” ansetzen, symmetrisch durch Geradenstücke aus und stimmen ansonsten mit den h_k 's überein (siehe Abbildungen 4.2 bis 4.5). Die 3-Kugel-Eigenschaft kann

nun bei vorhandenen $f_i \in B_{H_\alpha^0}$, $i = 1, 2, 3$, separat für h_k und $2^{-k}f_i$, $i = 1, 2, 3$, und $\gamma_k = 2^{-k}(1 + \varepsilon)$ in den Kugeln $2^{-k}B_{H_\alpha}$ nachgewiesen werden (nach dem Steigungsargument sogar mit $\varepsilon = 0$), wenn man g_k nahe genug an h_k wählt. In den folgenden Termen konvergieren die Reihen sowohl gleichmäßig als auch in der $L_\alpha(\cdot)$ -Norm, und man erhält, nach Anwendung der 3-Kugel-Eigenschaft in jeder Kugel $2^{-k}B_{H_\alpha}$, für jedes $i \in \{1, 2, 3\}$

$$L_\alpha \left(\sum_{k=1}^{\infty} h_k - \sum_{k=1}^{\infty} g_k + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} f_i \right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} L_\alpha(h_k - g_k + 2^{-k} f_i) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k = 1 + \varepsilon,$$

so daß die 3-Kugel-Eigenschaft für h mit $g := \sum_{k=1}^{\infty} g_k$ erfüllt ist.

Beispiel 4.2.6. Mittelfristiges Ziel unserer Bemühungen ist es natürlich, Methoden zu haben, mit welchen man “in die Nähe” eines konkreten zwischen H_α^0 und H_α gelegenen Vektorraums vorstoßen kann, in dem H_α^0 die 3-Kugel-Eigenschaft erfüllt. Auf dem Weg dahin wollen wir die nachfolgend definierte Funktion $h \in B_{H_\alpha}$ betrachten.

$$h(x) := \begin{cases} x^\alpha & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ \left(\frac{1}{4}\right)^\alpha - (x - \frac{1}{4})^\alpha & \text{für } \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \left(\frac{1}{4}\right)^\alpha - \left(\frac{3}{4} - x\right)^\alpha & \text{für } \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4} \\ \left(\frac{1}{4}\right)^\alpha - (x - \frac{3}{4})^\alpha & \text{für } \frac{3}{4} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

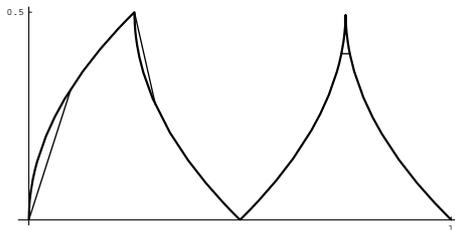


Abbildung 4.6: Hölderfunktion mit drei “kritischen Stellen”

Diese Funktion hat drei “kritische Stellen”, nämlich 0 , $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$, die durch eine geeignete Wahl von kurzen Geradenstücken ausgeglichen werden sollen. Die Funktion $g \in H_\alpha^0$ soll aus diesen Geradenstücken (siehe Abbildung 4.6) bestehen — speziell ist g in einer Umgebung von $\frac{3}{4}$ konstant gewählt — und an allen weiteren Stellen gleich $h(x)$ definiert werden. Trivialerweise geht dann an der Stelle $\frac{3}{4}$ und auch an der Stelle 0 lokal das Steigungsargument durch, nicht jedoch an der Stelle $\frac{1}{4}$ (wiewohl man dort g auch lokal konstant wählen könnte). Für x nahe genug bei $\frac{1}{4}$ und $x < \frac{1}{4} < y$ kann man aber mit $(h - g)(x) = 0$

$$\frac{|(h - g)(y) - (h - g)(x)|}{(y - x)^\alpha} \leq \frac{|(h - g)(y) - (h - g)(\frac{1}{4})|}{(y - \frac{1}{4})^\alpha}$$

abschätzen, und der rechte Quotient ist für y nahe genug bei $\frac{1}{4}$ höchstens 1 , da h und g beide auf $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ monoton fallen. Man sieht, daß nun Lemma 4.1.12 anwendbar ist.

Bemerkung 4.2.7. Obiges Beispiel suggeriert sehr heftig, daß man nun einen schönen einfachen Raum “im Griff” hat. Seien für $c \in [0, 1]$ die Funktionen

$$h_c : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq c \\ (x - c)^\alpha & \text{für } c \leq x \leq 1 \end{cases}$$

definiert und damit H_α^c als der von H_α^0 und der Menge $\{h_c\}_{c \in [0,1]}$ aufgespannte Unterraum von H_α erklärt. Im folgenden wird nun der Versuch unternommen, mit unseren bisher entwickelten Methoden einzusehen, daß H_α^0 die 3-Kugel-Eigenschaft in H_α^c erfüllt:

Zunächst gibt es nach Definition von H_α^c zu jedem $h \in B_{H_\alpha^c}$ ein $f \in H_\alpha^0$, so daß $\tilde{h} := h - f$ eine Funktion ist, welche eine “ähnliche” Gestalt wie die in Beispiel 4.2.6 angegebene Funktion hat und nur an den endlich vielen Stellen, wo “ x^α -Bögen” starten, “kritisch” ist. Hat man an einer solchen Stelle eine Steigungsumkehr von \tilde{h} (wie in $\frac{1}{4}$ oder $\frac{3}{4}$ in Beispiel 4.2.6), so kann man \tilde{h} dort “konstant ausgleichen”, findet keine Steigungsumkehr statt, so kann man (wie an der Stelle 0 in Beispiel 4.2.6) die “ x^α -Bögen” mit Geradenstücken der gleichen Steigung annähern.

Man definiert nun \tilde{g} lokal um die “kritischen Stellen” gleich diesen Geradenstücken und wählt sonst $\tilde{g}(x) = \tilde{h}(x)$. Weiter denkt man natürlich jetzt an $g := \tilde{g} + f$ — und hat ein Problem. Mit dem Steigungsargument oder dem daraus gewonnenen Destillat in Form von Lemma 4.1.11, und dies möchte man hier ja anwenden, kann jetzt lokal lediglich $L_{xy}(h - g) = L_{xy}(\tilde{h} - \tilde{g}) \leq L_\alpha(\tilde{h})$ — also eine nichtsnutzige Abschätzung — gezeigt werden. Und “auf der Ebene von h und g ” muß die Voraussetzung $h(x) \geq h(y) \Rightarrow g(x) \geq g(y)$ zur Anwendung von Lemma 4.2.2 nicht erfüllt sein, wie das Beispiel $\tilde{h} : x \mapsto x^\alpha$, $f : x \mapsto -x^{\alpha'}$ (mit $\alpha < \alpha' < 1$) und \tilde{g} wie in Beispiel 4.2.1 zeigt (für das in einer Umgebung der Null die Funktion $h = \tilde{h} + f$ monoton steigend und $g = \tilde{g} + f$ monoton fallend ist). Schließlich weiß man noch nicht einmal, ob $L_\alpha(g) \leq L_\alpha(h)$ gilt. Die hoffnungsfrohe Konstruktion scheitert also wie in Bemerkung 4.2.4 an der Tatsache, daß man beim Nachweis der 3-Kugel-Eigenschaft Schwierigkeiten bekommt, wenn man die betrachtete Funktion h als Summe zweier “einfacherer” Funktionen behandeln möchte.

Man kann sich noch viele H_α -Funktionen vorstellen, auch welche, bei denen sich obige “kritische Stellen” sogar häufen, für die unsere bisherigen “Abschneidetechniken” (siehe auch noch Lemma 4.2.9) im Sinne der 3-Kugel-Eigenschaft zum Erfolg führen, doch einen Vektorraum, in dem H_α^0 ein M -Ideal ist, haben wir nach wie vor noch nicht gefunden. Zusammenfassend können wir also leider nur die folgende positive Aussage festhalten: Hat eine Funktion $h \in B_{H_\alpha}$ nur endlich viele “kritische Stellen” x_i , in deren Umgebung die *lip*-Bedingung höchstens durch startende ($h(x) = h(x_i) + a(x - x_i)^\alpha$, $a \in [-1, 1]$) oder endende ($h(x) = h(x_i) + a(x_i - x)^\alpha$, $a \in [-1, 1]$) “Wurzelbögen” verletzt ist, so erfüllt h mit einem geeigneten $g \in B_{H_\alpha^0}$ die 3-Kugel-Eigenschaft. Wir werden später im Hinblick auf diese Eigenschaft einen über H_α^0 liegenden Teilraum von H_α untersuchen, der solche Funktionen und sogar ganz H_α^c enthält, nachdem wir

uns näher mit der Frage beschäftigt haben, wie denn die “kritischen Stellen” einer Funktion, in denen die *lip*-Bedingung verletzt ist, formal faßbar sind. Im Zuge dessen werden wir dann auch ein etwas befriedigenderes Ergebnis erhalten. Doch zuvor erwarten uns noch einige unangenehmere Wahrheiten, vor denen wir unsere Augen nicht verschließen sollten.

Geht man von den Abschneidetechniken über kurze Geradenstücke, die in den bisherigen Beispielen zum Erfolg geführt haben, aus und versucht, diese für allgemeinere Hölderfunktionen zu systematisieren und handhabbar zu machen, stößt man schnell auf eine sich ganz natürlicherweise aufnötigende Idee. Man könnte eine Hölderfunktion h durch Polygone annähern, welche in ihren Knoten h interpolieren — so wie es auch Krein und Petuin im Beweis von Satz 1.2.20 mit Erfolg betrieben haben. Die dahinterstehende stille Hoffnung ist natürlich, daß die Bedingung (4.1.2) zur Anwendung von Lemma 4.1.12 womöglich erfüllt ist, wenn man die Schrittweite, sprich den größten Abstand zweier Interpolationsstellen, nur klein genug wählt.

Nahrung erhält dieser Ansatz noch aus zwei weiteren Erwägungen. Erstens verlieren wir nichts, wenn wir uns auf Polygone zur Annäherung von h beschränken, da wir seit Satz 1.2.9 wissen, daß sogar die Menge aller rationalen Polygone dicht in H_α^0 liegt — sprich: Entweder ist die 3-Kugel-Eigenschaft für ein $h \in B_{H_\alpha}$ schon mit Polygonen $g \in H_\alpha^0$ erfüllt oder überhaupt nicht. Zweitens ließe sich der Ansatz mit interpolierenden Polygonen sehr schön auf weitaus allgemeinere Lipschitzräume übertragen, nämlich auf all jene, in denen die Separationsbedingung (siehe Theorem 3.5.3) erfüllt ist. Denn auch in diesen Räumen kann man jede Lipschitzfunktion $h \in B_{Lip(K)}$ durch eine h in endlich vielen Stellen interpolierende kleine Lipschitzfunktion $g \in c \cdot B_{Lip(K)}$ (mit beliebigem $c > 1$ für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $c > \sqrt{2}$ für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) in der Supremumsnorm annähern — in allgemeinen Hölderräumen kann man dies ja konkret (siehe Lemma 3.2.6 bei Jenkins) durch die Anwendung des Fortsetzungssatzes 1.1.20 von McShane erreichen — und nichts anderes (siehe Satz 1.2.20) machen ja noch anschaulicher die Polygone in H_α . Vor diesem Hintergrund ist es ausgesprochen ernüchternd, festzustellen, daß der Versuch, die 3-Kugel-Eigenschaft in H_α mit den vorgeschlagenen interpolierenden Polygonen nachzuweisen, scheitert. Das folgende Beispiel in $H_{1/2}$ zeigt, woran er scheitert.

Beispiel 4.2.8. Wir definieren mit der Folge $(\omega_k)_{k=0}^\infty = (2^{-k})_{k=0}^\infty$ die Funktion $h \in B_{H_{1/2}}$ durch $h(0) := 0$, $h(1) := 1$ und weiter für $k \in \mathbb{N}$ durch

$$h(x) := \begin{cases} h_k(x) := \sqrt{\omega_{k-1}} - \sqrt{\omega_{k-1} - x} & \text{für } \tilde{\omega}_k \leq x \leq \omega_{k-1} \\ \tilde{h}_k(x) := \sqrt{\omega_k} - \sqrt{x - \omega_k} & \text{für } \omega_k \leq x \leq \tilde{\omega}_k, \end{cases}$$

wobei $\tilde{\omega}_k$ als Schnittstelle der beiden “Wurzelbögen” durch $h_k(\tilde{\omega}_k) = \tilde{h}_k(\tilde{\omega}_k)$ gegeben ist (siehe Abbildung 4.7).

Sei nun g ein beliebiges Polygon, welches (für ein gewisses $n \in \mathbb{N}$) an den Stellen $x_0 := 0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n := 1$ seine Knoten hat und dort die Funktion h interpoliert. Weiter sei $k \in \mathbb{N}$ so gewählt, daß $x_1 \in [\omega_k, \omega_{k-1}]$ ist. Nun liegt g im Intervall $[0, \omega_{k-1}]$ sicher oberhalb der Geraden \bar{g} durch die Punkte $(0, 0)$

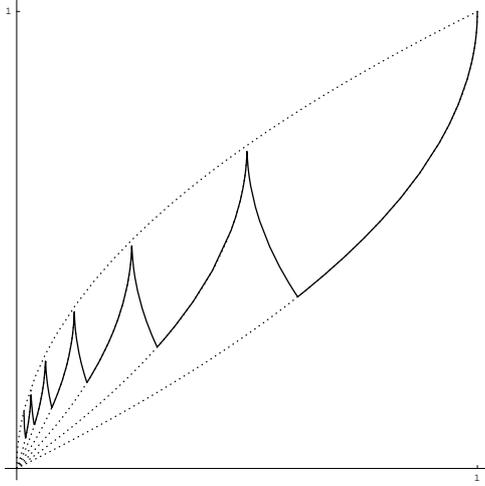


Abbildung 4.7: Das Scheitern einer naheliegenden Methode

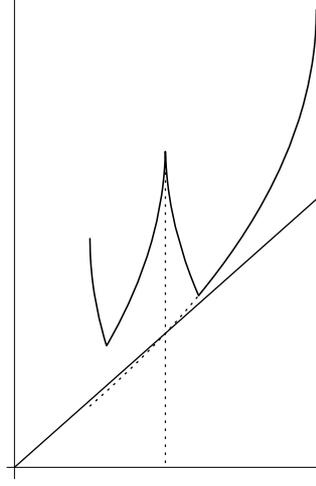


Abbildung 4.8: Ausschnitt von h auf $[\omega_{k+1}, \omega_{k-1}]$ und Gerade \bar{g}

und $(\omega_k, h_k(\omega_k)) = (2^{-k}, 2^{-\frac{k-1}{2}} - 2^{-\frac{k}{2}})$, welche die Steigung

$$m := \frac{2^{-\frac{k}{2}}(2^{\frac{1}{2}} - 1)}{2^{-k}} = 2^{\frac{k}{2}}(2^{\frac{1}{2}} - 1)$$

hat (vergleiche mit der Abbildung 4.8). Für $x \in (\omega_{k+1}, \tilde{\omega}_{k+1}]$ gilt nach Konstruktion $\frac{h(x)-h(\omega_{k+1})}{(x-\omega_{k+1})^{1/2}} = -1$ und zwangsläufig $\frac{g(x)-g(\omega_{k+1})}{(x-\omega_{k+1})^{1/2}} > 0$. Wir zeigen nun, daß der letzte Quotient (unabhängig von k) einen nicht zu vernachlässigenden Beitrag liefert, so daß, für ε' klein genug, die Forderung $L_{xy}(h - g) \leq 1 + \varepsilon'$ (siehe Lemma 4.1.12) lokal nicht erfüllt ist.

