Stefan Geschke
Gido Scharfenberger

Ausgabe: 24.5.2004
Abgabe: 1.6.2004 in der Übung

Einführung in die Logik und Modelltheorie

– Sommersemester 2004 – 6. Übung –

Aufgabe 17 (elementare Definierbarkeit) Es sei $\mathfrak{A} = (A, \ldots)$ eine τ-Struktur und $R \subseteq A^n$ eine Relation. Dann heißt R *elementar über* $\mathfrak{A}$ *definierbar*, falls es eine τ-Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ gibt und für alle $\vec{a} \in A^n$ gilt, dass $\vec{a} \in R$ gdw. $\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}]$.

Wir betrachten hier die Strukturen $\mathfrak{A} = (\mathbb{R}, +, \cdot, 0)$ und $\mathfrak{B} = (\mathbb{R}, +, 0)$ über dem Vokabular der Körper (wobei alle nicht genannten Größen trivial mit 0 interpretiert werden sollen). Als Relation R wollen wir die natürliche Ordnung $<$ auf $\mathbb{R}$ wählen.

(a) Zeige, dass $<$ über $\mathfrak{A}$ elementar definierbar ist.

(b) Zeige, dass $<$ nicht über $\mathfrak{B}$ elementar definierbar ist. (Tip: Verwende einen Automorphismus von $\mathfrak{B}$, also eine Bijektion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\mathfrak{B} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[f(a_1), \ldots, f(a_n)]$$

für alle τ-Formeln $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ und $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$. Richte f so ein, dass $<$ nicht von f erhalten wird.)

Aufgabe 18 (semantische Äquivalenzen) (a) $\forall x(\varphi \wedge \psi) \approx (\forall x\varphi \wedge \forall x\psi)$;

(b) $\forall x(\varphi \vee \psi) \approx (\varphi \vee \forall x\psi)$, falls $x \notin \mathrm{frvar}(\varphi)$.

Aufgabe 19 (der Substitutionssatz, 10 Punkte) (a) Gib eine (über den Aufbau von α) rekursive Definition der Eigenschaft „t ist frei für x in α“ für feste $x \in X, t \in \mathrm{Tm}$ an.

(b) Beweise den Substitutionssatz:

Sei $\alpha(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{Fml}$ und seien für $1 \leq i \leq n$ sowohl t_i freier Term für x_i in α als auch $\mathrm{var}(t_i) \subseteq \{y_1, \ldots, y_m\}$. Ferner seien $\beta(y_1, \ldots, y_m) := \alpha(t_1/x_1, \ldots, t_n/x_n)$, $\mathfrak{A} = (A, \ldots)$ eine τ-Struktur, $\vec{b} \in A^m$ und $\vec{a} = (t_1^{\mathfrak{A}}[\vec{b}], \ldots, t_n^{\mathfrak{A}}[\vec{b}]) \in A^n$. Dann gilt $\mathfrak{A} \models \beta[\vec{b}]$ gdw. $\mathfrak{A} \models \alpha[\vec{a}]$.

(Tip: Versucht, den Satz trotz der komplizierten Formulierung als einfach anzusehen: Der Wahrheitswert von α in der Struktur $\mathfrak{A}$ mit der Belegung $\vec{a}$ ändert sich nicht, wenn man die freien Variablen von α durch Terme $t_1, \ldots, t_n$ substituiert und statt $\vec{a}$ ein Urbild $\vec{b}$ von $\vec{a}$ unter der Abbildung $(t_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, t_n^{\mathfrak{A}})$ einsetzt. Dieses Prinzip habt Ihr schon 1000 mal angewendet und wahrscheinlich auch 500 mal darauf geachtet, dass t_i frei für x_i ist. Der Beweis läuft natürlich wieder mit Induktion über den Aufbau von α, wobei der Induktionsanker nur Termeinsetzung verwendet, die Schritte für $\neg$ und $\vee$ trivial sind und der $\exists$-Schritt mit einer Fallunterscheidung (bei $\alpha = \exists x\beta$ entweder $x \notin \{x_1, \ldots, x_n\}$ oder (o.B.d.A.) $x = x_1$) aus der rekursiven Definition von $\mathfrak{A} \models \alpha$ gefolgert werden kann.)

Aufgabe 20 (Zusatzaufgabe zum semantischen Folgern, 10 Punkte) (a) Zeige, dass in (18.b) nicht auf die Bedingung $x \notin \mathrm{frvar}(\varphi)$ verzichtet werden kann (Gegenbeispiel).

(b) Formuliere die zu (18.a) und (18.b) analogen Äquivalenzen, die Existenzaussagen behandeln, und gib an, warum diese nicht extra bewiesen werden müssen.

(c) $\exists y\forall x\varphi \models \forall x\exists y\varphi$;

(d) $\forall y\exists xrxy \not\models \exists x\forall yrxy$, wobei r ein zweistelliges Relationssymbol sei.