Stefan Geschke
Gido Scharfenberger

Ausgabe: 26.5.2004
Abgabe: 8.6.2004 in der Übung

Einführung in die Logik und Modelltheorie

– Sommersemester 2004 – 7. Übung –

Halbe Woche – halbe Übung ; die andere Hälfte der Aufgaben kommt als Zusatzaufgabe, mit der Ihr Eure Punkte ein wenig aufmöbeln könnt. Apropos: Die Aufgabe 12 mit den Heiratssätzen war offenbar nicht adäquat gestellt (Sorry deswegen !) und ist jetzt nachträglich zur Zusatzaufgabe geworden, d.h. sie wird bei der zu erreichenden Mindestpunktzahl nicht berücksichtigt.

Das Thema dieser Übung sind *Kalküle*. In Abschnitt 2.6 der Vorlesung wird ein Kalkül zum Ableiten prädikatenlogischer Formeln mit Hilfe von Axiomen und (syntaktischen) Schlussregeln angegeben. Dieses Prinzip lässt sich verallgemeinern: Ist Z ein Alphabet und $M \subseteq Z^*$ eine Menge von Worten über Z, so ist ein *Kalkül* ein $K = (A, R)$, wobei $A \subseteq M$ die Menge der *Axiome* und R eine Menge von *Regeln* der Form $(\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}, \beta)$ (bzw. $\frac{\alpha_1,\dots,\alpha_n}{\beta}$) mit $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta \in M$ ist. Die Definition von *Beweis* und von $T \vdash_K \alpha$ sind dann wortwörtlich dieselben wie in Definition 2.29 des Skriptes, wobei das K im Subskript des $\vdash$-Zeichens den benutzten Kalkül angibt (eigentlich würde man dann auch genauer von einem „K-Beweis“ sprechen).

Aufgabe 21 (prädikatenlogische Tautologien) Welche der folgenden Formeln sind prädikatenlogische Tautologien, welche sind allgemeingültig (siehe Definitionen 2.29/30) ?

$\alpha_1 = \ (r(x,y) \to s(x,y)) \to [(s(x,y) \to t(x,y)) \to (r(x,y) \to t(x,y))]$,

$\alpha_2 = \ (x \equiv y \to y \equiv z) \to x \equiv z$,

$\alpha_3 = \ [r(x) \wedge \forall x(r(x) \to s(x))] \to s(x)$,

$\alpha_4 = \ (\beta \wedge \neg\beta) \to \gamma$,

$\alpha_5 = \ (\beta \vee \neg\beta) \to \gamma$.

Für die beiden letzten α's seien β und γ beliebige (prädikatenlogische) Formeln, von denen die Antwort aber ggf. abhängen kann.

Aufgabe 22 (der Vorlesungskalkül ist nicht redundant) Wir wollen für zwei Bestandteile des Kalküls der Vorlesung zeigen, dass wir sie nicht weglassen können, ohne dabei die Ableitbarkeit gewisser offensichtlich allgemeingültiger Formeln zu verlieren.

(a) Zunächst beweisen wir das folgende Lemma über allgemeine Kalküle (s.o.):
Lemma: Ist $K = (A, R)$ ein Kalkül über der Menge M und ist $f : M \to 2$ eine Funktion, für die gilt:

  (i) $f(\alpha) = 1$ für alle $\alpha \in A$ und
  (ii) $\min_{\alpha \in p} f(\alpha) \leq f(\beta)$ für alle $(p, \beta) \in R$,

dann ist $f(\alpha) = 1$ für alle in K (aus der leeren Theorie) ableitbaren Worte α.

(b) Sei K' der prädikatenlogische Kalkül der Vorlesung *ohne die Substitutionsaxiome*. Zeige, dass die Formel $x \equiv x \to \exists x(x \equiv x)$ nicht in K' ableitbar ist. (Tip: Benutze das Lemma aus (a) mit der Funktion $f(\alpha) = 1$ für atomares α, $f(\exists x\alpha) = 0$ für alle α, $f(\neg\alpha) = 1 - f(\alpha)$ und $f(\alpha \vee \beta) = \max(f(\alpha), f(\beta))$.)

(c) Ist K'' der Kalkül der Vorlesung *ohne die Existenzregel* (aber mit Substitutionsaxiomen), so ist die Formel $x \equiv x \to \forall x(x \equiv x)$ nicht in K'' ableitbar. (Tip: Wie (b), nur $f(\exists x\alpha) = 1$.)

Aufgabe 23 (Zusatzaufgabe, 10 Punkte) (a) Es sei M die Menge der *aussagenlogischen* Formeln über der Ausagevariablenmenge P und $K = (A, R)$ der Kalkül mit $A = \varnothing$ und

$$R := \left\{ \frac{\alpha \vee \beta}{\beta \vee \alpha}, \frac{\alpha \vee (\beta \vee \gamma)}{(\alpha \vee \beta) \vee \gamma} : \alpha, \beta, \gamma \in M \right\}.$$

Gilt mit $p, q, r \in P$, dass $p \vee (q \vee r) \vdash_K p \vee (r \vee q)$? (Tip: Die Menge der aus einer Formel α in K ableitbaren Formeln ist endlich und nicht sehr groß.)

(b) Wir betrachten die Menge $M = Z^*$ der Worte über dem Alphabet $Z = \{l, h, t\}$ und darüber den Kalkül K, der als einziges Axiom das Wort lh und die Regelmenge

$$R := \left\{ \frac{xh}{xht}, \frac{lx}{lxx}, \frac{xhhhy}{xty}, \frac{xtty}{xy} : x, y \in Z^* \right\}$$

hat.

(1) Zeige zunächst, dass jedes in K ableitbare Wort die Form lx für ein $x \in \{h, t\}^*$ hat.

(2) Gib drei verschiedene K-Beweise des Wortes lht an.

(3) Ist das Wort lt in K ableitbar ? (Tip: Welche Anzahlen von h's in abgeleiteten Worten sind möglich ?)

(c) Sei nun K ein beliebiger Kalkül über einer Menge M. Wir definieren für $X \subseteq M$ den *deduktiven Abschluss* (bzgl. K) durch

$$\mathrm{Cl}_K(X) := \{\alpha \in M : X \vdash_K \alpha\}.$$

Zeige:

(1) Cl_K ist expandierend: $X \subseteq \mathrm{Cl}_K(X)$,

(2) Cl_K ist monoton: $X \subseteq Y$ impliziert $\mathrm{Cl}_K(X) \subseteq \mathrm{Cl}_K(Y)$,

(3) Cl_K ist idempotent: $\mathrm{Cl}_K(\mathrm{Cl}_K(X)) = \mathrm{Cl}_K(X)$.

(Zuordnungen innerhalb eines Mengensystems mit diesen drei Eigenschaften nennt man *Hüllenoperatoren*. Die berühmtesten Beispiele sind wohl *die lineare Hülle* einer Menge von Vektoren in einem Vektorraum (auch *Erzeugnis* genannt) und *die topologische Hülle* einer Menge in einem topologischen Raum.)