Das Zornsche Lemma: Sei X eine Menge und $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein System von Teilmengen von X mit der folgenden Eigenschaft:

> Jede durch $\subseteq$ linear geordnete Teilmenge $K \subseteq S$ (d.h. je zwei Elemente $a, b \in K$ erfüllen $a \subseteq b$ oder $b \subseteq a$) hat eine obere Schranke in S (d.i. ein $c \in S$ mit $c \supseteq a$ für alle $a \in K$).

Dann hat S ein maximales Element bzgl. $\subseteq$, also ein $a \in S$, so dass für alle $b \in S$ aus $b \supseteq a$ bereits $a = b$ folgt.

Bei der Anwendung des ZORNschen Lemmas muss man ein geeignetes Mengensystem definieren (von dem das Objekt, das gesucht wird, ein Element sein können muss) und dann die Voraussetzung mit der oberen Schranke für jedes linear geordnete Teilsystem nachrechnen. Als obere Schranke kann man aber in der Regel die Vereinigung über K wählen.

Musterlösung zur Aufgabe 26: (Ich habe nicht alle Beweiszeilen explizit aufgeschrieben aber doch stets recht genau die Schritte angegeben. Führt bitte die fehlenden Beweiszeilen beim Lesen selbst aus !) Wir zeigen $\vdash \varphi_\alpha$, wobei

$$\varphi_\alpha := (t_1 \equiv s_1 \wedge \ldots \wedge t_n \equiv s_n) \to (\alpha(x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n) \to \alpha(x_1/s_1, \ldots, x_n/s_n)),$$

und verwenden Induktion über den Aufbau von α.

IA$_1$ Sei $\alpha = t \equiv t'$. Die freien Variablen von t, t' kommen in $x_1, \ldots, x_n$ (schreibe: $\vec{x}$) vor. Wir zeigen

$$\vdash \psi \text{ mit } \psi := \vec{x} \equiv \vec{y} \to (t \equiv t' \to t(\vec{x}/\vec{y}) \equiv t'(\vec{x}/\vec{y})).$$

Dann können wir wie in 25(a) die x'e durch t's ersetzen und die y's durch s'e und erhalten $\vdash \varphi_{t \equiv t'}$.

Ein trivialer Beweis zeigt:

$$\{\vec{x} \equiv \vec{y}, t \equiv t'\} \vdash t \equiv t'.$$

Mit Lemma (2.36) können wir einen Allquantor $\forall x_i$ davorsetzen und dann das duale Substitutionsaxiom aus Lemma (2.35) mit dem Modus Ponens verwenden, um zu

$$\{\vec{x} \equiv \vec{y}, t \equiv t'\} \vdash t(x_i/y_i) \equiv t'(x_i/y_i)$$

zu gelangen. Nachdem wir das hintereinander für alle x_i gemacht haben, erhalten wir für die gewünschte Formel $\vdash \psi$.

IA$_2$ Sei $\alpha = ru_1 \ldots u_k$, wobei die u_i Terme sind. Der erste Induktionsanker, angewendet auf $t = u_i(\vec{x}/\vec{t})$ und $t' = u_i(\vec{x}/\vec{s})$ liefert (mit dem Deduktionstheorem)

$$\vec{t} \equiv \vec{s} \vdash \vec{u}(\vec{x}/\vec{t}) \equiv \vec{u}(\vec{x}/\vec{s}).$$

Jetze wenden wir α_2 aus Aufgabe 25(b) an mit $\vec{u}(\vec{x}/\vec{t})$ statt $\vec{t}$ und $\vec{u}(\vec{x}/\vec{s})$ statt $\vec{s}$ und bekommen

$$\vdash \vec{u}(\vec{x}/\vec{t}) \equiv \vec{u}(\vec{x}/\vec{s}) \to (ru_1(\vec{x}/\vec{t}) \ldots u_k(\vec{x}/\vec{t}) \to ru_1(\vec{x}/\vec{s}) \ldots u_k(\vec{x}/\vec{s})).$$

Wenn wir diese Formel aus der leeren Theorie ableiten können, dann auch aus $\vec{t} \equiv \vec{s}$. Mit Modus Ponens ergibt das

$$\vec{t} \equiv \vec{s} \vdash (ru_1(\vec{x}/\vec{t}) \ldots u_k(\vec{x}/\vec{t}) \to ru_1(\vec{x}/\vec{s}) \ldots u_k(\vec{x}/\vec{s})),$$

was bis auf eine Anwendung des Deduktionstheorems der gesuchte zweite Induktionsanker $\vdash \varphi_{ru_1 \ldots u_k}$ ist.

IS$_1$ Sei $\alpha = \beta \vee \gamma$ und es seien bereits φ_β und φ_γ als ableitbar erkannt. Dann ist aber $(\varphi_\beta \wedge \varphi_\gamma) \to \varphi_\alpha$ eine prädikatenlogische Tautologie und nach Lemma (2.34) somit auch φ_α ableitbar.

IS$_2$ Sei $\alpha = \exists y \beta$ und φ_β ableitbar. Das Deduktionstheorem übersetzt diese Induktionsvoraussetzung in

$$\{\vec{t} \equiv \vec{s}, \beta(\vec{x}/\vec{t})\} \vdash \beta(\vec{x}/\vec{s}).$$

Darauf und auf das entsprechende Substitionsaxiom angewendet liefert der Modus Ponens

$$\{\vec{t} \equiv \vec{s}, \beta(\vec{x}/\vec{t})\} \vdash \exists y \beta(\vec{x}/\vec{s}).$$

Jetzt ziehen wir mit dem Dedukionstheorem nur die Formel $\beta(\vec{x}/\vec{t})$ vor das Ableitbarkeits-Zeichen und wenden die Existenzregel mit der Variable y an, die ja in $\alpha(\vec{x}/\vec{s}) = \exists y \beta(\vec{x}/\vec{s})$ nicht frei vorkommt und erhalten wieder mit Hilfe des Deduktionstheorems $\vdash \varphi_\alpha$.

IS$_3$ Sei $\alpha = \neg\beta$. $\vec{t}$ und $\vec{s}$ treten immer völlig symmetrisch auf. Wir können also statt φ_β auch

$$\varphi'_\beta = \vec{t} \equiv \vec{s} \to (\beta(\vec{x}/\vec{t}) \leftarrow \beta(\vec{x}/\vec{s}))$$

als ableitbar voraussetzen. Aber dann ist $\varphi'_\beta \to \varphi_\alpha$ eine prädikatenlogische Tautologie und wir erhalten $\vdash \varphi_\alpha$ mit Modus Ponens.