Stefan Geschke
Gido Scharfenberger

Ausgabe: 7.6.2004
Abgabe: 15.6.2004 in der Übung

Einführung in die Logik und Modelltheorie

– Sommersemester 2004 – 8. Übung –

Aufgabe 24 (das PNF-Theorem, 10 Punkte) Wir arbeiten in dieser Aufgabe mit der Sprache, die die logischen Symbole $\exists, \forall, \wedge, \vee, \neg, \equiv$ und die Klammern $($, $)$ enthält. Wir setzen also vorübergehend die Konvention ausser Kraft, dass $\forall$ und $\wedge$ nur Abkürzungen sind. (Es ist hier z.B. $\forall x\alpha \neq \neg\exists\neg\alpha$, obwohl die beiden Formlen natürlich semantisch äqivalent bleiben.)

Eine Formel α ist in *Pränexnormalform* (PNF), wenn α mit einer Folge $\mho_1 x_1 \dots \mho_n x_n$ von Quantoren $\mho_i \in \{\exists, \forall\}$ und den zugehörigen Variablen $x_i \in X$ beginnt und das verbleibende Endstück von α eine quantorenfreie Formel β ist, also wenn $\alpha = \mho_1 x_1 \dots \mho_n x_n \beta$.

Wir wollen hier zeigen, dass es zu jeder Formel γ eine (semantisch) äquivalente Formel α in PNF gibt. (Dieser Satz ist in der Sprache, die nur $\exists$ und $\neg, \vee$ enthält natürlich falsch.)

(a) Finde für jede der folgenden Formeln eine äquivalente Formel in PNF, wobei β quantorenfrei sei:

$$\neg\forall x\alpha, \neg\exists x\alpha, \beta \vee \forall x\alpha, \beta \wedge \forall x\alpha, \beta \vee \exists x\alpha, \beta \wedge \exists x\alpha.$$

(b) Sei nun α eine Formel, die nicht mit einem Quantor beginnt, aber mindestens einen Quantor enthält. Zeige, dass der *erste* in $\alpha = z_1 \dots z_i \mho x z_{i+1} \dots z_n$ auftretende Quantor $\mho x$ „nach vorne gezogen" werden kann, d.h. finde eine zu α äquivalente Formel $\alpha' = \mho' x' z_1' \dots z_n'$, die

- mit einem Quantor $\mho' x'$, $\mho' \in \{\exists, \forall\}$ beginnt,
- sich auf dem Endstück hinter $\mho x$ von α nur noch durch Umbenennung von Variablen unterscheidet, also für $k > i$ ist $z_k = z_k'$ oder beides sind Variablen, und
- auf dem Anfangsstück $z_1' \dots z_i'$ hinter $\mho' x'$ keine weiteren Quantoren enthält.

Die Übereinstimmung der Längen von α und α' klappt nur in polnischer Notation. In der Infix-Schreibweise wird α' in der Regel etwas länger als α.

(c) Zeige, dass jede Formel α ein Äquivalent in PNF besitzt.

Aufgabe 25 (verallgemeinerte identitätslogische Axiome) (a) Es seien $t_1, s_1 \dots, t_n, s_n$ Terme, f ein n-stelliges Funktionssymbol und r ein n-stelliges Relationssymbol. Zeige, dass (im prädikatenlogischen Kalkül der Vorlesung) die Formeln

$$\alpha_1 = (t_1 \equiv s_1 \wedge \dots \wedge t_n \equiv s_n) \to f(t_1, \dots, t_n) \equiv f(s_1, \dots, s_n),$$
$$\alpha_2 = (t_1 \equiv s_1 \wedge \dots \wedge t_n \equiv s_n) \to (r(t_1, \dots, t_n) \to r(s_1, \dots, s_n))$$

abgeleitet werden können.

(b) Es sei t ein Term. Zeige, dass die Formel

$$(x_1 \equiv y_1 \wedge \dots \wedge x_n \equiv y_n) \to t \equiv t(x_1/y_1, \dots, x_n/y_n)$$

abgeleitet werden kann.

(Tip: Benutzt die Ergebnisse der Vorlsung hinter dem Korrektheitssatz.)

Aufgabe 26 (Zusatzaufgabe, Fortsetzung von Aufgabe 25) Sind $t_1, \dots, t_n, s_1, \dots, s_n$ Terme und α eine Formel, so ist

$$(t_1 \equiv s_1 \wedge \dots \wedge t_n \equiv s_n) \to (\alpha(x_1/t_1, \dots, x_n/t_n) \to \alpha(x_1/s_1, \dots, x_n/s_n))$$

ableitbar. (Tip: Formelinduktion. Mit dem Deduktionstheorem bekommt die Induktionsvoraussetzung die Form $\vec{t} \equiv \vec{s} \vdash \alpha(\vec{x}/\vec{t}) \to \alpha(\vec{x}/\vec{s})$. Für den $\neg$-Schritt muss man aber etwas mehr voraussetzen. Im $(\exists y)$-Schritt zeige zuerst $\{\vec{t} \equiv \vec{s}, \alpha(\vec{x}/\vec{t})\} \vdash \exists y \alpha(\vec{x}/\vec{s})$.)