Zunächst beobachtet man, daß $\omega'_k := \frac{9}{16}\omega_{k-1} < \tilde{\omega}_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ist, denn es gilt

$$h_k(\omega'_k) = 2^{-\frac{k-1}{2}} \left(1 - \sqrt{\frac{7}{16}}\right) < 2^{-\frac{k-1}{2}} \left(2^{-\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{16}}\right) = \tilde{h}_k(\omega'_k).$$

Mit $\Delta\omega_{k+1} := \omega'_{k+1} - \omega_{k+1} = \frac{9}{16}\omega_k - \frac{8}{16}\omega_k = \frac{1}{16}2^{-k}$ können wir damit

$$L_{\omega_{k+1}\omega'_{k+1}}(g) \geq L_{\omega_{k+1}\omega'_{k+1}}(\bar{g}) = \frac{m\Delta\omega_{k+1}}{(\Delta\omega_{k+1})^{\frac{1}{2}}} = \frac{2^{\frac{k}{2}}(2^{\frac{1}{2}} - 1)\frac{1}{16}2^{-k}}{\frac{1}{4}2^{-\frac{k}{2}}} = \frac{2^{\frac{1}{2}} - 1}{4} =: a$$

mit $a > 0$ von unten abschätzen und erhalten $L_{\omega_{k+1}\omega'_{k+1}}(h - g) \geq 1 + a$ — und zwar unabhängig von k .

Dieses Beispiel zeigt, daß die Voraussetzungen zur Anwendung von Lemma 4.1.12, welches aufbauend auf Bemerkung 4.1.9 ein natürlicher Ansatz zur Untersuchung der 3-Kugel-Eigenschaft vom kleinen im großen Lipschitzraum ist, für Polygone g , die unser spezielles h in ihren Knoten interpolieren, nie erfüllt sind. Sie sind offenbar für kein Polygon erfüllt, welches h in $[0, x_1]$ schneidet.

Es stellt sich jetzt natürlich die Frage, ob es überhaupt ein Polygon geben kann, mit welchem h die 3-Kugel-Eigenschaft erfüllt, wenn all jene nicht in Frage kommen, an die man zuerst denkt. Man beachte hierzu auch das Ergebnis von Ciesielski in Abschnitt 2.1: Dort wird im Beweis zu Theorem 2.1.2 gezeigt, daß jedes $g \in H_\alpha^0$ durch (sogar mit der Schauderbasis “aufgebaute”) Polygone in der Norm $L_\alpha(\cdot)$ approximiert werden kann, welche g in ihren Knoten interpolieren — und das war ja gerade der natürliche Ansatz. Wir werden jedoch gleich sehen, daß man sich von Analogien solcher Art nicht ins Bockshorn jagen lassen sollte. Schließlich bezeichnet man ein Vorgehen meist deshalb als “natürlich”, weil einem nichts Besseres eingefallen ist!

Das Problem in Beispiel 4.2.8 ist, daß die obige Funktion $h \in B_{H_{1/2}}$ um die Stelle 0 “sehr stark” nicht in $H_{1/2}^0$ liegt. Zum einen häufen sich um $x_0 = 0$ Stellen $x < y$ mit $\frac{h(y)-h(x)}{(y-x)^{1/2}} = \pm 1$, und zum zweiten gilt darüberhinaus $L_{0y}(h) > \frac{2}{5}$ für alle $y \in (0, 1]$, da h — wie man durch Betrachtung der lokalen Minima bei $\tilde{\omega}_k$ einsehen kann — oberhalb der Funktion $x \mapsto \frac{2}{5}\sqrt{x}$ liegt. Trotzdem ist h , wie oben schon angedeutet, immer noch nicht “schlimm genug” gewählt, als daß man es nicht doch “polygonal” in den Griff bekommen könnte — eben durch ein Polygon, welches h nicht in seinen Knoten interpoliert. Denn erstens ist h “weg von der Null”, wo man den Steigungen von h durch ein Polygon folgen kann, weitaus harmloser als um die Null, wo man h einfach “abschneiden” kann.

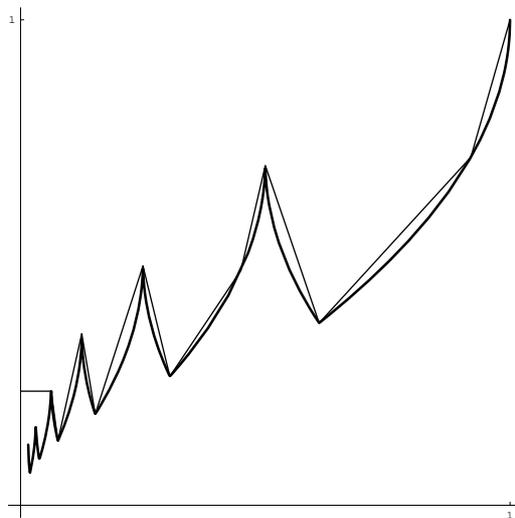


Abbildung 4.9: Die Lösung: \tilde{g} an h

Bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ wähle k' so groß, daß $\omega_{k'} \leq \varepsilon^2$ ist, und definiere $\tilde{g}(x) := \sqrt{\omega_{k'}}$ auf $[0, \omega_{k'}]$. Weiter sei \tilde{g} für alle $k \leq k'$ auf $[\omega_k, \omega_{k-1}]$ als h in seinen Knoten interpolierendes Polygon so gewählt, daß stets $\tilde{g}(\omega_k) = h(\omega_k)$ und $\|(h - \tilde{g})|_{[\omega_{k'}, 1]}\|_\infty \leq \varepsilon$ gilt (siehe Abbildung 4.9). Für $g := \tilde{g} - \sqrt{\omega_{k'}}$ folgt dann (argumentiert wie im Beweis zu Satz 1.2.20) $g \in B_{H_{1/2}^0}$ und $\|h - g\|_\infty \leq \varepsilon$. Weiter ist auch (4.1.2) und damit die Voraussetzung zur Anwendung von Lemma 4.1.12 erfüllt, denn man hat sogar $L_{1/2}(h - g) \leq 1$. Hierzu beobachte man zunächst, daß $\tilde{g}(x) \geq h(x) \quad \forall x \in [0, 1]$ gilt.

Im Fall $0 \leq x < y \leq \omega_{k'}$ ist $L_{xy}(h - g) = L_{xy}(h) \leq 1$ klar. Für $0 \leq x < \omega_{k'} < y$ kann man wegen $\tilde{g} - h \geq 0$ auf $[0, 1]$ und o.B.d.A. mit $(\tilde{g} - h)(x) \geq (\tilde{g} - h)(y)$

$$\begin{aligned} L_{xy}(h - g) &= \frac{|(\tilde{g} - h)(x) - (\tilde{g} - h)(y)|}{|x - y|^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{|(\tilde{g} - h)(x) - 0|}{|x - \omega_{k'}|^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{|h(\omega_{k'}) - h(x)|}{|x - \omega_{k'}|^{\frac{1}{2}}} \leq L_{1/2}(h) \leq 1 \end{aligned}$$

abschätzen. Liegt im Falle $\omega_{k'} \leq x < y \leq 1$ keine Interpolationsstelle ω_k , $k < k'$, zwischen x und y , so schließt man $L_{xy}(h - g) \leq 1$ mit dem Steigungsargument, da g und h zwischen zwei Interpolationsstellen das gleiche ‘‘Steigungsverhalten’’ haben (sprich, dort entweder beide monoton steigen oder beide monoton fallen). Sei ansonsten ω_k die kleinste Interpolationsstelle mit $x < \omega_k < y$, so schließt man wegen $\tilde{g} - h \geq 0$ auf $[0, 1]$ und o.B.d.A. $(\tilde{g} - h)(x) \geq (\tilde{g} - h)(y)$ wie oben

$$\begin{aligned} L_{xy}(h - g) &= \frac{|(\tilde{g} - h)(x) - (\tilde{g} - h)(y)|}{|x - y|^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{|(\tilde{g} - h)(x) - 0|}{|x - \omega_k|^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{|(\tilde{g} - h)(x) - (\tilde{g} - h)(\omega_k)|}{|x - \omega_k|^{\frac{1}{2}}} \leq 1 \end{aligned}$$

wieder mit dem Steigungsargument auf $[x, \omega_k]$.

Holt man die Essenz aus der gerade, insbesondere für den letzten Fall, durchgeführten Argumentation, so läßt sich daraus ein kleines Lemma formulieren.

Lemma 4.2.9. *Für ein $h \in B_{H_\alpha}$ existiere zu jedem $\varepsilon > 0$ ein h in seinen Knoten interpolierendes Polygon g mit $\|h - g\|_\infty \leq \varepsilon$ und $h(x) \geq g(x) \ \forall x \in [0, 1]$, so daß mit x und y zwischen zwei aufeinander folgenden Interpolationsstellen stets $h(x) \geq h(y) \Rightarrow g(x) \geq g(y)$ gilt. Dann folgt $L_\alpha(h - g) \leq 1$ und die 3-Kugel-Eigenschaft ist für h erfüllt.*

Statt der Voraussetzung $h(x) \geq g(x) \ \forall x \in [0, 1]$ kann man auch

$$(0 \leq g(x) \leq h(x) \ \vee \ h(x) \leq g(x) \leq 0) \ \forall x \in [0, 1]$$

oder äquivalent

$$(0 \leq (h - g)(x) \leq h(x) \ \vee \ h(x) \leq (h - g)(x) \leq 0) \ \forall x \in [0, 1]$$

fordern, um das gleiche Ergebnis zu erhalten — wobei man in beiden Bedingungen (vergleiche mit dem obigen Beispiel) die Rollen von h und g vertauschen kann. Bei der letztgenannten Voraussetzung kann man im Falle von verschiedenen Vorzeichen von $(h - g)(x)$ und $(h - g)(y)$ (und nur noch dieser Fall muß untersucht werden)

$$L_{xy}(h - g) = \frac{|(h - g)(x) - (h - g)(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq \frac{|h(x) - h(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq L_\alpha(h) \leq 1$$

abschätzen. Diese Voraussetzung kann zum Beispiel bei Funktionen h erfüllt werden, deren ‘‘kritische Stellen’’ aus ‘‘ x^α -Peaks’’ bestehen (vergleiche die Stellen $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$ in Beispiel 4.2.6), die durch ein g zur x -Achse hin ‘‘abgeschnitten’’

werden können. Im übrigen kann g in obigem Lemma auch nur stückweise als Polygon vorliegen, wenn sonst $g(x) = h(x)$ gesetzt ist.

Durch ein geschicktes Anlegen eines Polygons an die Funktion h aus Beispiel 4.2.8 ist es also doch noch möglich geworden, die 3-Kugel-Eigenschaft für h nachzuweisen und auch dieses Beispiel noch zu “retten”. Der Grund wurde schon genannt: Diese Funktion schlägt nur im Nullpunkt “heftige Kapriolen”, und die Auseinandersetzung mit ihnen konnten wir, indem wir unser g dort einfach konstant definierten, dezent umgehen. Diese Feigheit vor dem Feinde jedoch wird uns bei der folgenden Funktion nicht mehr weiterhelfen. Die Konstruktion dieser Funktion spinnt nämlich die Idee aus Beispiel 4.2.8, wo nur eine “schlimme Stelle” existiert, weiter mit dem Ziel, diese “kritischen Stellen” auf dem ganzen Einheitsintervall zu erzeugen.

Beispiel 4.2.10. Wir definieren ausgehend von der Funktion $h_0 \in B_{H_\alpha}$ mit $h_0(x) := x^\alpha$ die Folge $(h_k)_{k=0}^\infty$ von Funktionen in B_{H_α} rekursiv durch die in den Abbildungen 4.10 und 4.11 veranschaulichte geometrische Konstruktion. Es entsteht mittels der von h_0 und der Funktion $\tilde{h}_0 : x \mapsto 1 - h_0(1 - x)$ gegebenen “Wurzeläste” eine Figur, welche ihrem Aussehen zufolge (siehe Abbildung 4.10) von nun an als *Mandelbereich* oder schlicht als *Mandel* bezeichnet werden soll. Durch Halbierung des zu dieser Mandel gehörigen Intervalls (hier das Einheitsintervall) ergeben sich gemäß Abbildung 4.11 aus dem einen vorliegenden drei neue kleinere Mandelbereiche. Diese entstehen durch zusätzliche “Wurzeläste”, welche zunächst vom Punkt $(\frac{1}{2}, h_0(\frac{1}{2}))$ in beide Richtungen nach unten und dann vom einen Schnittpunkt $(\tilde{\omega}, 1 - h_0(1 - \tilde{\omega}))$ mit dem unteren Mandelrand analog nach oben “geschossen” werden.

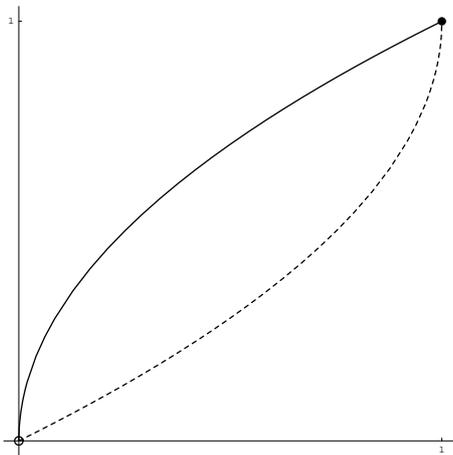


Abbildung 4.10: h_0 und \tilde{h}_0

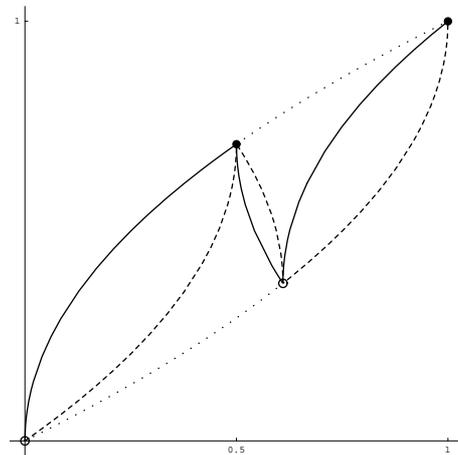


Abbildung 4.11: Mandelzerlegung

Konkret definieren wir die Funktion h_1 (siehe den Graphen in Abbildung 4.11) durch

$$h_1(x) = \begin{cases} x^\alpha & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ (\frac{1}{2})^\alpha - (x - \frac{1}{2})^\alpha & \text{für } \frac{1}{2} \leq x \leq \tilde{\omega} \\ 1 - (1 - \tilde{\omega})^\alpha + (x - \tilde{\omega})^\alpha & \text{für } \tilde{\omega} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

wobei $\tilde{\omega}$ als Schnittstelle der Funktionen $x \mapsto 1 - (1 - x)^\alpha$ und $x \mapsto (\frac{1}{2})^\alpha - (x - \frac{1}{2})^\alpha$

gegeben ist. Die “Komplementärfunktion” \tilde{h}_1 (in Abbildung 4.11 gestrichelt gezeichnet) ist definiert durch

$$\tilde{h}_1(x) = \begin{cases} (\frac{1}{2})^\alpha - (\frac{1}{2} - x)^\alpha & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 - (1 - \tilde{\omega})^\alpha + (\tilde{\omega} - x)^\alpha & \text{für } \frac{1}{2} \leq x \leq \tilde{\omega} \\ 1 - (1 - x)^\alpha & \text{für } \tilde{\omega} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Die Graphen der Funktionen h_1 und \tilde{h}_1 umfassen eine Fläche im Einheitsquadrat, in welcher der Graph einer Funktion in B_{H_α} , der durch die Punkte $(0,0)$, $(\frac{1}{2}, h_1(\frac{1}{2}))$, $(\tilde{\omega}, h_1(\tilde{\omega}))$ und $(1,1)$ geht, höchstens verlaufen kann. h_1 und \tilde{h}_1 verlaufen entlang des Randes dieser Fläche und sind damit Extrempunkte von B_{H_α} . Entsprechendes gilt für alle weiteren noch zu konstruierenden h_k sowie deren “Komplementärfunktionen”.

