Stefan Geschke
Gido Scharfenberger

Ausgabe: 28.6.2004
Abgabe: 6.7.2004 in der Übung

Einführung in die Logik und Modelltheorie

– Sommersemester 2004 – 11. und letzte reguläre Übung –

Aufgabe 34 (torsionsfreie Gruppen) Wir betrachten über dem Vokabular $\tau = \{0, +, -\}$ die Theorie T der torsionsfreien abelschen Gruppen aus Beispiel (2.14.c) der Vorlesung.

(a) Zeige, dass keine endliche Teilmenge T_0 von T genau dieselben Modelle haben kann wie T.

(b) Zeige, dass die Klasse der torsionsfreien abelschen Gruppen keine *endliche* Axiomatisierung über τ hat (die ja nicht notwendigerweise eine Teilmenge von T sein müsste).

Aufgabe 35 (Modellrelationen, 10 Punkte) (a) $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

(b) $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

(c) $(\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}) \not\Rightarrow \mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$ (Gegenbeispiel!)

(d) $(\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B} \leq \mathfrak{C}$ und $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{C}) \not\Rightarrow \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ (Gegenbeispiel!)

Aufgabe 36 (Quantorenelimination) Sei T eine τ-Theorie. Zwei τ-Formeln φ, ψ sind T-*äquivalent*, wenn $T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ gilt. Eine Theorie T *erlaubt Quantorenelimination*, wenn jede τ-Formel T-äqivalent zu einer quantorenfreien Formel ist.

(a) Sei T eine Theorie, die Quantorenelimination erlaubt, $\mathfrak{A}$ ein Modell von T und $\mathfrak{B}$ eine Substruktur. Zeige $\mathfrak{B} \preccurlyeq \mathfrak{A}$. (Tip: Beweis von Lemma (4.9).)

(b) Zeige, dass eine Theorie, die Quantorenelimination erlaubt, vollständig ist, d.h. für jede τ-Aussage φ gilt $T \models \varphi$ oder $T \models \neg\varphi$ (man sagt dann auch: „T entscheidet φ“).

Aufgabe 37 (Zusatzaufgabe: QE bei dlO'n, 10 Punkte) Wir betrachten konkret die Theorie der dichten linearen Ordnungen ohne Endpunkte T_{dlO} aus Beispiel (2.20) der Vorlesung. Zeige, dass T_{dlO} Quantorenelimination erlaubt.

Anleitung: (Versucht bitte, die einzelnen Schritte zu verstehen, und schreibt sie dann mglichst exakt auf.) Wir machen Induktion, sei $\psi = \exists x_0 \varphi(x_0, \ldots, x_n)$ mit φ quantorenfrei. Jetzt übersetzen wir φ in eine aussagenlogische Formel: Wir substituieren die atomare Formel $x_i \equiv x_j$ durch p_{ij} und $x_i < x_j$ durch q_{ij}. Wir erhalten die aussagenlogische Formel α_φ, die von den Variablen $p_{ij}, q_{ij}, 0 \leq i, j \leq n$ abhängt. Bezüglich all dieser Variablen überführen wir α_φ mit dem Wahrheitstafel-Algorithmus in DNF. Jetzt können wir (in der entsprechenden prädikatenlogischen Formel) den Existenzquantor hinter die $\vee$'s ziehen (mit Aufgabe 18(a) in der Form von 20(b)). Wir können also davon ausgehen, dass φ eine Konjunktion von atomaren Formeln oder verneinten atomaren Formeln ist und darüberhinaus jede atomare Formel, die sich mit den Variablen $x_0, \ldots, x_n$ bilden lässt, als Teilformel enthält (entweder nackt oder negiert, das liefert der Wahrheitstafel-Algorithmus).

Falls φ jetzt unerfüllbar ist, d.h. jedes Modell von T_{dlO} erfüllt $\neg\varphi$, so ist schnell eine äquivalente Formel gefunden. Ist nun aber φ erfüllbar, so bleibt zu zeigen, dass ψ zu der Formel T_{dlO}-äquivalent ist, die man erhält, wenn man aus φ alle atomaren Formeln (bzw. ihre Negationen) entfernt, in denen x_0 vorkommt. Und das geht so: Aufgrund ihrer speziellen Form bestimmt die Formel φ die Lage der x_i untereinander vollständig. (Sie enthält sogar einiges an redundanten Informationen: Mit $\ldots \wedge x_i < x_j \ldots$ findet sich auch $\neg x_j < x_i$ und $\neg x_i \equiv x_j$ und $\neg x_j \equiv x_i$ in φ.) Entweder fordert φ nämlich die Gleichheit von x_0 mit einem anderen $x_i, 0 < i \leq n$ oderes gibt $0 < i, j \leq n$, so dass φ fordert, dass $x_i < x_0 < x_j$ und zwischen x_i und x_j keines der anderen $x_k, 0 < k \leq n$ liegt. Jetzt noch in die Theorie schauen...