Stefan Geschke
Gido Scharfenberger

Ausgabe: 19.4.2004
Abgabe: 27.4.2004 in der Übung

Einführung in die Logik und Modelltheorie

– Sommersemester 2004 – Erste Übung –

Zunächst noch einmal die wichtigsten Informationen zu den Logik-Übungen:

- Übungstermin ist **dienstag morgens um 8.30 in Raum 025/026 des π-Gebäudes**, vom Raum der Vorlesung aus erreicht Ihr diesen Raum, indem Ihr am Unix-Terminal-Raum vorbei durch die Glastür und geradeaus bis ans Ende des Ganges geht,
- die Aufgaben werden montags in der Vorlesung ausgegeben und sollen nach einer Woche in der Übungsgruppe nachbesprochen und deshalb auch dort abgegeben werden,
- jede Aufgabe gibt 5 Punkte, die Zettel werden im Schnitt aus je 4 Aufgaben bestehen,
- Scheinkriterium sind 60 % der Übungspunkte und das Bestehen der Klausur am Ende des Semesters,
- es wird voraussichtlich unter der Adresse

  `http://www.math.fu-berlin.de/~gscharfe/SoSe04/vl`

  eine Website zur Vorlesung geben,
- bei Fragen aller Art erreicht Ihr uns entweder persönlich in Raum 011 der Villa, dort telefonisch unter 838-75446 oder mich (Gido) mit einer Email an `gscharfe@math.fu-berlin.de`

Aufgabe 1 (die Wörter bilden den freien Monoid über dem Alphabet) Eine Menge M mit einer assoziativen zweistelligen Verknüpfung $\circ$, bzgl. der ein neutrales Element $e \in M$ existiert, nennt man in der Algebra einen *Monoid.* (Hätte außerdem jedes Element von M ein Inverses bzgl. $\circ$ in M, so wäre $(M, \circ, e)$ eine Gruppe.) Ein *Monoid-Homomorphismus* ist eine Abbildung zwischen Monoiden, welche die Verknüpfung erhält –auch das ist in Analogie zum Gruppenhomomorphismus zu verstehen.

Es sei nun Z ein beliebiges Alphabet.

(a) Zeige, dass $(Z^*, ^\frown, \lambda)$ ein Monoid ist, wobei $^\frown$ die Verkettung von Worten und λ das leere Worte sind.

(b) Seien nun noch ein weiterer Monoid $(M, \circ, e)$ und eine beliebige Abbildung $f : Z \to M$ gegeben. Zeige, dass es *genau einen* Monoid-Homomorphismus F gibt, der f fortsetzt.

(Man sagt in diesem Falle, dass Z^* *frei* (*über* Z) ist. Freie Monoide sind bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt (warum ?). Deshalb spricht man auch von *dem* freien Monoid über einer Menge, hier: Z).

Aufgabe 2 (intensionale und extensionale Definition der Formeln) Wir wollen eine Charakterisierung der Menge Fml der aussagenlogischen Formeln in polnischer Notation beweisen. Dazu definieren wir induktiv die folgenden Mengen M_i für $i \in \mathbb{N}$: Es sei $M_0 := P$ die Menge der Aussagevariablen und

$$M_{i+1} := M_i \cup \{\neg\alpha | \alpha \in M_i\} \cup \{j\alpha\beta | j \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\} \text{ und } \alpha, \beta \in M_i\}.$$

Zeige, dass $\mathrm{Fml} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i$.

Aufgabe 3 (Lemma für Aufgabe 4) Wir betrachten die Menge der Formeln in (der herkömmlichen) Infix-Schreibweise, also die Menge der Worte über $Z = P \cup J \cup \{(,)\}$, die entsteht, wenn man in Definition 1.3 des Skriptes Bedingung (3) durch

(3') $j \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, $\alpha, \beta \in M \Rightarrow (\alpha j \beta) \in M$

ersetzt, und bezeichnen diese mit $\mathrm{Fml}^{\mathrm{infix}}$. In der nächsten Aufgabe wollen wir das zu Satz 1.7 der Vorlesung analoge Resultat für Infix-Formeln beweisen und leisten hier die nötige Vorarbeit:

(a) Zeige, dass in der Infix-Schreibweise keine Formel ein Anfangsstück einer anderen Formel sein kann, also dass es keine $\alpha, \beta, w \in Z^*$ geben kann mit $\alpha, \beta \in \mathrm{Fml}^{\mathrm{infix}}, w \neq \lambda$ und $\alpha = \beta^\frown w$. (Tip: Klammern zählen und $\neg$'s ignorieren!)

(b) Für Formeln $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathrm{Fml}^{\mathrm{infix}}$ und für zweistellige Junktoren $j, j' \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ gilt:

$$(\alpha j \beta) = (\gamma j' \delta) \Rightarrow \alpha = \gamma, j = j' \text{ und } \beta = \delta.$$

Aufgabe 4 (eindeutige Lesbarkeit von Infix-Formeln) Beweise den Satz über die eindeutige Lesbarkeit für Formeln in Infix-Schreibweise: Für jede Formel $\alpha \in \mathrm{Fml}^{\mathrm{infix}}$ gilt entweder

(a) $\alpha \in P$ oder

(b) $\alpha = \neg\beta$ für genau eine Formel $\beta \in \mathrm{Fml}^{\mathrm{infix}}$ oder

(c) $\alpha = (\beta j \gamma)$ für Formeln $\beta, \gamma \in \mathrm{Fml}^{\mathrm{infix}}$ und einen zweistelligen Junktor $j \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, und β, γ und j sind eindeutig bestimmt.

(Tip: Für den Beweis, dass keine Formel von anderer Form sein kann, könnt Ihr entweder die Argumentation aus der Vorlesung adaptieren oder eine Infix-Version der Aussage von Aufgabe 2 verwenden.)