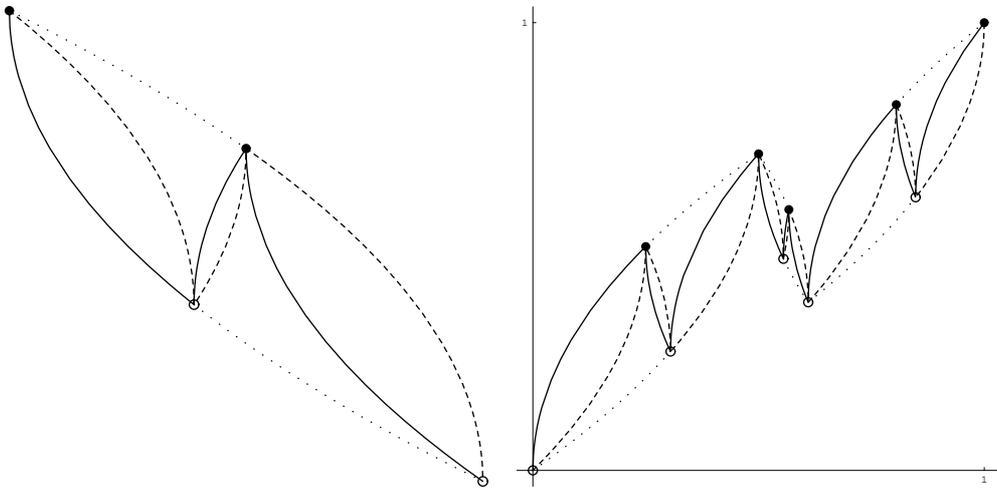


Abbildung 4.12: Mandelzerlegung für Mandeln “vom zweiten Typ”

Abbildung 4.13: h_2 mit (gestrichelter) Komplementärfunktion \tilde{h}_2

Die Funktion h_2 entsteht nun aus h_1 , indem die drei neuen durch die “Wurzeläste” von h_1 und \tilde{h}_1 begrenzten Mandelbereiche wieder durch Halbierung der zugrundeliegenden Intervalle jeweils in drei weitere Mandelbereiche zerlegt werden. Die Mandeln über den Intervallen $[0, \frac{1}{2}]$ und $[\tilde{\omega}, 1]$ haben die gleiche Gestalt wie die ursprüngliche aus Abbildung 4.10 und werden “analog behandelt”. Die nach links gekippte Mandel über $[\frac{1}{2}, \tilde{\omega}]$ wird entsprechend Abbildung 4.12 zerlegt: Es entstehen über dem Intervall $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}(\tilde{\omega} + \frac{1}{2})]$ zwei Mandeln: eine nach links gekippte Mandel “vom zweiten Typ” und eine kleinere, die erste am unteren Schnittpunkt \circ der beteiligten “Wurzeläste” berührende, nach rechts gekippte, die wieder vom “ersten Typ” ist. Über $[\frac{1}{2}(\tilde{\omega} + \frac{1}{2}), \tilde{\omega}]$ ergibt sich eine nach links gekippte Mandel. So erhalten wir insgesamt die Funktion h_2 und ihre Komplementärfunktion \tilde{h}_2 , deren Graphen in Abbildung 4.13 dargestellt sind, und die jetzt neun Mandelbereiche, welche wieder in die zwei Typen eingeteilt werden können, umschließen. Und weil’s so schön ist — spätestens jetzt ist klar, wie die Folge (h_k) rekursiv durch die Standardbehandlung der Mandeln dieser beiden Typen entsteht — haben wir in Abbildung 4.14 noch die Graphen von h_3 und \tilde{h}_3 mit 27 Mandelbereichen festgehalten.

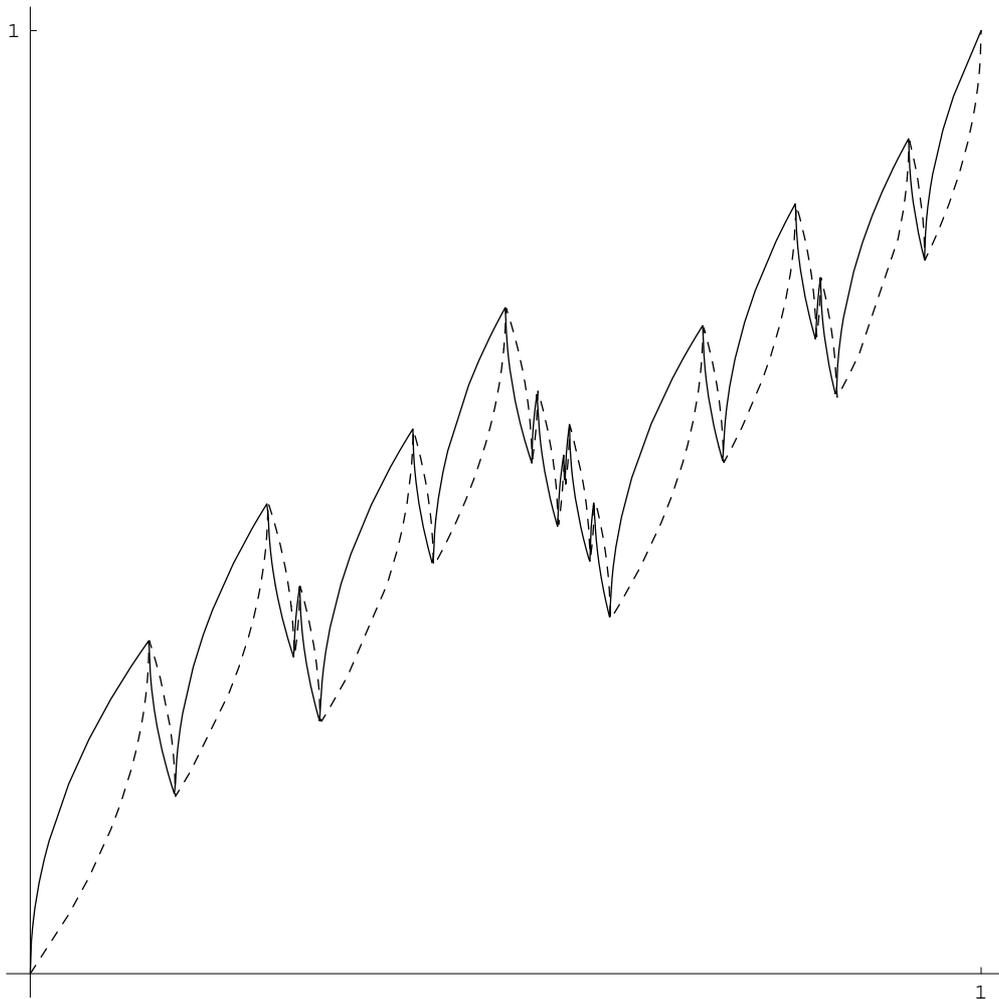


Abbildung 4.14: Approximation der Mandelfunktion: h_3 und (gestrichelt) \tilde{h}_3

Die Konstruktion der Folge (h_k) soll natürlich auf eine Grenzfunktion hinauslaufen, nämlich auf genau diejenige, deren Graph für jeden Iterationsschritt $k \in \mathbb{N}_0$ in allen durch h_k und \tilde{h}_k umschlossenen Mandelbereichen liegt. Nun sind zwar die Funktionen h_k , $k \in \mathbb{N}_0$, alles Extrempunkte in B_{H_α} , welche paarweise (in der Norm $L_\alpha(\cdot)$) einen größeren Abstand als 1 voneinander haben. In der Supremumsnorm jedoch konvergieren sie, ja sie liefern sogar über ihre lokalen Minima und Maxima sofort die Werte der Grenzfunktion auf einer dichten Menge von $[0, 1]$. Denn jeder Hochpunkt \bullet (bzw. Tiefpunkt \circ) einer Funktion h_k — vergleiche mit den Abbildungen 4.10 bis 4.13 — ist auch Hochpunkt (bzw. Tiefpunkt) für alle $h_{\tilde{k}}$ mit $\tilde{k} > k$. Und aufgrund der durchgeführten Halbierungsmethode sieht man auch sofort, daß die Menge M aller Stellen $x \in [0, 1]$, für welche ein h_k ein Minimum oder ein Maximum annimmt, dicht in $[0, 1]$ liegt. So definieren wir also die Funktion \tilde{h} auf M durch

$$\tilde{h}(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} h_k(x) \quad \forall x \in M.$$

\tilde{h} ist Hölder-stetig auf M , denn es gilt sogar $L_{xy}(\tilde{h}) = L_{xy}(h_k) \leq 1$ für $x, y \in M$, $x \neq y$, wenn man k nur groß genug wählt. Damit läßt sich \tilde{h} (eindeutig) zu einer Funktion h auf $[0, 1]$, den Abschluß von M , fortsetzen. Diese Konstruktion ist Standard und liefert darüber hinaus mit $L_{xy}(\tilde{h}) \leq 1 \quad \forall x, y \in M, x \neq y$, auch $h \in B_{H_\alpha}$. Wir geben der so entstandenen Funktion h liebevoll den Namen *Mandelfunktion*.

Die obige Konstruktion zeigt, daß nun in der Mandelfunktion ein Extrempunkt der Einheitskugel B_{H_α} vorliegt, der an allen Stellen $x \in M$ dasjenige kritische Verhalten aufweist, welches wir vorher in Beispiel 4.2.8 nur für eine Stelle in $[0, 1]$ realisiert haben. Konkret bedeutet dies zunächst, daß h an allen Stellen $x \in M$ lokale Minima oder Maxima hat. Darüber hinaus folgert man, wenn man sich einem Hochpunkt (bzw. Tiefpunkt) von h lokal auf “ x^α -Bögen” durch Tiefpunkte (bzw. Hochpunkte) nähert, die Tatsache

$$\limsup_{\substack{y \rightarrow x \\ x \neq y}} L_{xy}(h) = 1 \quad \forall x \in M,$$

das heißt, für die Mandelfunktion ist in allen Stellen $x \in M$ die *lip*-Bedingung so verletzt, wie sie nur verletzt sein kann. Es gilt sogar noch mehr: Die Mandelfunktion hat an allen Stellen $x \in M$ nicht nur Extremwerte, sondern richtige “Peaks”, d.h. ist lokal um jedes $x \in M$ “in etwa so spitz” wie die Funktion $x \mapsto x^\alpha$ in 0. Dies ist für $\alpha \neq \frac{1}{2}$ eine Vermutung, die durch die folgende Überlegung nahegelegt wird: Rechnet man, wie in Beispiel 4.2.8 schon geschehen, für $\alpha = \frac{1}{2}$ nach, auf welche Weise sich um einen Hochpunkt (bzw. Tiefpunkt) von h lokal die weiteren Hochpunkte (bzw. Tiefpunkte) scharen, so stellt man wie in Beispiel 4.2.8 fest, daß h in einer genügend kleinen Umgebung eines Minimums x_\circ oberhalb der Funktion $x \mapsto \frac{2}{5}|x - x_\circ|^{\frac{1}{2}} + h(x_\circ)$ und in einer genügend kleinen Umgebung eines Maximums x_\bullet unterhalb der Funktion $x \mapsto h(x_\bullet) - (\sqrt{2} - 1)|x - x_\bullet|^{\frac{1}{2}}$ liegt. Es gilt also sogar

$$\liminf_{\substack{y \rightarrow x \\ x \neq y}} L_{xy}(h) \geq \frac{2}{5} \quad \forall x \in M$$

für die Mandelfunktion in $H_{1/2}$.

Jetzt liegt also in der Mandelfunktion ein offensichtlich genügend “schwieriges” bzw. genügend allgemeines Exemplar einer Funktion in $H_\alpha \setminus H_\alpha^0$ vor, an welcher man sich nun die Zähne ausbeißen kann. Man merkt schnell, wenn man sich im Hinblick auf unsere bisher gefundenen Methoden der polygonalen Annäherung mit der Mandelfunktion beschäftigt, daß einem sowohl bei dem Versuch, für h die 3-Kugel-Eigenschaft mittels Polygonen und Lemma 4.1.12 nachzuweisen, als auch bei dem Versuch, das Gegenteil zu zeigen, die Epsilons und Deltas durch die Finger gleiten.

Betrachtet man die (“Test-”)Funktionen $f : x \mapsto x^{\alpha'}$ und $-f$ in H_α^0 für $\alpha' > \alpha$ und α' nahe genug an α , sieht man sofort, daß mit einem $\varepsilon' > 0$ die Forderung $L_{0x}(h - g) \leq \varepsilon'$ für $x^\alpha \geq \delta'$ und einem kleinen δ' zur Erfüllung der 3-Kugel-Eigenschaft durch ein $g \in H_\alpha^0$ notwendig ist. Da auch $L_{0x}(h - g) \leq 1 + \varepsilon'$

gelten muß, schließt man für $x^\alpha \leq \delta'$ die Ungleichung $|(h - g)(x)| \leq (1 + \varepsilon')\delta'$, so daß g , o.B.d.A. ein Polygon, notwendig die Funktion h in der Supremumsnorm annähern muß, damit die 3-Kugel-Eigenschaft überhaupt eine Chance hat, erfüllt zu sein. Man könnte aus der Erfahrung von Beispiel 4.2.8 heraus vermuten, daß es ein solches Polygon nicht geben kann, da es, um h in der $\|\cdot\|_\infty$ -Norm anzunähern, zu stark steigen müßte und damit $L_\alpha(h - g) \leq 1 + \varepsilon'$ verletzt wäre.

Das Problem bei einer solchen Konstruktion liegt jedoch darin, die Annäherung von g an h auf verschiedenen Skalen zu denken. Will man zum Beispiel für ein $\varepsilon > 0$ und ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\varepsilon \ll (2^{-k})^\alpha$ den Hochpunkt von h in 2^{-k} bis auf ε durch g annähern, so müßte das Polygon g in $[0, 2^{-k}]$ eine Durchschnittssteigung (gemessen in $L(\cdot)$!) von fast $2^{k(1-\alpha)}$ aufweisen. Diese darf es (schließlich ist $g \in H_\alpha^0$) lokal auch haben, denn für $y - x = (2^{-k(1-\alpha)}\varepsilon')^{1-\alpha}$ mit $\frac{g(y)-g(x)}{y-x} = 2^{k(1-\alpha)}$ gilt $L_{xy}(g) = \frac{|g(x)-g(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq \varepsilon'$, so daß hier “nichts Schlimmes” passieren würde, wenn dieses stark steigende Stück von g mit einem “stark fallenden” von h zusammenträfe. Man ist also gezwungen, die Schrittweite von g in der Größenordnung von höchstens $(2^{-k(1-\alpha)}\varepsilon')^{1-\alpha}$ zu wählen, das heißt man schaut jetzt “viel tiefer” in die Mandel über $[0, 2^{-k}]$ hinein. Da man sich auf der Ebene dieser Größenordnung um die Annäherung von g an h in der Supremumsnorm nicht besonders kümmern muß, könnte man dort “fallende” nach links gekippte Mandeln “übergehen” (sprich, g dürfte dort trotzdem steigen) und sich — mit der erlaubten Steigung — entlang der längeren “steigenden” nach rechts gekippten Mandeln “langsam nach oben hangeln”. Dabei muß man auf einer viel größeren Skala mit einem $\delta' > 0$ noch dafür Sorge tragen, daß $L_{xy}(h - g) \leq 1 + \varepsilon'$ für $0 < |x - y| \leq \delta'$ gilt, und hier hat man es schon mit einer dritten Größenordnung zu tun. Kurzum: Der Versuch, die Frage zu beantworten, ob die Mandelfunktion jedem Polygon auf einer gewissen Skala ein Schnippchen schlagen kann oder ob umgekehrt die Polygone tatsächlich dieses Spielchen mitmachen können, ist gescheitert.

