Stefan Geschke
Gido Scharfenberger

Ausgabe: 17.5.2004
Abgabe: 25.5.2004 in der Übung

Einführung in die Logik und Modelltheorie

– Sommersemester 2004 – 5. Übung –

Aufgabe 15 (lineare Algebra, 10 Punkte) Das Vokabular aus Beispiel 2.19 der Vorlesung ermöglicht es zwar, die Klasse der K-Vektorräume (K ein Körper) zu axiomatisieren, aber lineare Algebra können wir über diesem Vokabular leider nicht betreiben. Um *lineare Abhängigkeit* definieren zu können, müssen wir nämlich über die Körperelemente quantifizieren. Da diese in der Konstruktion in 2.19 aber nur als Funktions*symbole* zugänglich sind, ist das nicht in allgemeiner Form möglich (nur im Spezialfall $V = K$). Hier soll ein Ausweg aus dieser Sackgasse untersucht werden. Wir stellen das Vokabular $\tau = \{K, V, +, \cdot, -, ^{-1}, \oplus, \ominus, \odot, 0, 1, \bar{0}\}$ auf, wobei K und V einstellige Relationssymbole und $\oplus, \ominus$ und $\odot$ zweistellige Funktionssymbole und $\bar{0}$ ein Konstantensymbol seien.

(a) Axiomatisiere über τ die Klasse der $(\mathcal{K}, \mathcal{V})$ (bzw. $\mathcal{K} \cup \mathcal{V}$), in denen $\mathcal{K}$ ein Körper und $\mathcal{V}$ ein $\mathcal{K}$-Vektorraum mit Vektoraddition und -subtraktion $\oplus$ und $\ominus$, neutralem Element $\bar{0}$ und skalarer Multiplikation $\odot$ ist. (Tip: Man kann über τ mit Hilfe der Prädikate K für „Körperelement" und V für „Vektor" über Vektoren und Körperelemente getrennt quantifizieren. Es müssen allerdings einige ansonsten implizite Bedingnungen als Axiome gefordert werden.)

(b) Formalisiere über τ den Begriff der linearen Abhängigkeit, d.h. gib (für jedes $m \in \mathbb{N}$) eine Formel $\phi(x_0, \ldots, x_m)$ an, die genau dann von Vektoren $\mathfrak{v}_0, \ldots, \mathfrak{v}_m$ erfüllt wird, wenn die Menge $\{\mathfrak{v}_0, \ldots, \mathfrak{v}_m\}$ linear abhängig ist.

(c) Gib für $n \in \mathbb{N}$ eine Formel über τ an, genau dann erfüllt ist, wenn $\mathcal{V}$ über $\mathcal{K}$ die Dimension n hat.

(d) Formalisiere über τ die Theorie der unendlich-dimensionalen Vektorräume (hierfür solltet Ihr mehr als nur eine Formel benötigen).

Aufgabe 16 (Formalisierung der Exponentialfunktion, 10 Punkte) Es sei τ das Vokabular $\{<, +, \cdot, -, ^{-1}, 0, 1\}$ der Theorie der angoerdneten Körper, also $<$ ein zweistelliges Relationssymbol, der Rest wie gehabt.

(a) Formalisiere über τ den Begriff des *angeordneten* Körpers (siehe z.B. Heuser).

(b) Wieso kann man in der Prädikatenlogik erster Stufe den *vollständig* angeordneten Körper nicht formalisieren ? Gibt es einen ähnlichen Ausweg wie den in Aufgabe 15 in der linearen Algebra beschrittenen ?

(c) Formalisiere über τ den Absolutbetrag, d.h. finde eine τ-Formel $\phi(x, y)$, die in jedem angeordneten Körper $(K, <^K, \ldots)$ genau dann von $a, b \in K$ erfüllt wird, wenn $a = |b|$.

(d) Es sei f ein weiteres einstelliges Funktionssymbol und $\tau' = \tau \cup \{f\}$. Finde über τ' Aussagen, die in $(\mathbb{R}, <^{\mathbb{R}}, \ldots, g)$ genau dann gelten, wenn

  (i) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist;
  (ii) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist;
  (iii) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Exponentialfunktion $x \mapsto e^x$ ist.

(Tip: Es ist auch hier allemal sinnvoll, einmal definierte und später wieder benutzte Formeln durch Symbole $(\alpha, \ldots)$ abzukürzen. Ihr müsst natürlich etwas Analysis verwenden (ohne Beweis), um die Exponentialfunktion zu charakterisieren.)