Stefan Geschke
Gido Scharfenberger

Ausgabe: 5.7.2004
Abgabe: bis 21.7.2004

Einführung in die Logik und Modelltheorie

– Sommersemester 2004 – Zusatzübung –

Alle Aufgaben auf diesem Zettel sind fakultativ, also zum Auffüllen evtl. etwas magerer Punktekonten. Wir werden **keine Klausur** schreiben. Das Übungspunktekriterium ist also das einzige zum Scheinerwerb. Es ist mit 111 (=60% von 185) Punkten erfüllt. Die letzte Übung wird **nicht** am Morgen des 13. Juli stattfinden. Die Abgabe der Berarbeitungen zu diesem Zettel ist nach hinten verlegt (s.o.).

Aufgabe 38 (nicht-isomorphe dlOn gleicher Kardinalität, 10 Punkte) Zeige, dass es mindestens $2^{\aleph_0}$ viele paarwiese nicht-isomorphe dichte lineare Ordnungen ohne Endpunkte gibt. (Tip: Betrachte auf der Menge $L = \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ die lexikographische Ordnung, die durch

$$(m,x) < (n,y) :\Leftrightarrow m <^{\mathbb{N}} n \text{ oder } (m = n \text{ und } x <^{\mathbb{R}} y)$$

gegeben ist, und konstruiere wie folgt Substrukturen von $(L,<)$: Es sei $f : \mathbb{N} \to 2$ gegeben. Definiere dann

$$L_f = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{n\} \times M_n^f, \text{ wobei } M_n^f := \begin{cases} \mathbb{Q} & n \text{ ungerade} \\ \mathbb{R} & n \text{ gerade und } f(n/2) = 0 \\ \mathbb{R}\setminus\{0\} & n \text{ gerade und } f(n/2) = 1, \end{cases}$$

und $<_f = < \cap (L_f \times L_f)$.)

Aufgabe 39 (redundante Erweiterungen II, 10 Punkte) Es sei τ ein Vokabular, $\mathfrak{A} = (A,\ldots)$ eine τ-Struktur und $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ eine τ-Formel.

(a) Fügen wir zu τ ein n-stelliges Relaionssymbol r hinzu ($\tau' = \tau \cup \{r\}$), und definieren wir

$$r^{\mathfrak{A}'}(a_1,\ldots,a_n) :\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi[a_1,\ldots,a_n],$$

so gibt es zu jeder τ'-Formel α eine τ-Formel α' mit $\mathfrak{A}' \models \alpha \leftrightarrow \alpha'$, wobei $\mathfrak{A}' \restriction \tau = \mathfrak{A}$ sei.

(b) Sei nun $n = 2$ und $\{(a,b) \in A^2 | \mathfrak{A} \models \varphi[a,b]\}$ der Graph einer Funktion $F : A \to A$. Ferner sei f ein einstelliges Funktionssymbol und $\tau' = \tau \cup \{f\}$. Definieren wir wieder die τ'-Struktur $\mathfrak{A}'$ durch $\mathfrak{A}' \restriction \tau = \mathfrak{A}$ und $f^{\mathfrak{A}'} := F$, so existiert zu jeder τ'-Formel α eine τ-Formel α' mit $\mathfrak{A}' \models \alpha \leftrightarrow \alpha'$.

(Bemerkung: Diese Aufgabe dient wieder mal der Rechtfertigung einer gängigen mathematischen Praxis: Sie zeigt, dass man bei definierbaren Relationen und Funktionen so tun kann, als seien sie durch Symbole der Sprache gegeben.)

Aufgabe 40 (Halteproblem für leere Eingabe, 10 Punkte) Eine Menge W von Wörtern heißt *rekursiv aufzählbar* (oder einfach *aufzählbar*), wenn es ein Programm P gibt, so dass die damit programmierte Registermaschine nacheinander alle Wörter von W ausgibt (d.h. es gibt für jedes Element $w \in W$ eine natürliche Zahl n, so dass die Ausgabe im n-ten Berechnungsschritt beim Durchlauf von P gerade w ist.)