Jedenfalls darf man die Hoffnung haben, daß die Mandelfunktion ein genügend allgemeines Beispiel einer Hölderfunktion ist, welche weit genug davon entfernt ist, die *lip*-Bedingung zu erfüllen, um mit ihrer Hilfe vielleicht irgendwann endgültig entscheiden zu können, ob H_α^0 nun die 3-Kugel-Eigenschaft in H_α erfüllt oder nicht. Im Falle $\alpha = \frac{1}{2}$ kann man übrigens mit dem oben schon genannten Vorgehen schnell

$$\liminf_{\substack{y \rightarrow x \\ x \neq y}} L_{xy}(h) \leq \frac{2}{3} \quad \forall x \in M$$

nachrechnen, womit man mit den obigen Ergebnissen einsieht, daß für alle Stellen $x \in M$ der Grenzwert $\lim_{y \rightarrow x} L_{xy}(h)$ nicht existiert. So ist die Mandelfunktion sicher das konsequentere Analogon zu einer stetigen aber nirgends differenzierbaren Funktion als das etwas halbherzige Beispiel 4.2.5. Dort häufen sich zwar auch die “kritischen Punkte”, diese verletzen aber auf den feineren Skalen die *lip*-Bedingung in einem immer geringeren Ausmaß. So wird denn auch die Funktion aus Beispiel 4.2.5 durch eine weitere noch vorzustellende

Methode behandelbar, welche allerdings schon bei Funktionen vom Kaliber aus Beispiel 4.2.8, wo sich die “kritischen Stellen” nur in einem Punkt häufen, an ihre Grenzen stößt.

Es ist nun höchste Zeit, das, was bisher bloß suggestiv als “kritische Stelle” bezeichnet wurde, endlich formal abzusegnen. Intuitiv bietet sich als Definition einer solchen Stelle x einer Hölderfunktion h natürlich die Forderung

$$\limsup_{\substack{y \rightarrow x \\ x \neq y}} L_{xy}(h) > 0$$

an. Man könnte vermuten, obwohl die *lip*-Bedingung (siehe Definition 1.1.1) als eine gleichmäßige lokale daherkommt, mit der Kompaktheit des Einheitsintervalls für jede Funktion $h \in H_\alpha \setminus H_\alpha^0$ eine solche Stelle aus $[0, 1]$ zu extrahieren in der Lage zu sein. Und wie das Leben manchmal so spielt, stößt man bei dem Versuch, dies zu beweisen, auf ein Gegenbeispiel. Der Satz von Bolzano-Weierstraß liefert nämlich lediglich gegen ein $x \in [0, 1]$ konvergierende Folgen (x_n) und (y_n) in $[0, 1]$ mit $L_{x_n y_n}(h) \geq \varepsilon$ für ein $\varepsilon > 0$. Der — für ein Gegenbeispiel übrigens notwendige — Witz in der Konstruktion der folgenden Funktion liegt darin, daß sich die beiden Folgen “viel schneller” einander annähern als ihrem Grenzwert.

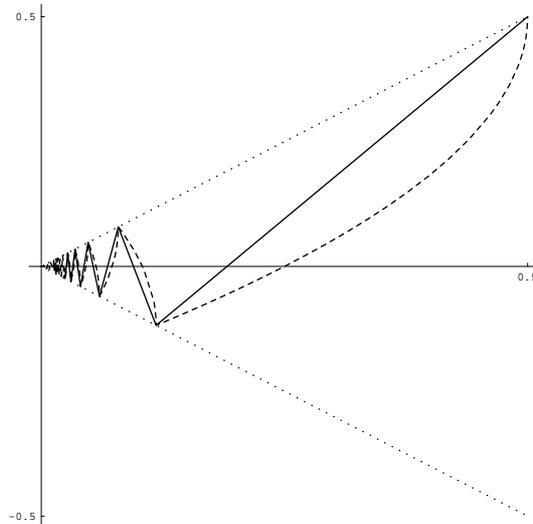


Abbildung 4.15: Konstruktion von $h \in B_{H_{1/2}}$ aus Beispiel 4.2.11

Beispiel 4.2.11. Es sei die Funktion $h \in B_{H_{1/2}}$ mit $|h(x)| \leq |x| \forall x \in [0, 1]$ durch die Konstruktion einer monoton fallenden Folge $(x_k)_{k=0}^\infty \subseteq \mathbb{R}^+$ auf folgende Weise über $f \in H_1$ mit $f : x \mapsto x$ definiert (vergleiche mit der Abbildung 4.2.11). Wähle $x_0 := \frac{1}{2}$ und h linear (steigend) zwischen den Punkten $(x_1, -x_1)$ und (x_0, x_0) , wenn x_1 die Stelle des Schnittpunkts der Graphen von $x \mapsto x_0 - \sqrt{x_0 - x}$ und $-f$ ist. Zu gefundenem x_1 sei h linear (fallend) zwischen (x_2, x_2) und $(x_1, -x_1)$ gewählt, wenn x_2 die x -Koordinate des Schnittpunkts der Graphen von $x \mapsto -x_1 + \sqrt{x_1 - x}$ und f ist. Im weiteren erhält man für

$k \geq 1$ die Stelle x_{2k+1} (bzw. x_{2k+2}) aus x_{2k} (bzw. x_{2k+1}) genauso wie x_1 aus x_0 (bzw. x_2 aus x_1). h wird zwischen den erhaltenen Punkten der Form (x_{2k}, x_{2k}) und $(x_{2k+1}, -x_{2k+1})$ stets wieder linear gewählt.

Wir beweisen, daß (x_k) eine Nullfolge ist. Beachte hierzu, daß sich für gerades k die Stelle x_{k+1} aus x_k durch die Bedingung

$$x_k - \sqrt{x_k - x_{k+1}} = -x_{k+1} \quad (4.2.1)$$

ergibt, welche, in eine quadratische Gleichung übergeführt, die positive (sprich, die für uns richtige) Lösung

$$x_{k+1} = -x_k - \frac{1}{2} + \sqrt{2x_k + \frac{1}{4}} \quad (4.2.2)$$

ausspuckt. Für ungerades k muß man Gleichung (4.2.1) nur mit -1 multiplizieren und erhält dasselbe, so daß in (4.2.2) eine Rekursionsformel für die Folge (x_k) vorliegt. Als monoton fallende Folge in \mathbb{R}^+ hat (x_k) einen Grenzwert $a \geq 0$, für den wegen (4.2.2)

$$2a + \frac{1}{2} = \sqrt{2a + \frac{1}{4}}$$

gilt, woraus sofort $a = 0$ folgt.

Damit ist, wenn man noch $h(0) := 0$ setzt (und im übrigen $h(x) := \frac{1}{2}$ auf $[\frac{1}{2}, 1]$), die Funktion h auf dem ganzen Einheitsintervall definiert. Zudem ist h ein Element von $B_{H_{1/2}}$, da es für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ auf $[x_k, 1]$ ein interpolierendes Polygon zu den entsprechend gewählten ‘‘Wurzelästen aus der Einheitskugel’’ ist und $L_{0x}(h) \leq 1 \ \forall x \in [0, 1]$ wegen $|h(x)| \leq |x| \ \forall x \in [0, 1]$ gilt. Aus letzterem folgt auch sofort $\lim_{x \rightarrow 0} L_{0x}(h) = 0$. Da weiter h auf $[x_k, 1]$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ ein Polygon ist und damit auf jedem dieser Intervalle sogar eine Lipschitzbedingung zum Exponenten $\alpha = 1$ erfüllt (freilich mit Lipschitzkonstanten L_k , für welche $L_k \rightarrow \infty$ mit $k \rightarrow \infty$ gilt), hat man auch $\lim_{|x-y| \rightarrow 0} L_{xy}(h) = 0$ auf jedem Intervall $[x_k, 1]$. Insgesamt erfüllt also h in jedem Punkt $x \in [0, 1]$ die punktweise *lip*-Bedingung $\lim_{y \rightarrow x} L_{xy}(h) = 0$, nicht aber die gleichmäßige *lip*-Bedingung in der Umgebung der Null, denn es gilt nach Konstruktion $L_{x_{k+1}x_k}(h) = 1 \ \forall k \in \mathbb{N}_0$.

Es existieren also Hölderfunktionen (die obige Konstruktion sichert dies jedenfalls für alle α mit $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$), die die punktweise *lip*-Bedingung auf ganz $[0, 1]$ erfüllen und dennoch keine kleinen Hölderfunktionen gemäß Definition 1.1.1 sind. Im Spezialfall $\alpha = 1$ ist diese Unterscheidung trivialerweise nicht nötig. Am Rande sei hier noch bemerkt, daß nur bei Krein und Petuin in [32] die punktweise *lip*-Bedingung zu finden ist, alle anderen in dieser Arbeit genannten Autoren verwenden die stärkere Definition der gleichmäßigen *lip*-Bedingung, die im übrigen für die meisten Ergebnisse insbesondere der Kapitel 2 und 3 auch essentiell ist.

Das vorangegangene Beispiel zeigt, daß die Forderung $\lim_{y \rightarrow x} L_{xy}(h) = 0$ für eine adäquate Definition einer ‘‘kritischen Stelle’’ x einer Lipschitzfunktion h

offenbar zu stark ist. Es reicht, wenn zu einem $\varepsilon > 0$ gegen x konvergierende Folgen (x_n) und (y_n) mit $L_{x_n y_n}(h) \geq \varepsilon \forall n \in \mathbb{N}$ existieren. Ist x jedoch noch Häufungspunkt solcher “kritischer Stellen” (eventuell mit immer kleiner werdendem $\varepsilon > 0$), so wollen wir x immer noch nicht als völlig “unkritisch” ansehen (auch wenn diese Feinheit später in Satz 4.2.15 nicht benötigt wird). Wir entscheiden uns hier für eine “positive” Definition der “Harmlosigkeit” einer Lipschitzfunktion in einem Punkt x .

Definition 4.2.12. Eine Funktion h auf einem metrischen Raum K erfüllt in einem Punkt $x \in K$ die *lip*-Bedingung, falls es eine Umgebung U_x von x gibt, in der h die *lip*-Bedingung gemäß Definition 1.1.1 erfüllt. In diesem Fall heißt x *nichtkritische Stelle* von h und im umgekehrten Fall *kritische Stelle* von h .

Diese Art, die *lip*-Bedingung zu lokalisieren, erscheint recht natürlich. Man hat damit sofort in

$$\{x \in K : h \text{ erfüllt die } lip\text{-Bedingung in } x\} = \bigcup_{x \text{ nichtkritisch}} U_x$$

eine offene Menge in K und erhält das folgende

Lemma 4.2.13. Erfüllt eine Funktion g auf einem Kompaktum K in jedem Punkt die *lip*-Bedingung, so liegt g in $lip(K)$.

Beweis. Zunächst erfüllt g die gleichmäßige *lip*-Bedingung in K . Sonst existieren wie gehabt ein $\varepsilon > 0$ und konvergente Folgen (x_n) und (y_n) in K mit gleichem Grenzwert x und $L_{x_n y_n}(g) \geq \varepsilon \forall n \in \mathbb{N}$, womit x eine kritische Stelle von g ist. Widerspruch. Nehmen wir nun an, es gilt $g \notin lip(K)$, dann existieren konvergente Folgen (x_n) und (y_n) mit $L_{x_n y_n}(g) \rightarrow \infty$. Da g die *lip*-Bedingung erfüllt, haben die beiden Folgen verschiedene Grenzwerte \tilde{x} und \tilde{y} in K . Andererseits folgt aus der Beschränktheit von g — diese Funktion ist stetig, da sie die *lip*-Bedingung erfüllt — die Beschränktheit von $L_{x_n y_n}(g) = \frac{|g(x_n) - g(y_n)|}{d(x_n, y_n)}$, da $d(x_n, y_n)$ von unten beschränkt bleibt — ein Widerspruch. \square

Jetzt haben wir genug Vorarbeit geleistet, um langsam auf das Hauptergebnis dieses Abschnitts zusteuern zu können. Hierbei widmen wir uns zunächst der Menge aller Funktionen in H_α , welche nur endlich viele kritische Stellen besitzen, also gewissermaßen nur “punktweise große Hölderfunktionen” sind. Diese Menge ist offenbar ein Unterraum von H_α .

Definition 4.2.14. Es sei mit H_α^p derjenige Unterraum aller Funktionen in H_α bezeichnet, welche höchstens endlich viele kritische Stellen besitzen.

Einem Teilraum von H_α^p sind wir im Raum H_α^c aus Bemerkung 4.2.7 schon begegnet. Dort sind die Bemühungen, nachzuweisen, daß H_α^0 die 3-Kugel-Eigenschaft in H_α^c hat, gescheitert. Wir wollen uns nun einer neuen Idee zuwenden, eine große Hölderfunktion h durch eine kleine “im Sinne der 3-Kugel-Eigenschaft” anzunähern. Wie in Bemerkung 4.1.9 angedeutet, soll “ $g = h$ ” dort gewählt

werden, wo h “angenehm”, sprich: “im kleinen Hölderraum” ist, und “ $g = 0$ ” an den kritischen Stellen von h , d.h. dort, wo h “im großen Raum” liegt. Geht man von der Halbnorm $L_\alpha(\cdot)$ aus, welche konstante Funktionen gleich Null setzt, läßt sich “ $g = h$ ” als $g = h - c$ für ein $c \in \mathbb{R}$ deuten, und “ $g = 0$ ” bedeutet $g = \text{const.}$ Man könnte daher ein $h \in H_\alpha^p$ so durch ein $g \in H_\alpha^0$ anzunähern versuchen, daß man “dem Verlauf” von h an den nichtkritischen Stellen durch das g “folgt”, und zwar bis auf eine additive Konstante, die sich in einer gewissen Umgebung einer kritischen Stelle, wo man g einfach konstant hält, ändert. Nach dem “Überspringen” einer solchen Umgebung bewegt sich g in einem neuen Abstand zu h wieder in der gleichen Weise als “kleine Hölderfunktion” wie h . Veranschaulicht ist diese “Methode der eingeschobenen Konstanten” anhand der Beispiele 4.2.1 und 4.2.6 in den Abbildungen 4.16 und 4.17. Man benutzt die gleichmäßige Stetigkeit von h , um die Umgebungen um die kritischen Stellen klein genug zu wählen, so daß h durch g in der $\|\cdot\|_\infty$ -Norm angenähert wird. Daß man $g \in H_\alpha^0$ erhält, wird nicht sonderlich überraschen. Wichtig ist natürlich die Bedingung (4.1.1) aus Lemma 4.1.12, und hier hat man Glück: Diese ist sogar mit $L_{xy}(h - g) \leq 1$ für $|x - y|^\alpha \leq \delta'$ erfüllt — es funktioniert also.

