Stefan Geschke
Gido Scharfenberger

Ausgabe: 21.6.2004
Abgabe: 29.6.2004 in der Übung

Einführung in die Logik und Modelltheorie

– Sommersemester 2004 – 10. Übung –

Aufgabe 31 (redundante Erweiterungen) (Siehe auch Definition und Bemerkung (3.7) der Vorlesung.) Seien $\tau \subseteq \tau'$ Vokabulare.

(a) Zeige, dass für jede τ-Formel φ und jede τ'-Sturktur $\mathfrak{A}$ gilt: $\mathfrak{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A} \restriction \tau \models \varphi$.

(b) Sei $\mathfrak{B}$ eine τ-Struktur. Gib eine τ'-Expansion $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{B}$ an.

(c) Sei nun ferner T eine Theorie über τ. Zeige, dass sich jede τ-Formel φ genau dann über dem Vokabular τ aus T ableiten lässt (in Zeichen: $T \vdash_\tau \varphi$), wenn sie sich über dem größeren Vokabular τ' ableiten lässt (also $T \vdash_{\tau'} \varphi$). Kurzum, zeige

$$T \vdash_\tau \varphi \Leftrightarrow T \vdash_{\tau'} \varphi.$$

(Bemerkung: Lemma (2.39) zeigt diese Aussage im Spezialfall $F = F'$ und $R = R'$ mit rein syntaktischen Methoden. Hier können wir aber auch den Vollständigkeitssatz benutzen.)

Aufgabe 32 (archimedische Körper) Ein angeordneter Körper $\mathfrak{K} = (K, +^{\mathfrak{K}}, \cdot^{\mathfrak{K}}, 0^{\mathfrak{K}}, 1^{\mathfrak{K}}, <^{\mathfrak{K}})$ heißt *archimedisch angeordnet*, falls es zu jedem $k \in K$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$k <^{\mathfrak{K}} n_{\mathfrak{K}} := \underbrace{1^{\mathfrak{K}} +^{\mathfrak{K}} \ldots +^{\mathfrak{K}} 1^{\mathfrak{K}}}_{n\text{-mal}}$$

gibt. Zeige durch Konstruktion eines Nichtstandard-Modells, dass die Klasse der archimedisch angeordneten Körper nicht über dem Vokabular $\tau = \{+, \cdot, 0, 1, <\}$ axiomatisierbar ist.

Aufgabe 33 (Kompaktheitssatz der Aussagenlogik) Es sei eine Menge P von Aussagevariablen mit beliebiger (unendlicher) Mächtigkeit gegeben. Wir betrachten das Vokabular $\tau = R = P$, das nur aus Relationssymbolen besteht, die wir darüberhinaus mit den Aussagevariablen identifizieren. Jeder aussagenlogischen Formel α ordnen wir die τ-Formel α' zu, die durch Substitution jeder Aussagevariable p in α durch die τ-Formel $\forall x\, px$ entsteht. Ist Φ eine Menge aussagenlogischer Formeln, so sei $\Phi' := \{\alpha' | \alpha \in \Phi\}$ die assoziierte τ-Theorie.

(a) Zeige, dass eine Menge Φ von aussagenlogischen Formeln genau dann erfüllbar ist, wenn Φ' ein Modell hat.

(b) Beweise Lemma 1.30 für beliebige Mächtigkeiten von P: Eine aussagenlogische Formelmenge Φ ist genau dann erfüllbar, wenn jede endliche Teilmenge von Φ erfüllbar ist.

(Bemerkung: Lemma 1.30 hatte zwischenzeitlich die Nummer 2.5, befindet sich aber in jedem Falle auf Seite 9 ganz oben. Das Lemma ist der eigentliche Beweis des Kompaktheitssatzes der Aussagenlogik.)