Zeige, dass die Menge der Programme, die bei leerer Eingabe halten, aufzählbar ist und dass das Komplement dieser Menge nicht aufzählbar ist. (Hinweis: Zu Beginn des 5. Kapitels der Vorlesung wird die Konvention geroffen, dass die Sprache über einem endlichen Vokabular definiert ist und dass die Menge der sinnvollen Programme entscheidbar ist. Unser Programm sollte in einer sinnvollen Reihenfolge nach und nach Schritte in allen sinnvollen Programmen ausführen. Das ist hauptsächlich eine Frage der Organisation.)

Aufgabe 41 (Auswahlaxiom und Zornsches Lemma, 15 Punkte) Das Auswahlaxiom ist die folgende Aussage: Jede Familie $(M_i)_{i\in I}$ nicht-leerer Mengen hat eine Auswahlfunktion $f : I \to \bigcup_{i\in I} M_i$ mit $f(i) \in M_i$ für alle $i \in I$.

(a) Beweise das Auswahlaxiom aus dem Zornschen Lemma.

(b) Beweise das Zornsche Lemma aus dem Auswahlaxiom. Anleitung: Zu einem gegebenen Mengensystem, das die Voraussetzungen des Zornschen Lemmas erfüllt geben wir mit Hilfe einer Auswahlfunktion auf einer geeignet gewählten Mengenfamilie ein maximales Element an. Habe nun also in $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ jede durch $\subseteq$ linear geordnete Teilmenge von S (sprich: jede Kette) eine obere Schranke in S. Wir ordnen jeder Kette C von S die Menge $\bar{C}$ ihrer echten oberen Schranke zu, also

$$\bar{C} := \{x \in S | x \notin C \text{ und für alle } y \in C : x \subseteq y\}.$$

Die Mengenfamilie, auf der wir die Auswahlfunktion erhalten ist

$$K := \{\bar{C} \subseteq S | \, C \text{ ist Kette von } S \text{ und } \bar{C} \neq \emptyset\}.$$

(In der Notation von oben ist $I = K$ und $M_{\bar{C}} = \bar{C}$. Eine Auswahlfunktion $f : K \to S$ erfüllt dann also $f(\bar{C}) \in \bar{C}$.) Wir definieren für eine gegeben Auswahlfunktion f auf K: Eine linear geordnete Teilmenge C von S ist eine f-*Kette*, wenn für jede Teilmenge $D \subseteq C$ mit $\bar{D} \cup C \neq \emptyset$ das Bild $f(\bar{D})$ minimal in $C \setminus D$ ist. Zeige der Reihe nach:

(i) Für $C = \emptyset$ ist $\{f(\bar{C})\}$ ein f-Kette und für jede f-Kette $D \neq \emptyset$ gilt $f(\bar{C}) \in D$.

(ii) Ist C eine f-Kette und $D \subseteq C$ mit $\bar{D} \cap C = \emptyset$, so ist $\bar{C} = \bar{D}$.

(iii) Ist C eine f-Kette, so ist $C \cup \{f(\bar{C})\}$ eine f-Kette.

(iv) Sind C und D zwei f-Ketten, so ist eine ein Anfangsstück der anderen (d.h. entweder $C \subseteq D$ und für $x, y \in D$ gilt $x \subseteq y \in C \Rightarrow x \in C$ oder umgekehrt). Anleitung: O.B.d.A gebe es ein $x \in D \setminus C$. Setze

$$E := \{y \in C \cap D | y \subseteq x\} = \{y \in C \cap D | y \subsetneq x\},$$

und zeige zunächst mit (ii), dass $\bar{E} = \bar{C}$. Leite dann aus der Annahme der Existenz eines $z \in C \setminus E$ ab, dass $z \in C \setminus D$ und folgere für $F = \{y \in C \cap D | y \subseteq z\}$ analog zu oben, dass $\bar{F} \cap D = \emptyset$, woraus ein Widerspruch zu $z \subseteq x$ folgt. Zeige schließlich, dass aus $E = C$ die Behauptung folgt.

(v) Die Vereinigung aller f-Ketten, also $C_m := \bigcup_{C \ f\text{-Kette}} C$ ist eine f-Kette.

(vi) C_m ist maximale f-Kette und liefert das maximale Element von S.

(Bemerkung: Die Knackpunkte sind (iv) und (v). Dieser auf Weston zurückgehende Beweis kommt ohne den expliziten Gebrauch von transfiniter Induktion aus.)