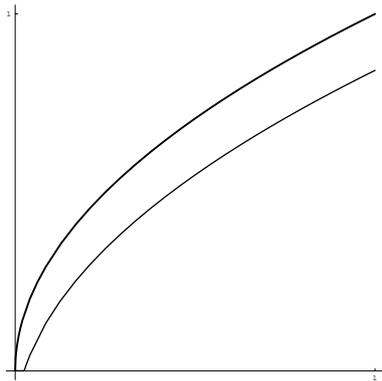


Abbildung 4.16: Beispiel 4.2.1 mit Methode der eingeschobenen Konstanten

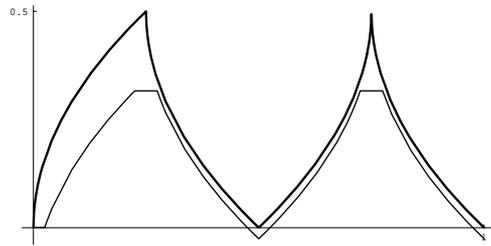


Abbildung 4.17: Beispiel 4.2.1 mit Methode der eingeschobenen Konstanten

Satz 4.2.15. H_α^0 ist ein M -Ideal in H_α^p .

Beweis. Sei ein h aus der Einheitskugel von H_α^p mit den endlich vielen kritischen Stellen $x_1 < \dots < x_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gegeben, wobei wir aus beweistechnischen Gründen o.B.d.A. $x_1 = 0$ und $x_n = 1$ hinzunehmen. Weiter seien $\varepsilon' > 0$ und $\delta' > 0$ zur Anwendung von Lemma 4.1.12 gegeben. Dabei sei $\varepsilon := \varepsilon' \delta'$ gesetzt und zuvor δ' o.B.d.A. so klein gewählt, daß $(\delta')^{\frac{1}{\alpha}} \leq \frac{1}{2} \min_{1 \leq k \leq n-1} |x_k - x_{k+1}|$ gilt. (Man beachte, daß man in Lemma 4.1.12 das δ' “ungestraft” verkleinern darf.) Wir wählen nun mit der gleichmäßigen Stetigkeit von h ein $\delta > 0$ so, daß $|h(x) - h(y)| \leq \frac{\varepsilon}{n}$ aus $|x - y| \leq 2\delta$ folgt (also $\delta \leq \frac{1}{2}(\frac{\varepsilon}{n})^{\frac{1}{\alpha}}$), wobei zusätzlich noch $\delta \leq \frac{1}{2}(\delta')^{\frac{1}{\alpha}}$ gelten soll. Dieses δ liefert in den δ -Umgebungen um die kritischen Punkte von $h \in B_{H_\alpha^p}$ die Grundlage für die Konstruktion des $g \in H_\alpha^0$, welches h in der gewünschten Weise approximiert.

Zunächst definieren wir mit dem gefundenen δ für jedes $k \in \{1, \dots, n\}$ die Größe

$$\Delta h(x_k) := h(x_k - \delta) - h(x_k + \delta),$$

setzen noch $h(-\delta) := 0$ und definieren damit, soweit $x \in [0, 1]$ ist, die Funktion g durch

$$g(x) := \begin{cases} h(x_k - \delta) + \sum_{i=1}^{k-1} \Delta h(x_i) & \text{für } x_k - \delta \leq x \leq x_k + \delta \\ h(x) + \sum_{i=1}^k \Delta h(x_i) & \text{für } x_k + \delta \leq x \leq x_{k+1} - \delta. \end{cases}$$

Offenbar ist g nach Konstruktion stetig (man beachte $h(x_k - \delta) + \sum_{i=1}^{k-1} \Delta h(x_i) = h(x_k + \delta) + \sum_{i=1}^k \Delta h(x_i)$), und es ist $g(0) = 0$. Wir zeigen $\|h - g\|_\infty \leq \varepsilon$: Zunächst gilt $|\Delta h(x_k)| \leq \frac{\varepsilon}{n} \forall k \in \{1, \dots, n\}$ nach Wahl von δ . Hieraus folgt (aus dem gleichen Grund) für $x_k - \delta \leq x \leq x_k + \delta$ und alle $k \in \{1, \dots, n\}$ die Ungleichung

$$|h(x) - g(x)| \leq |h(x) - h(x_k - \delta)| + \sum_{i=1}^{k-1} |\Delta h(x_i)| \leq \frac{\varepsilon}{n} + (k-1) \frac{\varepsilon}{n} \leq \varepsilon.$$

Für $x_k + \delta \leq x \leq x_{k+1} - \delta$ ($k = 1, \dots, n-1$) schließt man

$$|h(x) - g(x)| \leq \sum_{i=1}^k |\Delta h(x_i)| \leq (n-1) \frac{\varepsilon}{n} \leq \varepsilon.$$

Jetzt zeigen wir $g \in H_\alpha^0$, indem wir Lemma 4.2.13 anwenden und uns auf den Nachweis beschränken, daß g in jedem Punkt die *lip*-Bedingung erfüllt. Für alle Punkte, die nicht die Gestalt $x_k - \delta$ oder $x_k + \delta$ für ein $k \in \{1, \dots, n\}$ haben, ist dies klar, denn solche Punkte haben Umgebungen, in denen g entweder konstant ist oder sich nur durch eine additive Konstante von h unterscheidet, wobei h in diesen Umgebungen selbst die *lip*-Bedingung erfüllt. Es bleibt also, die Größe $L_{xy}(g)$ für x, y aus einer Umgebung eines Punktes $x_k - \delta$ oder $x_k + \delta$ zu betrachten. Im Falle $x_{k-1} + \delta < x < x_k - \delta < y < x_k + \delta$ schätzt man

$$\begin{aligned} L_{xy}(g) &= \frac{\left| \left(h(x) + \sum_{i=1}^{k-1} \Delta h(x_i) \right) - \left(h(x_k - \delta) + \sum_{i=1}^{k-1} \Delta h(x_i) \right) \right|}{|x - y|^\alpha} \\ &\leq \frac{|h(x) - h(x_k - \delta)|}{|x - (x_k - \delta)|^\alpha} = L_{x, x_k - \delta}(h) \end{aligned}$$

ab und völlig analog für $x_k - \delta < x < x_k + \delta < y < x_{k+1} - \delta$ nach Definition von $\Delta h(x_k)$

$$\begin{aligned} L_{xy}(g) &= \frac{\left| \left(h(x_k - \delta) + \sum_{i=1}^{k-1} \Delta h(x_i) \right) - \left(h(y) + \sum_{i=1}^k \Delta h(x_i) \right) \right|}{|x - y|^\alpha} \\ &\leq \frac{|h(x_k - \delta) - h(y)|}{|(x_k - \delta) - y|^\alpha} = L_{x_k - \delta, y}(h). \end{aligned}$$

In den übrigen Fällen, in denen x, y beide (lokal) unterhalb oder oberhalb von $x_k - \delta$ bzw. $x_k + \delta$ liegen, gilt ohnehin $L_{xy}(g) = L_{xy}(h)$. Aus der Tatsache, daß

h in den Punkten $x_k - \delta$ für $k = 2, \dots, n$ und in $x_k + \delta$ für $k = 1, \dots, n - 1$ die *lip*-Bedingung erfüllt, folgt nun gleiches mit den erhaltenen Abschätzungen auch für g , so daß insgesamt $g \in H_\alpha^0$ aus Lemma 4.2.13 geschlossen werden kann.

Nun bleibt noch $L_{xy}(h - g) \leq 1$ für $|x - y|^\alpha \leq \delta'$ zu zeigen. Wegen $\delta \leq \frac{1}{2}(\delta')^{\frac{1}{\alpha}} \leq \frac{1}{4} \min_{1 \leq k \leq n-1} |x_k - x_{k+1}|$ tritt für $|x - y|^\alpha \leq \delta'$ mit o.B.d.A. $x < y$ einer der folgenden fünf Fälle ein:

1. Fall: $x_{k-1} + \delta \leq x < y \leq x_k - \delta$

$$\implies L_{xy}(h - g) = L_{xy} \left(\sum_{i=1}^{k-1} \Delta h(x_i) \right) = 0.$$

2. Fall: $x_{k-1} + \delta < x \leq x_k - \delta < y \leq x_k + \delta \implies L_{xy}(h - g) =$

$$\begin{aligned} & \left| \frac{h(x) - \left(h(x) + \sum_{i=1}^{k-1} \Delta h(x_i) \right) - \left(h(y) - \left(h(x_k - \delta) + \sum_{i=1}^{k-1} \Delta h(x_i) \right) \right)}{|x - y|^\alpha} \right| \\ &= \frac{|-h(y) + h(x_k - \delta)|}{|x - y|^\alpha} \leq \frac{|h(x_k - \delta) - h(y)|}{|(x_k - \delta) - y|^\alpha} = L_{x_k - \delta, y}(h) \leq 1. \end{aligned}$$

3. Fall: $x_k - \delta \leq x < y \leq x_k + \delta$

$$\implies L_{xy}(h - g) = L_{xy}(h) \leq 1, \text{ da } g = \text{const. auf } [x_k - \delta, x_k + \delta].$$

4. Fall: $x_k - \delta \leq x < x_k + \delta \leq y \implies L_{xy}(h - g) =$

$$\begin{aligned} & \left| \frac{h(x) - \left(h(x_k - \delta) + \sum_{i=1}^{k-1} \Delta h(x_i) \right) - \left(h(y) - \left(h(y) + \sum_{i=1}^k \Delta h(x_i) \right) \right)}{|x - y|^\alpha} \right| \\ &= \frac{|h(x) - h(x_k - \delta) + (h(x_k - \delta) - h(x_k + \delta))|}{|x - y|^\alpha} \leq \frac{|h(x) - h(x_k + \delta)|}{|x - (x_k + \delta)|^\alpha} \\ &= L_{x, x_k + \delta}(h) \leq 1. \end{aligned}$$

5. Fall: $x_{k-1} + \delta < x \leq x_k - \delta < x_k + \delta \leq y \leq x_{k+1} - \delta \implies L_{xy}(h - g) =$

$$\begin{aligned} & \left| \frac{h(x) - \left(h(x) + \sum_{i=1}^{k-1} \Delta h(x_i) \right) - \left(h(y) - \left(h(y) + \sum_{i=1}^k \Delta h(x_i) \right) \right)}{|x - y|^\alpha} \right| \\ &= \frac{|\Delta h(x_k)|}{|x - y|^\alpha} \leq \frac{|h(x_k - \delta) - h(x_k + \delta)|}{|(x_k - \delta) - (x_k + \delta)|^\alpha} \leq L_{x_k - \delta, x_k + \delta}(h) \leq 1. \end{aligned}$$

Es folgt mit Lemma 4.1.12 die Behauptung. □

Es erweist sich H_α^p als nicht abgeschlossen in H_α , und der Leser sei an dieser Stelle einmal mehr um Nachsicht für die Verwendung des Begriffs des M -Ideals gebeten, welches per definitionem "eigentlich" nur in Banachräumen "leben"

kann (siehe Definition 4.1.1 und Theorem 4.1.8, aber auch Bemerkung 4.1.9 unten). Mit dem oben erhaltenen Ergebnis ist H_α^0 jedenfalls (auch) ein M -Ideal im Abschluß von H_α^p in H_α . Auf der Suche nach diesem kann man sich von der großen Hölderfunktion h aus Beispiel 4.2.5, die Grenzwert von Funktionen aus H_α^p ist, inspirieren lassen und nach Spendieren eines Epsilons dem folgenden Unterraum H_α^ω von H_α zuwenden.

Definition 4.2.16. Der *schwache Hölderraum* H_α^ω bestehe aus allen Funktionen $h \in H_\alpha$ mit der folgenden Eigenschaft:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ existieren endlich viele Stellen x_1, \dots, x_n in $[0, 1]$, so daß für jedes $\tilde{x} \in [0, 1] \setminus \{x_k\}_{k=1}^n$ eine Umgebung $U(\tilde{x})$ existiert mit

$$\sup_{\substack{x, y \in U(\tilde{x}) \\ x \neq y}} \frac{|h(x) - h(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq \varepsilon.$$

Offenbar ist $H_\alpha^p \subseteq H_\alpha^\omega$, und es gilt sogar

Satz 4.2.17.

$$\overline{H_\alpha^p}^{L_\alpha(\cdot)} = H_\alpha^\omega.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß H_α^ω abgeschlossen in H_α ist. Sei also eine Folge $(h_i)_{i=1}^\infty \subseteq H_\alpha^\omega$ mit $h_i \xrightarrow{L_\alpha(\cdot)} h \in H_\alpha$ gegeben und zu vorliegendem $\varepsilon > 0$ ein $m \in \mathbb{N}$ gefunden mit $L_\alpha(h_m - h) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Nun existieren zu h_m endlich viele Punkte x_1, \dots, x_n , so daß $\sup_{x, y \in U(\tilde{x})} L_{xy}(h_m) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $\tilde{x} \in [0, 1] \setminus \{x_k\}_{k=1}^n$ und gewisse Umgebungen $U(\tilde{x})$ gilt. Damit liefert die Ungleichung

$$L_{xy}(h) \leq L_{xy}(h_m) + L_{xy}(h_m - h) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

für verschiedene $x, y \in U(\tilde{x})$ die Tatsache $\sup_{x, y \in U(\tilde{x})} L_{xy}(h) \leq \varepsilon$, also wie gewünscht $h \in H_\alpha^\omega$.

Seien nun zu $h \in B_{H_\alpha^\omega}$ und einem $\varepsilon > 0$ endlich viele Stellen $x_1 < \dots < x_n$ in $[0, 1]$ (o.B.d.A. mit $x_1 = 0$ und $x_n = 1$) gegeben, so daß für alle weiteren Stellen $\tilde{x} \in [0, 1] \setminus \{x_k\}_{k=1}^n$ in gewissen Umgebungen $U(\tilde{x})$, die o.B.d.A. als offene Intervalle angenommen werden, stets $\sup_{x, y \in U(\tilde{x})} L_{xy}(h) \leq \frac{\varepsilon}{4}$ gilt. Wir definieren nun auf für wachsendes $N \in \mathbb{N}$ immer größer werdenden Teilmengen $\bigcup_{m=0}^N M_m$ von $[0, 1]$ (um die kritischen Stellen x_1, \dots, x_n herum) sukzessive durch polygonale Teilstücke eine Funktion f , welche in H_α^p zu liegen kommt und h in der Höldernorm $L_\alpha(\cdot)$ approximiert. Sei hierzu eine streng monoton fallende Nullfolge $(\delta_m)_{m=0}^\infty$ mit $\delta_0 < \frac{1}{2} \min_{k=1, \dots, n-1} |x_k - x_{k+1}|$ vorgegeben.

