Stefan Geschke
Gido Scharfenberger

Ausgabe: 3.5.2004
Abgabe: 11.5.2004 in der Übung

Einführung in die Logik und Modelltheorie

– Sommersemester 2004 – Dritte Übung –

Aufgabe 9 (die Lindenbaum-Tarski-Algebra, 10 Punkte) Wir betrachten die Menge Fml (eigentlich: $\mathrm{Fml}_{\mathrm{Infix}}$) und darauf die Relation der semantischen Äquivalenz $\approx$. Nach Bemerkung 1.19 ist $\approx$ eine Äquivalenzrelation auf Fml, d.h. wir können zur Quotientenstruktur

$$B := \{[\alpha] : \alpha \in \mathrm{Fml}\}, \quad \text{wobei } [\alpha] = [\alpha]_\approx = \{\beta \in \mathrm{Fml} : \alpha \approx \beta\}$$

der Äquivalenzklassen der Formeln übergehen.

(a) Zeige, dass die auf B induzierten Abbildungen Zuordnungen $\neg[\alpha] := [\neg\alpha]$ und $[\alpha] \vee [\beta] = [\alpha \vee \beta]$ für $\alpha, \beta \in \mathrm{Fml}$ wohldefiniert sind und argumentiere, warum dasselbe auch für die anderen Junktoren gilt.

Eine *Boolesche Algebra* ist eine Struktur $(A, \sqcup, \sqcap, -, 0, 1)$ mit zwei zweistelligen Verknüpfungen $\sqcup$ und $\sqcap$, einer einstelligen Operation $-$ und zwei ausgezeichneten Elementen 0 und 1, die die folgenden Axiome erfüllt (direkt unter den Axiomen sind die wichtigsten Beispiele genannt):

(B1) $\sqcup$ und $\sqcap$ sind assoziativ;

(B2) $\sqcup$ und $\sqcap$ sind kommutativ;

(B3) Absorptionsregeln: $a \sqcup (a \sqcap b) = a$ und $a \sqcap (a \sqcup b) = a$ für alle $a, b \in A$;

(B4) Distributivgesetze: $a \sqcap (b \sqcup c) = (a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap c)$ und $a \sqcup (b \sqcap c) = (a \sqcup b) \sqcap (a \sqcup c)$ für $a, b, c \in A$;

(B5) Komplementierungsregeln: $a \sqcup (-a) = 1$ und $a \sqcap (-a) = 0$ für $a \in A$.

(Ein vertrautes Beispiel für eine Boolesche Algebra ist die Potenzmengenalgebra $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap, C^X, \emptyset, X)$ einer beliebigen Menge X, wobei $C^X(M) := X \setminus M$ das Komplement von M in X sei; die aus der Analysis bekannten Borelmengen bilden eine Boolesche Unteralgebra von $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. Ein anderes Beispiel ist die Menge $\{0, 1\}$ mit den zu $\vee, \wedge, \neg$ gehörenden Booleschen Funktionen.)

Wir wollen nun einsehen, dass auch $(B, \vee, \wedge, \neg, 0_B, 1_B)$ mit der Klasse der Kontradiktionen $0_B := [p \wedge \neg p]$ und der Klasse der Tautologien $1_B := [p \vee \neg p]$ eine Boolesche Algebra ist, die sog. Lindenbaum-Tarski-Algebra.

(b) Rechne für $(B, \vee, \wedge, \neg, 0_B, 1_B)$ je eines der Gesetze aus jedem der Axiomenpaare (B1)-(B5) nach.

Wir haben durch $p \mapsto [p]$ wieder eine kanonische Einbettung von P nach B gegeben, tun also so, als ob $P \subseteq B$ wäre. Ein *Homomorphismus von Booleschen Algebren* vertauscht mit allen drei Operationen und erhält die Konstanten 0 und 1. „B ist *frei* über P" heißt dann (analog zu den freien Monoiden aus Aufgabe 1), dass es zu einer beliebigen Booleschen Algebra $(A, \sqcup, \sqcap, -, 0_A, 1_A)$ und einer beliebigen Abbildung $f : P \to A$ genau einen Homomorphismus $F : B \to A$ gibt, der f auf B erweitert.

(c) Zeige, dass B die freie Boolesche Algebra über der Menge P der Aussagevariablen ist. (Hinweis: Für $A = \{0, 1\}$ ist f eine Belegung von P und F ist dann die Zuordnung des Wahrheitswertes unter f.)

Aufgabe 10 (semantisches Folgern) Beweise oder widerlege:

(a) $(p \wedge q) \rightarrow (r \vee s), \neg r, \neg s, p \vDash \neg q$;

(b) $p \vee q, p \rightarrow p', q \rightarrow q', \neg(p' \wedge q') \vDash (p' \rightarrow p) \wedge (q' \rightarrow q)$;

(c) (Für $i \in \mathbb{N}$ sei $\alpha_i = p_i \rightarrow p_{i+1}$.) $\{\alpha_i : i < n\} \vDash p_0 \rightarrow p_n$;

(d) (Es seien $P_1, P_2 \subseteq P$.) $\{p \rightarrow q : p \in P_1, q \in P_2\} \cup \{p \rightarrow \neg q : p \in P_1, q \in P_2\} \vDash r \wedge \neg r$.

Aufgabe 11 (ein Satz über lineare Ordnungen) Es sei $(L, \leq_L)$ eine unendliche lineare Ordnung (d.h. $\leq_L$ ist eine zweistellige, reflexive, antisymmetrische und transitive Relation auf der unenlichen Menge L und je zwei Elemente a, b von L stehen zueinander entweder in der Relation $a \leq_L b$ oder $b \leq_L a$). Sei außerdem

$$x : \mathbb{N} \rightarrow L, i \mapsto x_i$$

eine injektive Folge in L. Wir behaupten, dass es dann eine bzgl. $\leq_L$ (streng) monotone Teilfolge von x gibt.

Beweise diese Behauptung mit Hilfe des Satzes von RAMSEY. (Tip: Wir haben es mit zwei Ordnungen zu tun. Diese legen eine 2-Färbung der Paare nahe. Bemerkung: Man kann die Behauptung natürlich auch direkt durch Angabe einer induktiven Konstruktion der Teilfolge beweisen. Wem danach ist – nur zu !)