Musterlösung zu Aufgabe 3(a):

Zunächst zeigen wir mit Induktion über den Formelaufbau, dass in Infix-Formeln die Klammern stets paarweise auftreten, und dass in jede der Paare die öffnende Klammer der schließenden vorangeht. Dazu definieren wir ein „Klammergewicht" auf Z^* (das ist sogar ein Homomorphismus):

$$g : Z^* \to \mathbb{Z}, g(z_1 \ldots z_n) = |\{i \leq n : z_i = (\}| - |\{i \leq n : z_i =)\}|.$$

Die oben angegebene Klammerregel liest sich dann so: Jede Infix-Formel α hat Klammergewicht $g(\alpha) = 0$ und jedes echte Anfangsstück w einer Infix-Formel hat nicht-negatives Klammergewicht $g(w) \geq 0$. Wir zeigen darüberhinaus noch, dass jedes echte Anfangsstück einer Formel der Form $\alpha = (\beta j \gamma)$ strikt positives Klammergewicht hat (das ist beriets die Aussage der Aufgabe für diesen Formeltyp).

Beweis.

IA Jede atomare Formel (sprich Aussagevariable) $p \in P$ erfüllt $g(p) = 0$ und das einzig echte Anfangsstück ist λ und erfüllt ebenfalls $g(\lambda) = 0$.

IS Als Induktionsvoraussetzung wollen wir annehmen, dass die Formeln α und β die Behauptung erfüllen. Zu zeigen ist dann die Behauptung für $\neg\alpha$ und $(\alpha j \beta)$, wobei j einer der zweistelligen Junktoren sei. Aber die Formel $\neg\alpha$ erbt die Klammergewichte sowohl als ganzes als auch in den Anfangsstücken von α, und $g((\alpha j \beta)) = 0$ folgt ebenfalls offensichtlich aus der Induktionsvoraussetzung.

Die Aussage über die Anfangsstücke von $(\alpha j \beta) = z_1 \ldots z_n$ beweisen wir mit einer Fallunterscheidung. Für $\ell < n$ sei $w_\ell := z_1 \ldots z_\ell$ und m sei so, dass $w_m = (\alpha$.

1. $\ell \leq m$: $g(w_\ell) = 1 + g(z_2 \ldots z_\ell) \geq 1$ nach Indunktionsvoraussetzung über (die Anfangsstücke von) α.
2. $\ell = m + 1$: $g(w_{m+1}) = g(w_m) = 1$, da $g(\alpha) = 0$ und der Junktor j das Klammergewicht nicht verändert.
3. $m + 1 < \ell < n$: Nach Fall 2 und der Indunktionsvoraussetzung über β ist auch hier $g(w_\ell) \geq g(w_{m+1}) = 1$. □

Wir wollen jetzt also zeigen, dass kein echtes Anfangsstück einer gegebenen Infix-Formel α eine Infix-Formel sein kann. Für Formeln der Form $(\beta j \gamma)$ haben wir das eben mitbewiesen. Und um zu zeigen, dass das im wesentlichen reicht, verwenden wir wieder das mittlerweile gut bekannte Argument, dass alle Formeln von der Form $p \in P$, $\neg\phi$ oder $(\phi j \psi)$ mit $\phi, \psi \in \mathrm{Fml}^{\mathrm{infix}}$ sind (weil die Menge aller dieser Formeln die Bedingungen (1)-(3) aus der Definition der Formeln erfüllt.)

Ferner können wir die $\neg$'s, mit denen α evtl. beginnt vernachlässigen, denn falls ein Gegenbeispiel für die Behauptung, sagen wir

$$\alpha = \beta^\frown w, \quad \beta \in \mathrm{Fml}^{\mathrm{infix}}, w \neq \lambda$$

mit einer Folge von neg's beginnen würde, so wäre auch die um diese $\neg$'s erleichterte Formel α' mit dem entsprechenden β' ein Gegenbeispiel.

Da außerdem eine Formel, die ein nicht-triviales (also $\neq \lambda$), echtes Anfangsstück hat, nicht nur aus einer einzelnen Aussagevariable bestehen kann, muss α (nach Elimination der $\neg$'s am Anfang) von der Form $(\gamma j \delta)$ sein.