Betrachte im ersten Schritt eine mit gewissen x_j , $j = 1, \dots, N_0$, aus der Vereinigung aller obigen $U(\tilde{x})$ gegebene endliche Überdeckung $\bigcup_{j=1}^{N_0} U(\tilde{x}_j)$ der kompakten Menge $M_0 := [0, 1] \setminus \bigcup_{k=1}^n (x_k - \delta_0, x_k + \delta_0)$. Es bezeichne hierbei $\tilde{\ell}^{(0)}$ die Hälfte der minimalen Länge aller nichtleeren Schnittintervalle $U(\tilde{x}_i) \cap U(\tilde{x}_j)$

für $1 \leq i, j \leq N_0$. Wähle nun $n_k^{(0)} \in \mathbb{N}$ so groß, daß

$$\frac{|(x_{k+1} - \delta_0) - (x_k + \delta_0)|}{n_k^{(0)}} =: \ell_k^{(0)} \leq \tilde{\ell}^{(0)} \quad \forall k = 1, \dots, n-1$$

gilt und definiere damit f polygonal auf M_0 durch

$$f(x) := \begin{cases} h(x_k + \delta_0 + j\ell_k^{(0)}) & \text{für } x = x_k + \delta_0 + j\ell_k^{(0)}, \\ & 0 \leq j \leq n_k^{(0)}, k = 1, \dots, n-1 \\ \text{linear in} & [x_k + \delta_0 + j\ell_k^{(0)}, x_k + \delta_0 + (j+1)\ell_k^{(0)}] \\ & \text{für } 0 \leq j \leq n_k^{(0)} - 1, k = 1, \dots, n-1. \end{cases}$$

Für alle $m \in \mathbb{N}$ wird f (induktiv) jeweils auf der kompakten Menge

$$M_m := \left(\bigcup_{k=1}^n [x_k - \delta_{m-1}, x_k + \delta_{m-1}] \setminus (x_k - \delta_m, x_k + \delta_m) \right) \cap [0, 1]$$

folgendermaßen konstruiert. Gegeben sei wieder eine aus obigen $U(\tilde{x})$ erhaltene endliche Überdeckung $\bigcup_{j=N_{m-1}+1}^{N_m} U(\tilde{x}_j)$ von M_m . Sei (wiederum) $\tilde{\ell}^{(m)}$ die Hälfte der minimalen Länge aller nichtleeren Schnittintervalle $U(\tilde{x}_i) \cap U(\tilde{x}_j)$, $N_{m-1}+1 \leq i, j \leq N_m$. Mit einem $n^{(m)} \in \mathbb{N}$, für welches $\frac{\delta_{m-1} - \delta_m}{n^{(m)}} =: \ell^{(m)} \leq \tilde{\ell}^{(m)}$ gilt, definiere f polygonal auf M_m (d.h. solange $x \in [0, 1]$ ist) durch

$$f(x) := \begin{cases} h(x_k \pm \delta_{m-1} \mp j\ell^{(m)}) & \text{für } x = x_k \pm \delta_{m-1} \mp j\ell^{(m)}, \\ & 0 \leq j \leq n^{(m)}, k = 1, \dots, n \\ \text{linear in} & [x_k \pm \delta_{m-1} \mp j\ell^{(m)}, x_k \pm \delta_{m-1} \mp (j+1)\ell^{(m)}] \\ & \text{für } 0 \leq j \leq n^{(m)} - 1, k = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Damit ist f auf $M := \bigcup_{m=0}^{\infty} M_m = [0, 1] \setminus \{x_k\}_{k=1}^n$ definiert und erfüllt für alle $\tilde{x} \in M$ die *lip*-Bedingung, denn in einer genügend kleinen Umgebung eines jeden $\tilde{x} \in M$ ist f ein Polygon. Definiert man naheliegenderweise noch $f(x_k) := h(x_k) \quad \forall k = 1, \dots, n$, so folgt aus der Definition von f auf M und der Stetigkeit von h die Stetigkeit von f .

Es sei jetzt zu jedem $x \in M$ mit \bar{x} (bzw. \underline{x}) dasjenige kleinste (bzw. größte) Element in M der Form $x_k + \delta_0 + j\ell_k^{(0)}$ oder $x_k \pm \delta_{m-1} \mp j\ell^{(m)}$ bezeichnet, welches größer (bzw. kleiner) oder gleich x ist. Für $x \neq \bar{x}$ kann man zunächst wie bei Krein und Petuin im Beweis zu Satz 1.2.20 die Tatsache $L_{x\bar{x}}(f) \leq L_{\underline{x}\bar{x}}(h)$ schließen, und letzteres ist nach Wahl von $\ell_k^{(0)}$ und $\ell^{(m)}$ höchstens $\frac{\varepsilon}{4}$. Analoges gilt für $x \neq \underline{x}$, so daß man für $x, y \in M, x < y$ und $x < \bar{x} < \underline{y} < y$

$$\begin{aligned} L_{xy}(h - f) &\leq L_{x\bar{x}}(h - f) + L_{\bar{x}\underline{y}}(h - f) + L_{\underline{y}y}(h - f) \\ &\leq L_{x\bar{x}}(h) + L_{x\bar{x}}(f) + 0 + L_{\bar{x}\underline{y}}(h) + L_{\underline{y}y}(f) \leq 4 \cdot \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon \end{aligned}$$

abschätzen kann ($L_{\bar{x}\underline{y}}(h - f) = 0$ gilt wegen $f(\bar{x}) = h(\bar{x})$ und $f(\underline{y}) = h(\underline{y})$). Gilt $x = \bar{x}$ oder $y = \underline{y}$, können die entsprechenden Terme $L_{x\bar{x}}(h - f)$ oder $L_{\underline{y}y}(h - f)$ in der Abschätzung weggelassen werden, und für $\bar{x} = \underline{y}$ fällt $L_{\bar{x}\underline{y}}(h - f)$ weg.

Im Fall $\bar{x} > \underline{y}$, d.h. für $\underline{x} = \underline{y} < x < y < \bar{x} = \bar{y}$, beachtet man wieder $L_{xy}(f) \leq L_{\underline{x}\bar{y}}(h) \leq \frac{\varepsilon}{4}$ (Krein und Petuin!) und hat damit

$$L_{xy}(h - f) \leq L_{xy}(h) + L_{xy}(f) \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} \leq \varepsilon.$$

Für $x = x_k < y \in M$, $k = 1, \dots, n - 1$, schätzt man

$$L_{x_k y}(h - f) \leq L_{x_k \underline{y}}(h - f) + L_{\underline{y} y}(h - f) \leq 0 + \frac{\varepsilon}{4}$$

wegen $f(x_k) = h(x_k)$ und $f(\underline{y}) = h(\underline{y})$ ab, genauso verfährt man für $x \in M$ und $y = x_k$, $k = 2, \dots, n$, $x < y$:

$$L_{x x_k}(h - f) \leq L_{x \bar{x}}(h - f) + L_{\bar{x} x_k}(h - f) \leq \frac{\varepsilon}{4} + 0.$$

Schließlich gilt wegen $f(x_k) = h(x_k) \forall k = 1, \dots, n$ auch $L_{x_j x_k}(h - f) = 0 \forall j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, n; j \neq k$.

Insgesamt hat man also $L_\alpha(h - f) \leq \varepsilon$ und $L_\alpha(f) \leq L_\alpha(h - f) + L_\alpha(h) \leq 1 + \varepsilon$, d.h. $f \in H_\alpha^p$, da wir schon wissen, daß f die *lip*-Bedingung für alle $\tilde{x} \in M$ erfüllt. Mithin liegt H_α^p dicht in H_α^ω . \square

Korollar 4.2.18. H_α^0 ist ein M -Ideal in H_α^ω .

Jetzt sticht es einem schon fast ins Auge, wie man durch eine Kombination der Beweise zu den beiden vorigen Sätzen auch gleich die Aussage des Korollars durch den direkten Nachweis der 3-Kugel-Eigenschaft von H_α^0 in H_α^ω zeigen kann. Die endlich vielen durch ein ε' gegebenen "schlimmen Stellen" eines vorgelegten $h \in B_{H_\alpha^\omega}$ werden wie gehabt "konstant überbrückt", und an den "guten Stellen" nutzt man die "Fast-*lip*-Eigenschaft" von h durch (bis auf additive Konstanten) polygonale Annäherung. Insgesamt nähert man damit h durch ein Polygon $g \in H_1 \subseteq H_\alpha^0$ an, womit für diesen Beweis das Lemma 4.2.13 gar nicht benötigt würde. Mit dem aus der gleichmäßigen Stetigkeit von h durch ein vorgegebenes $\varepsilon > 0$ gewonnenen $\delta > 0$ wird dann wie mit δ_0 im Beweis zu Satz 4.2.17 verfahren (nun mit ε' statt ε), und g wird für $x_k + \delta \leq x \leq x_{k+1} - \delta$ als Polygon zwischen den Stellen $x_k + \delta_0 + j\ell_k^{(0)}$, $0 \leq j \leq n_k^{(0)}$, mit den Werten $h(x_k + \delta_0 + j\ell_k^{(0)}) + \sum_{i=1}^k \Delta h(x_i)$ definiert. Dann erhält man $L_\alpha(h - g) \leq 1 + \varepsilon'$ und mit o.B.d.A. $\tilde{\ell}^{(0)} \leq \delta$ zudem $\|h - g\|_\infty \leq 2\varepsilon$.

Bemerkung 4.2.19. Man sollte an dieser Stelle noch ein paar Worte zu den Grenzen der im Beweis zu Satz 4.2.15 beschriebenen "Methode der eingeschobenen Konstanten" verlieren. Zunächst ist es sonnenklar, daß die Eindimensionalität des zugrundeliegenden metrischen Raums entscheidend für die Anwendung dieser Methode ist. Schon im Einheitsquadrat $[0, 1]^2$ wäre sie gar nicht denkbar, da das Herausnehmen eines Punktes aus $[0, 1]^2$ diese Menge nicht in zwei Zusammenhangskomponenten zerlegt.

Im Hinblick auf eine Verallgemeinerung der Aussage von Satz 4.2.15 auf größere Unterräume von H_α wird man geneigt sein, anstelle von H_α^p alle Funktionen

$h \in H_\alpha$ zu betrachten, die in nur abzählbar vielen Punkten $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subseteq [0, 1]$, die sich darüberhinaus höchstens endlich oft häufen sollen, kritisch sind. Dann kann man h zunächst an den endlich vielen Häufungspunkten der x_k 's und danach an den verbleibenden endlich vielen kritischen Stellen "konstant abschneiden" und so wie im Beweis von Satz 4.2.15 leicht das gewünschte "an h orientierte" $g \in H_\alpha$ mit $\|h - g\|_\infty \leq \varepsilon$ konstruieren. Das Problem ist jedoch der Nachweis von (4.1.2), denn in obigem Beweis brauchte man sich dafür nur um einen kritischen Punkt bewegen. Für die verallgemeinerte Version von Satz 4.2.15 wird es indes erforderlich sein, zwischen x und y mehrere "eingeschobene Konstanten" zu überspringen, denn o.B.d.A. $(\delta')^{\frac{1}{\alpha}} \leq \frac{1}{2} \min_{1 \leq k \leq n-1} |x_k - x_{k+1}|$ ist ja hier nicht drin, und δ im obigen Beweis ist abhängig von δ' , so daß im allgemeinen $\delta \ll \delta'$ zu erwarten ist. Versucht man nun einmal spaßeshalber, den 5. Fall so durchzurechnen, daß man zwischen x und y die beiden "Plateaus" von g über x_{k-1} und x_k zu liegen hat, zwischen denen man nun keinen Sicherheitsabstand mehr, sondern im ungünstigsten Fall höchstens $|x_k - x_{k-1}| \approx 2\delta$, annehmen darf, so kann man nur noch

$$\begin{aligned} L_{xy}(h - g) &= \frac{|h(x_{k-1} - \delta) - h(x_{k-1} + \delta) + h(x_k - \delta) - h(x_k + \delta)|}{|x - y|^\alpha} \\ &\leq \frac{|\Delta h(x_{k-1})| + |\Delta h(x_k)|}{|x - y|^\alpha} \leq \frac{(2\delta)^\alpha + (2\delta)^\alpha}{(4\delta)^\alpha} = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha \end{aligned}$$

abschätzen, und das ist zu wenig bzw. zu viel (wiewohl natürlich kein Gegenbeispiel, da andererseits $L_{xy}(h - g) \approx L_{xy}(h) \leq 1$ im Falle $x_{k-1} + \delta \approx x_k - \delta$ zu erwarten und damit die obige Abschätzung zu grob ist).

Das Schließen auf "Höldersteigungen" $L_{xy}(h - g)$ durch ein "Vorhangeln" über Punkte zwischen x und y führt im übrigen auf ein grundsätzliches "Problem" in Hölderräumen zurück, welches man in H_1 , wo man eine anschauliche Vorstellung von "Steigungen" hat, nicht antrifft. Für $f \in H_1$ und Stellen $x < y < z$ mit $y = \lambda x + (1 - \lambda)z$ und $\lambda \in (0, 1)$ gilt nämlich

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \lambda \frac{f(z) - f(y)}{z - y} + (1 - \lambda) \frac{f(y) - f(x)}{y - x},$$

also insbesondere $L_{xz}(f) \leq \max(L_{xy}(f), L_{yz}(f))$, d.h. man kann von lokalen auf globale Steigungen schließen. Dies geht in H_α für $0 < \alpha < 1$ nicht (in der obigen Gleichung stünde λ^α bzw. $(1 - \lambda)^\alpha$ anstelle von λ bzw. $(1 - \lambda)$), und das ist auch "gut" so, sonst wäre ja der H_α^0 wie der H_1^0 stets trivial! In diesem Zusammenhang kann man auch einmal bemerken, daß der H_α^p für $\alpha = 1$ nicht besonders interessant aussieht.

Der Versuch, mit der "Methode der eingeschobenen Konstanten" die Elemente $h \in H_\alpha$ zu behandeln, die außerhalb einer nirgends dichten Nullmenge die *lip*-Bedingung erfüllen, führt auf das Problem, daß noch nicht einmal mehr $\|h - g\|_\infty \leq \varepsilon$ gesichert werden kann. Man müßte ja in diesem Fall für die Konstruktion von g auf die absolute Stetigkeit von h zurückgreifen, und diese ist für Hölderfunktionen im allgemeinen einfach nicht erfüllt. Das folgende $h \in H_\alpha$

für $0 < \alpha < 1$ ist sogar von unbeschränkter Variation. Setze zunächst

$$\delta := \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{1}{\alpha}}} \right)^{-1} > 0 \text{ und } \delta_k := \frac{\delta}{k^{\frac{1}{\alpha}}} \text{ sowie } x_n := \sum_{k=1}^n \delta_k$$

für $n \in \mathbb{N}$ und $x_0 := 0$. Damit definiere $h \in B_{H_\alpha}$ durch

$$h(x) := h(x_n) + (-1)^n (x - x_n)^\alpha \quad \text{für } x_n \leq x \leq x_{n+1}, n \in \mathbb{N}_0$$

und $h(1) := \lim_{n \rightarrow \infty} h(x_n)$. Dann ist $\frac{|h(x_{n+1}) - h(x_n)|}{|x_{n+1} - x_n|^\alpha} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$ und

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(x_{n+1}) - h(x_n)| = \sum_{n=0}^{\infty} (x_{n+1} - x_n)^\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} (\delta_n)^\alpha = \delta^\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Noch zwei etwas positivere Bemerkungen seien gestattet. Zum ersten sieht man schnell, daß die Beweise der Sätze 4.2.15 und 4.2.17, für die entsprechenden Räume H_α^p und H_α^ω komplexwertiger Hölderfunktionen gleichermaßen gelten. Und zum zweiten sieht man bei näherer Betrachtung auch, daß die Voraussetzung $h(0) = 0$ für die Konstruktion von g im Beweis von Satz 4.2.15 und von f im Beweis von Satz 4.2.17 gar nicht nötig ist. Daher lassen sich die Ergebnisse auf $Lip([0, 1]^\alpha)$ mit der Norm $\|\cdot\|_{L_\alpha} = \max(\|\cdot\|_\infty, L_\alpha(\cdot))$ übertragen: Der Beweis dafür, daß $lip([0, 1]^\alpha)$ ein M -Ideal in " $Lip^p([0, 1]^\alpha)$ " (und damit auch im Abschluß " $Lip^\omega([0, 1]^\alpha)$ ") ist, verläuft mit Lemma 4.1.12 (wobei $\varepsilon = \varepsilon' \delta' < \varepsilon'$, d.h. $\|h - g\|_\infty \leq \varepsilon'$ ist) wie der Beweis zu Satz 4.2.15. Für den Nachweis von

$$\overline{Lip^p([0, 1]^\alpha)}^{\|\cdot\|_{L_\alpha}} = Lip^\omega([0, 1]^\alpha)$$

braucht man im Beweis von Satz 4.2.17 nur bemerken, daß $L_{0x}(h - f) \leq \varepsilon \quad \forall x \in (0, 1]$ sofort $|h(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in (0, 1]$ nach sich zieht.

