Stefan Geschke
Gido Scharfenberger

Ausgabe: 10.5.2004
Abgabe: 18.5.2004 in der Übung

Einführung in die Logik und Modelltheorie

– Sommersemester 2004 – 4. Übung –

Aufgabe 12 (Heiratssatz und Kompaktheitssatz, 10 Punkte) Für eine Ecke $v \in V$ eines Graphen $G = (V, E)$ definieren wir die Menge ihrer Nachbarn durch $N(v) := \{w \in V : \{v, w\} \in E\}$ und in Verallgemeinerung dessen $N(C) := \bigcup_{v \in C} N(v)$ für eine beliebige Eckenmenge $C \subseteq V$. Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *bipartit*, wenn es eine Partition $V = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ (dafür schreiben wir auch $A \dot{\cup} B = V$) gibt, so dass jede Kante $e \in E$ eine Ecke $v \in A$ mit einer Ecke $w \in B$ verbindet (also wenn $N(A) \subseteq B$ und $N(B) \subseteq A$). Eine *Paarung* für eine Menge $C \subseteq V$ von Ecken ist eine Menge $M \subseteq E$ von Kanten, die

- unabhängig ist, d.h. keine zwei Kanten aus M treffen sich in einer Ecke v, und
- jede Ecke aus C erreicht.

Der Satz von Hall (Heiratssatz für *endliche* Graphen) gibt eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, dass es in einem bipartiten Graphen $G = (A \dot{\cup} B, E)$ eine Paarung für A gibt. (Der etwas pofige Name „Heiratssatz" rührt von der offensichtlichen Interpretation eines bipartiten Graphen als symmetrische Sympathie- oder Attraktionsrelation E in einer heterosexuellen Gesellschaft $V = A \dot{\cup} B$ her.) Wir wollen ihn hier voraussetzen. Beweise könnt Ihr z.B. im Buch von Diestel über Graphentheorie finden. Er lautet:

> In einem endlichen, bipartiten Graph $G = (A \dot{\cup} B, E)$ gibt es genau dann eine Paarung für A, wenn für alle Eckenmengen $C \subseteq A$ gilt, dass $|N(C)| \geq |C|$.

Demgegenüber steht das (auch als Heiratssatz für *unendliche* Graphen bekannte) Auswahlprinzip von Rado, das wir hier mit Hilfe des Kompaktheitssatzes der Aussagenlogik aus dem Satz von Hall beweisen wollen:

> Ist $G = (A \dot{\cup} B, E)$ ein unendlicher, bipartiter Graph und ist für jede Ecke $v \in A$ die Nachbarmenge $N(v)$ endlich, so gibt es in G genau dann eine Paarung für A, wenn für alle endlichen Teilmengen $C \subseteq A$ gilt, dass $|N(C)| \geq |C|$.

Um hier den Kompaktheitssatz anwenden zu können, müssen offensichtlich die Daten des Graphs und die Anforderungen an eine Paarung in Formelmengen übertragen werden. Sei von nun an also $G = (A \dot{\cup} B, E)$ ein bipartiter Graph mit der Eigenschaft, dass jede Ecke $v \in A$ nur endlich viele Nachbarn hat.

(a) Es sei $P := E$, also die Menge der Kanten von G als Menge der Aussagevariablen gewählt. Definiere ein Formelmenge Φ_1, die ausdrückt, dass jede Ecke $v \in A$ mit einer Ecke aus B gepaart ist. Definiere außerdem eine Menge Φ_2 von Formeln, die ausdrückt, dass keine Ecke von zwei Kanten erreicht wird. (Tip: Was wird wohl Zusammenhang zwischen Belegung und Kantenteilmenge sein ?)

(b) Zeige, dass eine Menge $M \subseteq E$ von Kanten genau dann eine Paarung ist, wenn die zu M assoziierte Belegung alle Formeln aus $\Phi := \Phi_1 \cup \Phi_2$ erfüllt.

(c) Sei eine endlichen Menge $\Phi' \subseteq \Phi$ gegeben. Definiere einen Untergraph G' von G, auf den der Satz von Hall angewendet werden kann. (Tip: Aus Φ' erhält man eine naheliegende, endliche Menge $A' \subseteq A$. Davon ausgehend muss man eigentlich nur nuch die passende Menge $B' \subseteq B$ finden und dann alle möglichen Kanten hinzutun.)

(d) Folgere mit dem Kompaktheitssatz den unendlichen Heiratssatz aus dem endlichen. (Hinweis: Den Kompaktheitssatz wollen wir (in der Formulierung des Skripts) mit einer Kontradiktion α anwenden. Und vergesst nicht die Rückrichtung im Heiratssatz.)

Aufgabe 13 (Quersummenkriterium für Terme) Definiere eine Gewichtsfunktion

$$g : C \cup X \cup F \to \{-1, 1\},$$

um damit ein Quersummenkriterium zur Charakterisierung von Termen (in polnischer Notation) zu formulieren und zu beweisen.

Aufgabe 14 (Termeinsetzung) Beweise das Lemma 2.9 der Vorlesung.