Stefan Geschke
Gido Scharfenberger

Ausgabe: 14.6.2004
Abgabe: 22.6.2004 in der Übung

Einführung in die Logik und Modelltheorie

– Sommersemester 2004 – 9. Übung –

Aufgabe 27 (Anwendungen des Zornschen Lemmas) Seien A und B beliebige Mengen.

(a) Wenn es eine surjektive Funktion $f : A \to B$ gibt, dann gibt es auch eine injekitve Funktion $g : B \to A$, insbesondere eine, die $f \circ g = id_B$ erfüllt. (Tip: Die Menge, auf die Ihr das Zornsche Lemma anwenden könnt, besteht aus den partiellen Rechtsinversen von f.)

(b) Zeige, dass es eine Injektion $f : A \to B$ oder eine Injektion $g : A \to B$ gibt. (Tip: Betrachte die Menge der partiellen Bijektionen zwischen A und B.)

Aufgabe 28 (über mwf Theorien) Sei T eine maximal widerspruchsfreie Theorie über τ.

(a) Sind φ, ψ beliebige τ-Aussagen (also τ-Formeln ohne freie Variable), so gilt

$$\varphi \wedge \psi \in T \Leftrightarrow \varphi, \psi \in T.$$

(b) Ist T darüberhinaus HENKIN-Theorie und $\varphi(x)$ eine τ-Formel, so gilt

$$\forall x \varphi(x) \in T \Leftrightarrow \text{ für alle } c \in C \text{ gilt } \varphi(c) \in T.$$

Aufgabe 29 (Eindeutigkeit des kanonischen Modells) Sei T eine maximal widerspruchsfreie HENKIN-Theorie über τ und seien $\mathfrak{A} = (A, \ldots), \mathfrak{B} = (B, \ldots)$ zwei kanonische Modelle von T. Dann existiert genau ein Isomorphismus $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, d.i. eine Bijektion $f : A \to B$, so dass für alle τ-Formeln $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ und $a_1, \ldots, a_n \in A$ gilt:

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \text{ gdw. } \mathfrak{B} \models \varphi[f(a_1), \ldots, f(a_n)].$$

(Hinweis: In der Vorlesung wurde im Satz über die kanonischen Modelle die Eindeutigkeitsaussage nicht bewiesen. Das holen wir hier nach. Konstruiert f anhand der Konstruktion des kanonischen Modells in der Vorlesung.)

Aufgabe 30 (Zusatzaufgabe über mwf Theorien, 10 Punkte) Sei T eine Theorie über τ und T' die Menge der Aussagen, die aus T abgeleitet werden können.

(a) T ist genau dann widerspruchsfrei, wenn T' es ist.

(b) Sei nun T widerspruchsfrei. Dann sind äquivalent:

i) T' ist maximal widerspruchsfrei;

ii) für jede τ-Aussage φ gilt $T \vdash \varphi$ gdw. $T \not\vdash \neg\varphi$;

iii) je zwei Modelle $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ von T sind *elementar äquivalent* (in Zeichen $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$), d.h: für alle τ-Aussagen φ gilt, dass $\mathfrak{A} \models \varphi$ gdw. $\mathfrak{B} \models \varphi$;

iv) für alle Modelle $\mathfrak{A}$ von T ist T' die *Theorie von* $\mathfrak{A}$, d.i. die Menge aller τ-Aussagen, die von $\mathfrak{A}$ erfüllt werden.

In einer der Implikationen wird Satz 3.24 (der „Modellexistenzsatz“) benutzt. In welcher ?