Es wurde im Vorlauf zu Theorem 4.1.5 oder auch im Anschluß an Satz 4.1.10 schon deutlich gemacht, daß M -Summanden gewissermaßen triviale Spezialfälle von M -Idealen sind. Was wir hier zum Abschluß dieser Arbeit noch zu bieten haben, ist die Erkenntnis, daß es sich bei H_α^0 als M -Ideal in H_α^ω tatsächlich — und glücklicherweise (!) — um einen nichttrivialen Kandidaten handelt. Dies gilt sowohl für die entsprechenden Räume reellwertiger als auch für die Räume komplexwertiger Funktionen, obwohl der Kern des Beweises eine Anwendung des Zwischenwertsatzes darstellt. Im Beweis wird auch sehr schön die Bedeutung des $\varepsilon > 0$ in der 3-Kugel-Eigenschaft (siehe Theorem 4.1.8) deutlich.

Satz 4.2.20. H_α^0 ist ein echtes M -Ideal in H_α^ω .

Beweis. Es ist zu zeigen, daß H_α^0 kein M -Summand in H_α^ω ist. Dazu wird die Charakterisierung von M -Summanden über die Schnitteigenschaft gewisser abgeschlossener Kugeln, zu finden in [18, II.3.4], benutzt. Vorgelegt sei ein abgeschlossener Unterraum U eines Banachraums X . Dann gilt die Äquivalenz:

$$U \text{ ist ein } M\text{-Summand in } X. \iff$$

Für alle Familien $\{B(x_i, r_i)\}_{i \in I}$ abgeschlossener Kugeln mit

$$B(x_i, r_i) \cap U \neq \emptyset \quad \forall i \in I \quad (4.2.3)$$

und

$$\bigcap_{i \in I} B(x_i, r_i) \neq \emptyset \quad (4.2.4)$$

folgt:

$$\bigcap_{i \in I} B(x_i, r_i) \cap U \neq \emptyset. \quad (4.2.5)$$

Um zu zeigen, daß U kein M -Summand in X ist, reicht es damit, ein Beispiel für die “2-Kugel-Eigenschaft” zu finden, in der das zur Verfügung stehende $\varepsilon > 0$ unbedingt notwendig ist:

Wähle in unserem Fall hierfür in $B_{H_\alpha^\infty}$ die Funktion $h : x \mapsto x^\alpha$ und in $B_{H_\alpha^0}$ die Funktionen $f_1 : x \mapsto x$ und $f_2 = -f_1 : x \mapsto -x$. Dann gilt

$$f_i \in B(h + f_i, 1) \cap H_\alpha^0, \quad i \in \{1, 2\},$$

also (4.2.3), und

$$h \in \bigcap_{i \in \{1, 2\}} B(h + f_i, 1),$$

also (4.2.4), aber

$$\bigcap_{i \in \{1, 2\}} B(h + f_i, 1) \cap H_\alpha^0 = \emptyset,$$

denn sonst gäbe es ein $g \in H_\alpha^0$ mit

$$L_\alpha(h + f_i - g) \leq 1 \quad \text{für } i \in \{1, 2\}, \quad (4.2.6)$$

und ein solches existiert nicht (obwohl wir natürlich wissen, daß für jedes $\varepsilon > 0$ ein $g \in H_\alpha^0$ existiert, so daß die Ungleichung $L_\alpha(h + f_i - g) \leq 1 + \varepsilon$ für $i \in \{1, 2\}$ erfüllt ist):

Zunächst wird gezeigt, daß es kein reellwertiges g mit dieser Eigenschaft gibt. Für ein solches gälte nämlich aufgrund von $(h + f_1)(1) = 2$ und (4.2.6) zum einen $L_{01}(h + f_1 - g) = |2 - g(1)| \leq 1$, also $g(1) \geq 1$, und wegen $(h + f_2)(1) = 0$ und (4.2.6) zum zweiten $L_{01}(h + f_2 - g) = |g(1)| \leq 1$, also $g(1) \leq 1$, mithin $g(1) = 1$.

Andererseits wäre sicher $f_1(x) + g(x) < h(x)$ in einer punktierten Umgebung der Null, denn sonst gäbe es eine Nullfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq (0, 1]$ mit

$$\frac{|f_1(x_n) + g(x_n) - (f_1(0) + g(0))|}{|x_n - 0|^\alpha} \geq \frac{|h(x_n)|}{|x_n|^\alpha} = 1 \rightarrow 0$$

im Widerspruch zu $f_1 + g \in H_\alpha^0$.

Dann aber hätte die in einer punktierten Umgebung der Null positive Funktion $h - f_1 - g$ wegen $h(1) - f_1(1) - g(1) = -1$ nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle $\tilde{x} \in (0, 1)$, für die man

$$L_{\tilde{x}1}(h + f_2 - g) = \frac{|h(\tilde{x}) - f_1(\tilde{x}) - g(\tilde{x}) - (h(1) - f_1(1) + g(1))|}{|1 - \tilde{x}|^\alpha} = \frac{1}{|1 - \tilde{x}|^\alpha} > 1$$

im Widerspruch zu (4.2.6) erhalte.

Man sieht nun schnell, daß auch ein komplexwertiges $g \in H_\alpha^0$ die Eigenschaft (4.2.6) nicht erfüllen kann, denn sonst würde aus $L_\alpha(h + f_i - g) \leq 1$ sofort $L_\alpha(h + f_i - \operatorname{Re}(g)) \leq 1$ für $i \in \{1, 2\}$ folgen. \square

Wie die Sätze 4.2.15 und 4.2.17 gilt der obige Satz auch wieder für die Lipschitzräume $\operatorname{lip}([0, 1]^\alpha)$ und $\operatorname{Lip}^\omega([0, 1]^\alpha)$ (bzw. $\operatorname{Lip}^p([0, 1]^\alpha)$). Andernfalls gäbe es ein $g \in \operatorname{lip}([0, 1]^\alpha)$ mit der Eigenschaft (4.2.6), die dann im Widerspruch zum obigen Ergebnis auch für $g - g(0) \in H_\alpha^0$ gelten würde.

Wenn wir es nicht schon viel besser wüßten (siehe Theorem 2.1.2 (ii)), könnten wir jetzt mit dem obigen Satz und Theorem 4.1.5 schließen, daß H_α^0 eine Kopie von c_0 enthält. Und obwohl H_α^ω noch “weit von H_α entfernt” ist — man beachte Beispiel 4.2.10: die Mandelfunktion — ist dieser Raum im Gegensatz zu H_α^0 zumindest nicht separabel, da er H_α^c (siehe Bemerkung 4.2.7) enthält, welcher schon im Zusammenhang mit Satz 1.2.1 als inseparabel erkannt wurde.

Ein kleines Geheimnis kann hier im Hinblick auf den obigen Satz auch noch gelüftet werden: Es gibt nämlich in Wirklichkeit gar keine Projektion von H_α^ω auf H_α^0 — und nicht nur keine M -Projektion, wie oben gezeigt. Auf dieses Schankerl stößt man, wenn man etwas tiefer in der vorliegenden Arbeit herumwühlt. In Abschnitt 2.3 trifft man nämlich auf eine ganz konkrete von Johnson konstruierte Kopie von c_0 in H_α^0 , welche wiederum von einer Kopie von ℓ^∞ in H_α herrührt. Und wenn man sich dort die “Beweisskizze für den nichtdiskreten Fall” (zu Theorem 2.3.1) anschaut, sieht man sofort, daß diese Kopie sogar in H_α^p liegt, ja man braucht für diese Kopie sogar nur eine kritische Stelle (nämlich den Häufungspunkt x_0)! Mit der gleichen Begründung wie für Korollar 2.3.4 folgt damit, daß H_α^0 nicht komplementiert in H_α^ω sein kann. Eleganter wäre es natürlich, wenn man alleine aus der Tatsache, daß H_α^ω als inseparabler Raum zwischen einem zu c_0 ($\simeq H_\alpha^0$) und einem zu ℓ^∞ ($\simeq H_\alpha$) isomorphen Raum eingeklemmt ist, ganz allgemein auf diese Tatsache schließen könnte ...

Gerne würde man natürlich noch größere Unterräume von H_α kennenlernen, in denen H_α^0 ein M -Ideal ist, und dabei vielleicht auch die Frage beantworten, ob H_α selbst zu diesen Unterräumen zählt, H_α^0 mit $(H_\alpha^0)'' \cong H_\alpha$ also M -eingebettet ist. Die Beantwortung dieser Frage — möglicherweise im Zusammenhang mit einer intensiven Betrachtung von “Mandelfunktionen verschiedenster Art” — sei späteren Generationen überlassen. Auf eine Vermutung, wie die Antwort ausfallen wird, wollen wir hier in Demut eingedenk der eigenen Unkenntnis und aus Ehrfurcht vor der Wahrheit verzichten.

Schlußbemerkungen

Es sei am Ende dieser Arbeit noch einmal zurückgeblickt. Trotz des sehr allgemein gehaltenen Titels und des Umfangs dieser Arbeit wird wohl kaum der Eindruck entstanden sein, man hielte hier eine Art Abriß über die in der Literatur vorzufindende Theorie der Lipschitzräume in Händen. Schon Definition 1.1.1 zeigt, daß der Blick hauptsächlich auf diejenigen Lipschitzräume gerichtet ist, die in ein interessantes Wechselspiel mit ihren kleinen Lipschitzräumen treten. In den Kapiteln 2 und 3 sind zwei wesentliche bisher in der Literatur behandelte Aspekte dieses Wechselspiels dargestellt. Während sich jedoch in Kapitel 3 die Entzückung über die vielfältigen Herangehensweisen zur Herleitung und schließlich zur Charakterisierung des Dualitätsergebnisses kaum in Grenzen hält, kann man sich in Kapitel 2 des Eindrucks nicht erwehren, daß man hier auf halber Strecke stehen geblieben ist. Dies zeigt sich übrigens auch in der geschichtlichen Abfolge der Arbeiten, die nach Ciesielski (1960) und Bonic, Frampton und Tromba (1969) mit Johnson (1972/74) und Wulbert (1974) schon vor langer Zeit abbrach. Die Entwicklung im Hinblick auf das Dualitätsresultat nahm zwar mit de Leeuw (1961), Jenkins (1967) und Johnson (1970) einen ähnlichen Verlauf, erfuhr dann aber mit Bade, Curtis und Dales (1987), Hanin (1992/97) und Weaver (1996/97) eine Renaissance, auf die man in Sachen "Isomorphiere-sultat" bis heute wartet. Lassen wir zu diesem Thema Wulbert persönlich sprechen: "I do think there are some very nice results in that area, and I thought that the topics and achievements there never got as much recognition as they deserved."

Ideengeschichtlich gab es übrigens (besonders in Bezug auf das Dualitätsergebnis) die beiden Lehrer-Schüler-Linien de Leeuw \rightarrow Sherbert \rightarrow Johnson und Bade \rightarrow Weaver. Aber natürlich läßt auch Kapitel 3 noch Fragen offen. So könnte man zum Beispiel den Versuch unternehmen, die Kantorovich-Rubinstein-Theorie und ihre Auswirkungen auf Lipschitzräume "aufs Komplexe" zu übertragen. Man könnte die Separationsbedingung als Eigenschaft eines metrischen Raumes K unabhängig von den Lipschitzfunktionen auf K zu fassen versuchen. Und schließlich könnte man im Hinblick auf die "komplexe Version" (iv) der Separationsbedingung (in Theorem 3.5.3) nach der optimalen Konstanten für die Fortsetzung komplexwertiger Lipschitzfunktionen (in Satz 1.1.20) fragen, von der man nur weiß (vergleiche Bemerkung 3.5.5), daß sie irgendwo im Intervall $[2/\sqrt{3}, \sqrt{2}]$ liegt. Eigentlich ist es ein Witz, daß man bis heute (siehe [52, S. 18]) ihren "wahren Wert" nicht kennt.

Kapitel 2 hinterläßt jedoch schwerwiegendere Lücken, allen voran die Frage, die nur für Kompakta in endlichen Dimensionen mit “ja” beantwortet ist: “Gilt $\text{lip}(K) \simeq c_0$ für alle mit Höldermetriken versehenen Kompakta K ?” Man sollte meinen, daß die Chancen hierfür so schlecht nicht stehen, da Kompaktes von Endlichdimensionalem “oft nicht so weit entfernt” ist (vergleiche zum Beispiel [55, II.3.5 f]). Als konkreten Anfang in dieser Denkrichtung könnte man sich einmal den Hilbertwürfel in ℓ^2 vornehmen, um dabei vielleicht aus der Würfelkonstruktion von Weaver (in Bemerkung 2.2.9) eine Dimensionsunabhängigkeit herauszukitzeln. Einen anderen Weg suggerieren die einfachen Fälle in den Abschnitten 2.1 und 2.2, in denen eine Schauderbasis von $C(K)$ zu einer Schauderbasis in $\text{lip}(K^\alpha)$ wurde. Und man weiß ja (siehe [59, III.D.19]), daß jeder Raum $C(K)$ stetiger Funktionen auf einem Kompaktum eine Schauderbasis besitzt.

Verallgemeinerungen der Aussage $\text{lip}(K) \simeq c_0$ auf mit verallgemeinerten Höldermetriken versehenen Kompakta sind natürlich auch willkommen, von einer Charakterisierung aller Kompakta, für die diese Aussage gilt, ganz zu schweigen. Und ob die Separationseigenschaft etwas Tiefergehendes mit der Aussage $\text{lip}(K) \simeq c_0$ zu tun hat, bleibt auch offen. Eine solche Verbindung zwischen dem zweiten und dem dritten Kapitel würde ja gerade der Satz 2.4.3 herstellen, wenn man denn seinen Beweis vollenden könnte. Alle bislang bekannten punktetrennenden und zu c_0 isomorphen kleinen Lipschitzräume auf Kompakta besitzen jedenfalls die Separationseigenschaft. In einem email-Kontakt machte Weaver hierzu den Vorschlag, sich auf der Suche nach Gegenbeispielen einmal Cantormengen im Zweidimensionalen vorzuknöpfen.

In Kapitel 4 wurde nun ein wenig mathematisches Neuland betreten. Hier lernt man wieder den reichen in der Literatur aufzufindenden Fundus über Lipschitzräume zu schätzen und bescheiden zu werden, sich mit unausgegorenen Ideen, unvollendeten Lösungsansätzen und Teilergebnissen zufrieden zu geben. So mag man sich, um der Tatsache wissend, daß die Literatur zum Thema M -Ideale und Lipschitzräume nichts hergibt, etwas daran erwärmen, daß der kleine Hölderraum H_α^0 nun zumindest als ein echtes, noch nicht mal komplementiertes M -Ideal in einem “schwachen Hölderraum”, der zwischen H_α^0 und H_α liegt, erkannt ist. Als nächsten Schritt bieten sich nun zwei Möglichkeiten an. Entweder man steigt tiefer in die Geometrie der Lipschitzräume ein, zum Beispiel durch die Lektüre des Buches [52] von Weaver, oder man bleibt auf dem Boden des Einheitsintervalls und nimmt sich dort noch einmal der Mandelfunktion oder vergleichbarer Beispiele an, um die Verhältnisse hier anschaulich zu verstehen. Dem Leser sei an dieser Stelle die zweite Möglichkeit anempfohlen.

Um nur einen Eindruck davon zu bekommen, was man im Dunstkreis der Lipschitzräume sonst noch antreffen kann, genügt ein Blick in Weavers Buch. Dort wird zum Beispiel über einen Prädualraum von $\text{Lip}(K)$, von dem man übrigens nach wie vor nicht weiß, ob er bis auf isometrische Isomorphie eindeutig ist, die Extrempunktmenge der Einheitskugel von $\text{Lip}(K)'$ untersucht. Und darüber stößt man auf ein Analogon des Satzes von Banach-Stone (vergleiche [55, S. 382]), mit dem isometrische Isomorphismen zwischen Lipschitzräumen auf Isometrien zwischen den beteiligten metrischen Räumen zurückgeführt

werden können. In Bezug auf die Extrempunkte in $B_{Lip(K)}$ ist indes viel weniger bekannt, obwohl für das Einheitsintervall eine Charakterisierung schon bei Holmes [20, S. 80] zu finden ist. Auch die multiplikative Struktur in Lipschitzräumen kann man sich natürlich näher ansehen, zum Beispiel im Hinblick auf die Untersuchung von Idealen in $Lip(K)$ und $lip(K)$ — nicht umsonst ist der Titel von Weavers Buch “Lipschitz Algebras”. So treten beispielsweise, wie bei stetigen Funktionen (siehe [59, I.B.12]), abgeschlossene selbstadjungierte Unteralgebren von $lip(K)$ über das Analogon zum Satz von Stone-Weierstraß (Theorem 3.5.13) wieder als kleine Lipschitzräume auf einem geeigneten Quotienten von K auf. Weitere nichttriviale Überlegungen kann man auch noch im Hinblick auf Verbände von Lipschitzfunktionen anstellen, und richtig interessant — und abstrakt — wird es, wenn statt Metriken auf Mengen Metriken auf Maßräumen betrachtet werden, um dann danach Ansätze zu verfolgen, mit denen man (wie in Satz 1.2.3) allgemein Lipschitz-stetige Funktionen als in gewissem Sinne “differenzierbar mit beschränkter Ableitung” deuten kann.

Um einer allgemeinen Theorie von Lipschitzräumen (in der übrigens Hölderräume oder auch kleine Lipschitzräume nicht die große Rolle spielen wie in der vorliegenden Arbeit) zu ihrem Recht zu verhelfen, holt Weaver in der Einleitung seines Buches weit aus, und dies soll dem Leser hier nicht vorenthalten bleiben. Weaver stellt die Lipschitzräume $Lip(K)$ auf eine Stufe mit den weitaus besser untersuchten und “beliebteren” Räumen $C(K)$ von stetigen und $L^\infty(K)$ von beschränkten meßbaren Funktionen und behauptet, daß — genauso wie $C(K)$ - bzw. $L^\infty(K)$ -Räume funktionalanalytische Realisationen von topologischen bzw. von Maßräumen darstellen — $Lip(K)$ -Räume die metrische Struktur funktionalanalytisch widerspiegeln. So ist die Theorie der Lipschitzräume eigentlich eine Theorie der metrischen Räume und, weil es hier im Gegensatz zu topologischen und Maßräumen noch viel zu tun gibt, mächtig im Kommen.

Es gehört zu den Binsenweisheiten wissenschaftlicher Betätigung, daß man beim Bearbeiten von Themen in der Literatur nicht immer auf Wahrheiten stößt. Schmerzlich erfahren mußte dies auch der Autor dieser Arbeit. An den entsprechenden Stellen, zum Beispiel in Abschnitt 2.2 und 2.4, wurde auf derartige Vorkommnisse hingewiesen. Dabei waren die Irrtümer nie wirklich schwerwiegend und hatten meist recht amüsante und sogar simple Ursprünge, die einem nur leider allzu oft durch “sloppy proofreading” (Weaver) und wohl vor allem “sloppy proofwriting” verborgen bleiben. Eine Lüge, einmal in die Welt gesetzt, wird dann zuweilen auch in der Mathematik immer wieder neu aufgetischt und sogar weiterentwickelt. Daß diese Vorgänge manchmal eigenartigste Blüten treiben, sieht man an der folgenden netten Geschichte aus der mathematischen Gerüchteküche. Der mit Recht vielfach gelobte Jenkins bewies 1967 sein Dualitätsergebnis sogar für alle sogenannten “endlich kompakten” metrischen Räume K , in welchen die abgeschlossenen Kugeln kompakt sind, indem er $lip(K^\alpha)$ durch $lip^0(K^\alpha)$ aller im Unendlichen verschwindenden kleinen Hölderfunktionen ersetzte. Johnson griff 1970 dieses Ergebnis auf und verallgemeinerte es auf $lip^0(K^\alpha)$ -Räume komplexwertiger Funktionen. Es war Hanin 1994, der dieses Ergebnis in Form eines Charakterisierungstheorems weiter verfeinerte

und dies noch 1997 in [17] behauptete, als Weaver in einem dummerweise schon kurz vorher erschienenen Artikel [49] dem Treiben durch ein einfaches Gegenbeispiel in $K = \mathbb{R}$ ein Ende gesetzt hatte. Ein Blick auf de Leeuws Abbildung in Satz 1.1.10 und die Tatsache, daß es Funktionen gibt, die für $x \rightarrow \infty$ gegen 0 gehen, ohne daß ihre Ableitungen dies tun, hatte gereicht. — Leider genügt ein Blick auf de Leeuws Abbildung und dieses Beispiel, um einzusehen, daß das Beispiel falsch ist und im Gegenteil die vorhergehenden Behauptungen richtig waren — vorausgesetzt der Autor dieser Arbeit hat sich dabei nicht geirrt. Solche Vorfälle sind gewiß einerseits sympathische Bestätigungen dafür, daß auch Mathematiker “nur” Menschen sind, andererseits sind sie natürlich, wie auch in der vorliegenden Arbeit geschehen, wenn es um die Korrektur der Irrtümer geht, willkommener Anlaß zu Arbeitsbeschaffungsmaßnahmen. Weaver jedenfalls machte einen ganzen Artikel draus. In diesem Sinne hofft der Autor, daß der Leser beim Durchgehen dieser Arbeit viel Freude hatte.

Literaturverzeichnis

- [1] R. F. ARENS AND J. EELLS, JR., *On embedding uniform and topological spaces*, Pacific J. Math. **6** (1956), 397–403.
- [2] W. G. BADE, P. C. CURTIS, JR., AND H. G. DALES, *Amenability and weak amenability for Beurling and Lipschitz algebras*, Proc. London Math. Soc. **55** (1987), 359–377.
- [3] G. DE BARRA, *Measure Theory and Integration*, Ellis Horwood Ltd., 1981.
- [4] Y. M. BEREZANSKI, Z. G. SHEFTEL AND G. F. US, *Functional Analysis*, Vol. I, Birkhäuser, 1996.
- [5] R. BONIC, J. FRAMPTON AND A. TROMBA, Λ -*Manifolds*, J. Funct. Anal. **3** (1969), 310–320.
- [6] Z. CIESIELSKI, *On Haar functions and on the Schauder basis of the space $C_{<0,1>}$* , Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **7** (1959), 227–232.
- [7] Z. CIESIELSKI, *On the isomorphisms of the spaces H_α and m* , Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **8** (1960), 217–222.
- [8] J. CZIPSZER AND L. GEHER, *Extension of functions satisfying a Lipschitz condition*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **6** (1955), 213–220.
- [9] M. M. DAY, *Normed Linear Spaces*, 3rd ed., Springer, 1973.
- [10] J. DIEUDONNE, *Geschichte der Mathematik 1700–1900*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1985.
- [11] A. G. O’FARRELL, *Lipschitz functions and bad metrics*, Michigan Math. J. **21** (1974), 277–287.
- [12] P. DE FERMAT, *Bemerkungen zu Diophant*, Akademische Verlagsgesellschaft, 1932.
- [13] G. GLAESER, *Etude de quelques algèbres Tayloriennes*, J. d’Analyse Math. **6** (1958), 1–125.
- [14] S. GOTTWALD, H.-J. ILGAUDS, K.-H. SCHLOTE (Hrsg.), *Lexikon bedeutender Mathematiker*, Verlag Harri Deutsch, 1990.

- [15] L. G. HANIN, *Kantorovich-Rubinstein norm and its application in the theory of Lipschitz spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **115** (1992), 345–352.
- [16] L. G. HANIN, *On isometric isomorphism between the second dual to the “small” Lipschitz space and the “big” Lipschitz space*, Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 73, Birkhäuser, 1994.
- [17] L. G. HANIN, *Duality for general Lipschitz classes and applications*, Proc. London Math. Soc. **3** (1997), 134–156.
- [18] P. HARMAND, D. WERNER AND W. WERNER, *M-Ideals in Banach spaces and Banach algebras*, LNM Vol. 1547, Springer, 1993.
- [19] L. I. HEDBERG, *The Stone-Weierstraß theorem in Lipschitz algebras*, Ark. Math. **8** (1969), 63–72.
- [20] R. B. HOLMES, *Geometric Functional Analysis and its applications*, Springer, 1975.
- [21] O. HÖLDER, *Beiträge zur Potentialtheorie*, Dissertation, Tübingen, 1882.
- [22] O. HÖLDER, *Über einen Mittelwertsatz*, Göttinger Nachr. **44**, 1889.
- [23] H. JARCHOW, *Locally convex spaces*, Teubner, 1981.
- [24] T. M. JENKINS, *Banach spaces of Lipschitz functions on an abstract metric space*, Ph.D. thesis, Yale Univ., New Haven, Conn., 1967.
- [25] J. A. JOHNSON, *Banach spaces of Lipschitz functions and vector-valued Lipschitz functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **148** (1970), 147–169.
- [26] J. A. JOHNSON, *Lipschitz function spaces for arbitrary metrics*, Bull. Amer. Math. Soc. **78** (1972), 702–705.
- [27] J. A. JOHNSON, *Lipschitz spaces*, Pacific J. Math. **51** (1974), 177–186.
- [28] J. A. JOHNSON, *A note on Banach spaces of Lipschitz functions*, Pacific J. Math. **58** (1975), 475–482.
- [29] L. V. KANTOROVICH AND G. P. AKILOV, *The problem of translocation of mass and the normed space it generates*, Functional Analysis, 2nd ed., Pergamon Press, 1982, 225–237.
- [30] S. V. KISLYAKOV, *Sobolev imbedding operators and the nonisomorphism of certain Banach spaces*, Func. Anal. Appl. **9** (1975), 290–294.
- [31] K. KÖNIGSBERGER, *Analysis 1*, Springer, 1990.
- [32] S. G. KREIN AND Y. I. PETUIN, *Scales of Banach spaces*, Russian Math. Surveys **21** (1966), 85–159.
- [33] K. DE LEEUW, *Banach spaces of Lipschitz functions*, Studia Math. **21** (1961), 55–66.

- [34] J. LINDENSTRAUSS, *Extension of compact operators*, Memoirs of the Amer. Math. Soc. **48** (1964).
- [35] J. LINDENSTRAUSS AND L. TZAFRIRI, *Classical Banach Spaces*, Vol. I, Springer, 1977.
- [36] R. LIPSCHITZ, *Sur la possibilité d'intégrer complètement un système donné d'équations différentielles*, Bull. Sci. Math. **10** (1876), 149–159.
- [37] R. LIPSCHITZ, *Lehrbuch der Analysis*, zweiter Band, Verlag von Max Cohen & Sohn, 1880.
- [38] E. MAYER-WOLF, *Isometries between Banach spaces of Lipschitz functions*, Israel J. Math. **38** (1981), 58–74.
- [39] E. J. MCSHANE, *Extension of range of functions*, Bull. Amer. Math. Soc. **40** (1934), 837–842.
- [40] R. E. MEGGINSON, *An introduction to Banach space theory*, Springer, 1998.
- [41] H. MIRKIL, *Continuous translation of Hölder and Lipschitz functions*, Can. J. Math. **12** (1960), 674–685.
- [42] J. MUSIELAK AND Z. SEMADENI, *Some classes of Banach spaces depending on a parameter*, Studia Math. **20** (1961), 271–284.
- [43] G. PREUSS, *Allgemeine Topologie*, 2. Aufl., Springer, 1975.
- [44] D. R. SHERBERT, *Banach algebras of Lipschitz functions*, Pacific J. Math. **13** (1963), 1387–1399.
- [45] D. R. SHERBERT, *The structure of ideals and point derivations in Banach algebras of Lipschitz functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **111** (1964), 240–272.
- [46] J. D. STEIN, JR., *Functions satisfying Lipschitz conditions*, Michigan Math. J. **16** (1969), 385–396.
- [47] F. A. VALENTINE, *On the extension of a vector function so as to preserve a Lipschitz condition*, Bull. Amer. Math. Soc. **49** (1943), 100–108.
- [48] N. WEAVER, *Lattices of Lipschitz functions*, Pacific J. Math. **164** (1994), 179–193.
- [49] N. WEAVER, *Subalgebras of little Lipschitz algebras*, Pacific J. Math. **173** (1996), 283–293.
- [50] N. WEAVER, *Duality for locally compact Lipschitz spaces*, Rocky Mountain J. Math. **26** (1996), 337–353.
- [51] N. WEAVER, *Quotients of little Lipschitz algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 2643–2648.

- [52] N. WEAVER, *Lipschitz Algebras*, World Scientific, 1999.
- [53] E. W. WEISSTEIN, *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*, Chapman & Hall/CRC, 1999.
- [54] D. WERNER, *New classes of Banach spaces which are M-ideals in their biduals*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **111** (1992), 337–354.
- [55] D. WERNER, *Funktionalanalysis*, 2. Aufl., Springer, 1997.
- [56] D. WERNER, *Partielle Differentialgleichungen*, Freie Universität Berlin, Vorlesungsskript, Wintersemester 97/98.
- [57] D. WERNER, *Operatorhalbgruppen*, Freie Universität Berlin, Vorlesungsskript, Sommersemester 98.
- [58] D. WERNER, *Unzerlegbare Banachräume — über die Arbeiten von W. T. Gowers*, Freie Universität Berlin, Serie A Mathematik, Preprint Nr. A-1-2000.
- [59] P. WOJTASZCZYK, *Banach Spaces for Analysts*, Cambridge University Press, 1991.
- [60] D. E. WULBERT, *Representations of the spaces of Lipschitz functions*, J. Func. Anal. **15** (1974), 45–55.
- [61] A. ZYGMUND, *Trigonometric series*, Vols. I and II combined, reprinted 2nd ed., Cambridge University Press, 1968.